BULLETIN

DES

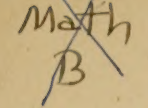
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

23040 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

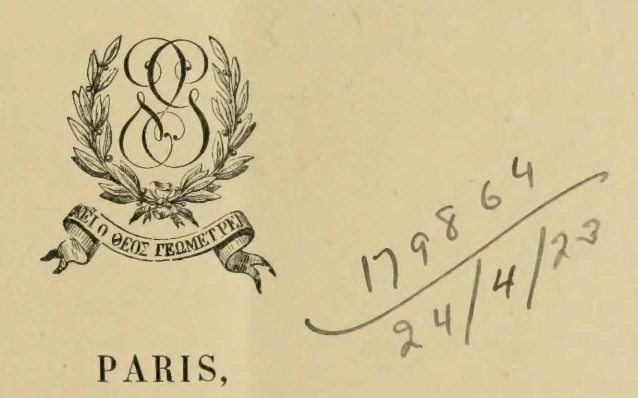
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XX. — ANNÉE 1896.

(TOME XXXI DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. POINCARÉ, Membre de l'Institut. — LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES. Leçons professées, pendant le premier trimestre 1892-1893, à la Faculté des Sciences de Paris. Rédigées par M. *Ch. Maurain*, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé de l'Université.

De nombreuses expériences ont été faites dans ces dernières années sur les oscillations électriques.

D'après M. Poincaré, l'ensemble des faits observés confirmerait la théorie de Maxwell, en admettant, comme le veut Hertz, que la théorie de Maxwell *c'est le système d'équations* (¹)

$$A\mu\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \qquad A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Telle est, il me semble, l'idée directrice du nouvel Ouvrage de M. Poincaré. La discussion des expériences y conclut toujours en faveur de la théorie : voilà une théorie bien favorisée.

L'Ouvrage débute par un exposé de la théorie. L'auteur complète le Mémoire fondamental de Hertz sur les équations de

(¹) L, M, N force magnétique; X, Y, Z force électrique; u, v, w courant de conduction; ε, μ constante diélectrique et constante magnétique; A constante égale à l'inverse de la vitesse de la lumière.

l'Électrodynamique, en cherchant à établir comment on peut arriver aux équations de Maxwell en partant des faits expérimentaux. Hertz avait suivi la marche inverse, posant les équations générales comme résumé de nos connaissances expérimentales et montrant qu'effectivement toutes les lois admises avant ses propres recherches s'y trouvent implicitement renfermées.

Le mode d'exposition adopté par M. Poincaré a ceci d'avantageux qu'il ne permet pas de masquer les lacunes de la théorie.

Il paraît incontestable que si l'on part des équations de Maxwell, les lois de l'électromagnétisme en sont des conséquences nécessaires. Avec M. Poincaré, au contraire, partons des faits expérimentaux, les équations de Maxwell en sont-elles l'expression nécessaire et unique? C'est ce que l'on pourrait croire après un examen superficiel du premier Chapitre. En réalité, cette conclusion ne semble pas s'imposer. Les équations différentielles acceptées par Hertz sont peut-être les plus simples qui soient compatibles avec les lois expérimentales, mais ce ne seraient pas les seules. On n'arrive à les établir qu'à l'aide d'hypothèses complémentaires.

A suivre l'exposé de M. Poincaré on peut voir, au moins, quelles hypothèses il y a lieu de faire.

Le premier groupe d'équations

$$A\mu\frac{dL}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}$$

se déduit de la loi générale de l induction et de quelques hypothèses; ce n'est pas la moindre d'admettre « que la loi énoncée, tirée de faits expérimentaux particuliers, est générale. On fait toujours une hypothèse analogue quand on tire une loi de faits expérimentaux, lesquels sont toujours particuliers ».

Pour obtenir le second groupe d'équations fondamentales

$$A\varepsilon\frac{dX}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi A u,$$

nous faisons appel au principe de la conservation de l'énergie, étendu à tout l'espace

$$\int d\tau\sum X\left(A\varepsilon\frac{dX}{dt}-\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}+4\pi A u\right)=0.$$

Cette équation conduit à poser

$$A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u + \alpha,$$

et deux autres égalités analogues introduisant un certain vecteur α, β, γ. Pour retomber sur les équations de Hertz, il faudrait *démontrer* que α, β, γ sont nuls, alors que le principe de la conservation de l'énergie exige seulement que

$$\int d\tau (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) = 0.$$

Supposer α, β, γ nuls dans tous les cas, c'est faire une nouvelle hypothèse. Si elle permet de simplifier les équations, c'est néanmoins une hypothèse : elle pourrait n'être pas conforme aux faits expérimentaux. M. Poincaré montre toutefois que α, β, γ doivent être nuls dans un champ purement électrostatique puisqu'alors ils restent seuls dans les équations.

Au reste le principe de la conservation de l'énergie *ne donne qu'une intégrale* des équations différentielles. Il est donc certain, *a priori*, que ce principe, à lui seul, ne peut fournir un système de *trois* équations différentielles.

Après cet exposé substantiel, M. Poincaré aborde l'étude des oscillations hertziennes (Chapitre II), en se plaçant principalement au point de vue théorique. Nous voyons (Chapitre III) comment l'intégration des équations générales se simplifie par l'introduction d'un *potentiel vecteur* ξ, η, ζ satisfaisant à trois équations en L, M, N

$$L = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}.$$

Ces trois équations, compatibles, ne définissent pas entièrement le *potentiel vecteur;* à un système de solutions ξ, η, ζ on peut évidemment ajouter les dérivées partielles $\frac{dS}{dx}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dz}$ d'une même fonction $S(x, y, z, t)$. Dans chaque cas particulier, on spécifiera la fonction S de manière à faciliter l'intégration ; pour le cas d'un champ de révolution il existe une solution particu-

lièrement simple où le potentiel vecteur ξ', η', ζ' obtenu est constamment parallèle à l'axe de révolution.

Nous voici donc en possession des éléments d'un calcul complet; nous sommes en état de déterminer théoriquement la période et l'amortissement d'un excitateur de Hertz. Voyons maintenant comment on peut comparer la théorie à l'expérience : c'est l'objet du quatrième Chapitre.

Nous trouvons, dans ce Chapitre, une théorie étendue de la résonance, où est mis en évidence le rôle important d'un amortissement dans la perturbation excitatrice. Si l'excitation est rapidement amortie, le résonateur est mis en vibration par une secousse brusque; il vibre ensuite *avec sa période propre,* comme le fait un timbre après le choc du marteau.

Si tel est le cas des oscillateurs de Hertz, un même excitateur doit faire vibrer un résonateur quelconque, et la longueur d'onde mesurée dans les expériences d'interférences doit correspondre à la période du résonateur : c'est le phénomène de la résonance multiple. MM. Sarazin et de la Rive, qui ont découvert ce phénomène, en ont proposé une explication différente. Suivant eux, l'excitateur émettrait un *spectre* continu de radiations électromagnétiques parmi lesquelles chaque résonateur choisirait sa vibration synchrone.

M. Poincaré fait observer que son explication n'est point opposée à celle de MM. Sarazin et de la Rive, mais en est un cas particulier. Une vibration pendulaire amortie, aussi bien qu'une perturbation quelconque, peut, en effet, être représentée par une intégrale de Fourier

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(q)\cos qt + \psi(q)\sin qt]\,dq,$$

c'est-à-dire qu'on la peut considérer comme équivalente à un spectre continu de vibrations périodiques non amorties.

La théorie proposée par M. Poincaré doit donc pouvoir expliquer tous les faits qui s'expliquent dans la théorie des savants genevois. L'explication de M. Poincaré est-elle donc équivalente à celle de MM. Sarazin et de la Rive? Non pas : elle en est seulement un cas *particulier.* MM. Sarazin et de la Rive admettent que la vibration excitatrice est composée d'un spectre continu.

D'après ce qui précède, cela revient à dire que c'est une vibration *quelconque*. En d'autres termes, MM. Sarazin et de la Rive *ne supposent rien* sur la perturbation excitatrice. M. Poincaré, au contraire, admet que ce doit être une vibration pendulaire simple amortie : des expériences pourraient donc montrer que l'hypothèse de M. Poincaré est nécessaire. Le développement des expériences de M. Pérot tend à établir que la vibration émise par l'excitateur est, en effet, une vibration pendulaire simple amortie; c'est, d'ailleurs à cette idée que Hertz lui-même était arrivé de son côté.

Quoi qu'il en soit de l'explication, un résonateur vibre avec sa période propre.

Si donc le résonateur est bien défini, il est possible de calculer la période de ses oscillations, et la mesure de leur longueur d'onde donne la vitesse de propagation des ondulations hertziennes. Or, en faisant se propager ces ondulations le long d'un fil, on trouve une vitesse indépendante de la période et égale à la vitesse de la lumière (expérience de M. Blondlot). Mais la théorie de ces expériences n'est pas à l'abri de toute objection. Dans un complément au quatrième Chapitre, nous trouvons l'historique des mesures directes de la durée de propagation d'une perturbation électromagnétique le long d'une ligne télégraphique, et la conclusion s'impose après les expériences plus récentes de M. Blondlot : les oscillations hertziennes se propagent le long d'un fil conducteur avec une vitesse v égale à celle de la lumière.

Les anciennes théories sur l'action directe à distance conduisent au même résultat : la propagation dans un fil, retardée par les effets d'induction et de capacité combinés, ne peut se faire qu'avec la vitesse v. Mais dans l'air libre, les actions électromagnétiques se feraient sentir instantanément à toute distance, et ceci est en contradiction avec les équations de Hertz et Maxwell qui exigent une vitesse finie de propagation, encore égale à v. Après les expériences incertaines de Hertz, ce sont les mesures de MM. Sarazin et de la Rive qui entraînent la conviction : l'égalité des vitesses de propagation dans les fils et dans l'air se trouve établie (Chapitre V).

Au sixième Chapitre, après quelques compléments sur la théorie du résonateur, nous étudions théoriquement la pénétration

des ondes électromagnétiques à l'intérieur des conducteurs et la dissipation d'énergie qui en résulte par suite de leur échauffement. Ici les expériences sont peu nombreuses et peu sûres; elles donnent des résultats *voisins* des prévisions théoriques. Le Chapitre contient encore quelques remarques sur l'influence de la diffraction dans les expériences de réflexion des ondes électromagnétiques : ce dernier point se trouve avoir beaucoup été éclairci par des expériences ultérieures de Righi qui sont indiquées dans un Appendice au Chapitre VII.

« Dans tout ce qui précède, on a supposé en présence des corps conducteurs et un seul diélectrique, l'air. Les propriétés des autres diélectriques présentent un très grand intérêt, mais sont encore plus difficiles à étudier expérimentalement que celles que nous avons étudiées jusqu'ici. »

Aussi ne trouvons-nous qu'un Chapitre, l'avant-dernier, consacré à l'étude de la propagation des oscillations électriques dans les diélectriques autres que l'air. On s'attache surtout à la relation de Maxwell : l'indice de réfraction proportionnel à la racine carrée du pouvoir diélectrique du milieu, et cette relation, somme toute, ne se trouve pas très bien vérifiée.

L'Ouvrage se termine enfin par l'analyse du Mémoire de Hertz sur les équations de l'Électrodynamique pour les corps en mouvement; mais, ici, les faits observés font entièrement défaut.

Tel est, imparfaitement résumé, le nouvel Ouvrage de M. Poincaré, à la rédaction duquel M. Ch. Maurin a apporté tous ses soins.

Ce n'est assurément pas un Ouvrage de Physique pure. Aussi aurait-on tort d'y chercher une description complète des appareils ou une discussion approfondie de la précision des mesures.

Par contre, on y trouvera des indications très complètes sur la théorie des phénomènes. Les résultats définitivement acquis sont nettement mis en évidence; la plupart des faits d'ordre secondaire y sont signalés et étudiés d'après les Mémoires originaux. Dans une science comme l'Électromagnétisme dont les progrès sont, en ce moment, si importants et si rapides, un travail d'ensemble ne

saurait être définitif. Mais tous ceux qui s'intéressent à cette science, pour leurs études ou pour leurs recherches, seront reconnaissants à M. Poincaré d'avoir écrit un Livre qui est appelé à leur rendre les plus grands services. H. Abraham.

Ch. Méray, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques. Deuxième Partie : *Étude monographique des principales fonctions d'une variable.* 1 vol. gr. in-8°, xi-496 p.

La seconde Partie des *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale* de M. Méray vient de paraître, et je ne saurais trop conseiller, à tous ceux que les questions de principes, en Mathématiques, intéressent, de lire cet intéressant Volume avec soin. L'auteur, comme on sait, borne l'Analyse à l'étude des fonctions développables en séries entières, et tient à prouver que la seule considération de ces fonctions suffit dans toutes les questions qui ont quelque utilité pratique. Pour bien établir qu'en partant d'une telle notion de la fonction on pouvait parcourir, d'une façon tout à fait logique, toute la gamme de nos connaissances théoriques, M. Méray a rassemblé dans son premier Volume toutes les questions de *Théorie pure*. Il nous y a conduit, de la notion du nombre entier à la démonstration de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles, sans un exemple, sans prononcer le nom d'aucune fonction particulière autre qu'un polynome entier ou une fraction rationnelle. Cette première Partie, d'une abstraction voulue, demande, de la part du lecteur, un grand effort d'attention, et j'ai toujours regretté que l'auteur ait fait paraître ce Volume isolément. Je suis certain qu'on aurait mieux goûté la belle ordonnance et la logique serrée de la première Partie si l'on avait eu de suite la seconde entre les mains pour pouvoir, de temps à autre, se reposer l'esprit par la lecture de quelque belle application.

Cette façon de procéder, il est vrai, a permis à M. Méray, non seulement de montrer que toutes les théories générales de l'Analyse forment un tout homogène, mais encore de déblayer le

terrain, une fois pour toutes, de tous ces théorèmes généraux, absolument indispensables, mais dont on ne retient le plus souvent que l'énoncé, pour s'en servir comme d'un outil tout prêt à façonner quelque nouvelle proposition. En y réfléchissant bien, je me demande même s'il eût été possible de suivre une autre voie, en restant dans l'ordre des idées de M. Méray. Ainsi, par exemple, *pour nous*, une relation entre trois variables u, x, y définit une fonction implicite de x et y, car c'est au fond la définition même de la fonction. Pour M. Méray, il n'en est plus ainsi, et, étant donnée une relation olotrope

$$f(x, y, u) = 0,$$

il s'agit de démontrer qu'il existe une *série entière u* convergente, vérifiant cette égalité. Or, cette démonstration, sous sa forme la plus générale, est loin d'être aisée et, au fond, touche de très près à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Ainsi débarrassé de toutes les questions générales, dans le premier Volume, l'auteur aborde, dans cette seconde Partie, l'étude monographique des principales fonctions d'une variable : les fonctions algébriques et les transcendantes les plus simples.

Le premier Chapitre est un complément à l'étude des polynomes entiers et des fonctions olotropes ([1]) d'une variable *réelle*. Il contient les théorèmes sur l'étude de la variation d'une fonction d'une variable réelle au moyen de la dérivée. Je citerai tout particulièrement une belle démonstration du théorème de Dalembert. M. Méray montre non seulement l'existence des racines d'une équation entière, mais donne encore le moyen de les calculer. Dégagée, comme elle l'est, de tous les préliminaires, qui se trouvent dans la première Partie, cette démonstration est fort simple, mais non *élémentaire*, puisqu'elle s'appuie sur l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dx} = F(u).$$

Dans le second Chapitre, l'auteur définit les fonctions *méro-*

([1]) Je rappelle que M. Méray appelle fonction *olotrope* ce que nous appelons une fonction *holomorphe*, *régulière* ou encore *développable*.

morphes (dont les plus simples sont les fractions rationnelles). Il étudie leurs propriétés et leurs analogies avec les fractions rationnelles, et établit le beau théorème, bien connu, que toute fonction *indéfiniment* méromorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles est une fraction rationnelle. Ce Chapitre se termine par un exposé très détaillé des principes du calcul des résidus. Le calcul des résidus n'est plus à la mode, on se contente d'ordinaire du théorème fondamental de Cauchy, qui donne l'intégrale d'une fonction méromorphe, prise le long d'un contour fermé. M. Méray lui-même ne paraît pas tenir, outre mesure, à tous ces détails un peu secondaires.

Avec le troisième Chapitre, commence l'étude monographique proprement dite des fonctions d'une variable. La *fonction radicale simple*, définie par la relation

$$u^m - x^n = 0,$$

est évidemment la fonction implicite algébrique la plus simple, et c'est aussi la première que l'auteur étudie. Au fond, c'est la définition et l'étude de la fonction x^μ (même lorsque μ est imaginaire) qui font l'objet de ce Chapitre. D'ordinaire, pour définir de la façon la plus générale x^μ, on pose, par définition,

$$x^\mu = e^{\mu \,\mathrm{L}x}.$$

On passe donc par l'intermédiaire de deux transcendantes, l'exponentielle et le logarithme, pour définir une puissance. Au point de vue pratique, ce procédé permet de déduire rapidement les propriétés de la puissance des propriétés des fonctions composantes e^z et $\mathrm{L}z$, on va ainsi plus vite ; mais, au point de vue philosophique et didactique, il est regrettable d'avoir à passer par de pareils intermédiaires pour définir la fonction réputée la plus simple, x^μ. M. Méray, qui a en horreur tous les chemins détournés, rejette résolument ce moyen artificiel et attaque la question de front. Je m'empresse de dire que l'auteur a vaincu la difficulté avec une virtuosité admirable, et que ce Chapitre III est un des plus beaux Chapitres du Livre. La théorie générale des fonctions implicites donne immédiatement le développement de la fonc-

tion u, à partir des valeurs initiales x_i et u_i :

$$u = u_i + \mu \frac{u_i}{x_i} \frac{x - x_i}{1} + \ldots + \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - k + 1) \frac{u_i}{x_i^k} \frac{(x - x_i)^k}{k!} + \ldots,$$

où l'on a posé $\mu = \frac{n}{m}$; et il est tout naturel de ramener de suite le cas général au cas particulier de $u_i = 1$, $x_i = 1$. On considère alors la *pseudo-fonction* $\psi(\mu, x)$ qui n'est que le prolongement de la fonction u à partir des valeurs initiales $u_i = 1$, $x_i = 1$. Si maintenant, dans le développement de $\psi(\mu, x)$, abstraction faite de son origine, on donne à μ des valeurs imaginaires, on arrive ainsi directement à la définition générale de x^μ. A vrai dire, M. Méray ne nous dit jamais qu'il a défini x^μ, et il conserve jusqu'au bout la notation $\psi(\mu, x)$. Je ne sais pas trop pourquoi, et il me semble que ce Chapitre n'aurait pu que gagner en limpidité, quoique déjà très clair, si l'auteur nous avait dit, ne fût-ce que par un mot, que toutes les propriétés de $\psi(\mu, x)$, qu'il établit avec tant d'élégance, ne sont au fond que l'extension, au cas de μ imaginaire, des propriétés ordinaires d'une puissance à exposant réel et entier. Ainsi, par exemple, il établit sous des conditions restrictives bien définies, les égalités

$$\psi(\mu, x'^{k'} x''^{k''}) = [\psi(\mu, x')]^{k'} [\psi(\mu, x'')]^{k''},$$
$$\psi(k_1\mu_1 + k_2\mu_2, x) = [\psi(\mu_1 x)]^{k_1} [\psi(\mu_2 x)]^{k_2},$$
$$\psi[\mu', \psi(\mu, x)] = \psi(\mu\mu', x),$$

qui ne sont que les extensions des égalités connues

$$(x'^{k'} x''^{k''})^\mu = (x'^k)^{k'} (x''^\mu)^{k''},$$
$$(x)^{k_1\mu_1 + k_2\mu_2} = (x^{\mu_1})^{k_1} (x^{\mu_2})^{k_2},$$
$$(x^\mu)^{\mu'} = x^{\mu\mu'},$$

et qui découlent fort simplement des propriétés mêmes du développement de $\psi(\mu, x)$.

En tout point du plan, qui sert à la notation graphique de la variable x, la fonction u a plusieurs valeurs qui sont données, en fonction de l'une d'elles, U, par la formule

$$U^{(\pm k)} = \Phi^{\pm k} U,$$

où Φ désigne un facteur numérique qui ne dépend que de μ. Ici se

présentait une petite difficulté. Pour faire une étude complète des valeurs de ce facteur $\Phi(\mu)$ et de la fonction $\psi(\mu, x)$, il restait à étudier ce que d'ordinaire nous appelons l'*argument* d'une telle quantité. Pour M. Méray, la Trigonométrie élémentaire doit être bannie de l'Analyse, car la définition élémentaire de $\sin x$ définit cette fonction en faisant correspondre à chaque arc x une quantité bien déterminée et non pas une *série entière;* il ne nous parlera donc des fonctions circulaires qu'en donnant leurs développements et après l'exponentielle et le logarithme, qui ont une origine plus simple, et auxquelles elles se ramènent, au fond. En conséquence, nous n'entendons pas parler de l'argument d'une quantité imaginaire. Pour tourner la difficulté, l'auteur substitue ingénieusement, à la notion d'argument, celle de *pente* d'une imaginaire. La *pente* de l'imaginaire $a + bi$ est le quotient $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire la tangente trigonométrique de ce que nous nommons l'*argument*. A l'aide de cette nouvelle quantité, on étudie facilement les propriétés de $\Phi(\mu)$, qui conduisent à la résolution de l'équation binome $x^m - 1 = 0$, dont les racines sont

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi\left(\frac{1}{m}\right), \quad \ldots, \quad \Phi\left(\frac{m-1}{m}\right).$$

Dans le quatrième Chapitre, l'auteur étudie les *phases critiques* des fonctions implicites. La méthode suivie est celle des coefficients indéterminés et a des analogies avec la méthode de Puiseux; mais M. Méray, toujours porté vers les généralisations, au lieu de se borner, comme Puiseux, à l'étude des fonctions algébriques, étudie d'une façon plus générale les fonctions implicites u définies par une relation de la forme

$$f(x, u) = 0, \tag{1}$$

où $f(x, u)$ est olotrope en x et u. La théorie générale des fonctions implicites montre qu'au voisinage de tout couple $x = x_0$, $u = u_0$ vérifiant la relation (1) et n'annulant pas $\frac{\partial f}{\partial u}$, la relation (1) définit une fonction olotrope de x qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $u = u_0$. Les points critiques sont donc les couples de valeurs pour lesquels l'égalité (1) est vérifiée en même temps que

l'égalité

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = 0.$$

Le cas général se ramène évidemment au cas où $u_0 = 0$, $x_0 = 0$, en posant $u = u_0 + u'$, $x = x_0 + x'$. M. Méray étudie d'abord les racines olotropes. Pratiquement, il est ramené à représenter, comme Puiseux, tout terme $u^m x^n$ de $f(x, u)$ par un point (*jalon*) de coordonnées m et n, puis à former le polygone ouvert enveloppant les jalons. Tout côté de ce polygone dont le coefficient angulaire est entier fournit une racine olotrope. Il montre ensuite qu'on peut déterminer un entier p tel qu'en remplaçant, dans (1), x par ξ^p, la nouvelle équation n'ait que des racines olotropes au voisinage de $\xi = 0$, $u = 0$. Ceci revient à montrer que le nouveau polygone enveloppant les jalons n'a, pour un choix convenable de p, que des côtés dont les coefficients angulaires sont entiers. On déduit de là les développements des diverses racines et leurs groupements en groupes se permutant circulairement autour de $x = 0$.

C'est au Chapitre V que commence l'étude des transcendantes les plus simples. Pour l'auteur, toute transcendante *peut être considérée comme le résultat, prochain ou éloigné, d'intégrations exécutées sur des expressions de nature auparavant connue;* en conséquence, il définit de cette façon le logarithme, l'exponentielle, les fonctions circulaires et les fonctions elliptiques.

L'intégration des fractions rationnelles conduit à la notion du logarithme, de l'exponentielle, de $\tang x$ et de $\cot x$. Le logarithme est défini par l'égalité

$$\mathrm{L}x = \int_0^x \frac{dx}{x}$$

et la fonction inverse est l'exponentielle e^x. La manière d'étudier ainsi ces deux fonctions, ainsi que $\tang x$ et $\cot x$, en posant, par définition,

$$\operatorname{arc\,tang} x = \int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1},$$

est trop connue pour que je m'y attarde. Je me contente de signaler, en passant, une nouvelle expression heureuse : M. Méray emploie,

pour désigner ce que nous appelons ordinairement la *période* de $Lx(2i\pi)$, l'expression *augment*, qui évite ainsi toute confusion entre les fonctions périodiques et leurs inverses, telles que le logarithme.

Avant d'attaquer les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, l'auteur traite rapidement la réduction générale de l'intégrale hyperelliptique

$$\int f[x, \sqrt{\varphi(x)}]\,dx$$

aux intégrales normales des trois espèces, et montre que les deux cas où le polynome $\varphi(x)$ est de degré $2n$ ou $2n-1$ se ramènent l'un à l'autre. Les fonctions circulaires sont alors celles qui proviennent du cas de $n=1$.

Le Chapitre VII mérite une mention spéciale. Il débute par des généralités sur les fonctions unipériodiques, qui montrent l'analogie de la théorie de ces fonctions avec celle des fonctions bipériodiques et préparent l'étude de ces dernières. On néglige souvent, dans les traités d'Analyse, l'étude des fonctions unipériodiques, et cependant elle présente, à certains égards, des difficultés qui n'existent pas dans l'étude des fonctions bipériodiques et est pleine d'intérêt. Le plan, qui sert à la notation graphique de la variable x, peut être découpé en bandes parallèles (bandes élémentaires) telles qu'il suffit d'étudier la fonction unipériodique dans une telle bande, car elle reprend périodiquement les mêmes valeurs quand x passe d'une bande à l'autre. M. Méray définit alors les fonctions unipériodiques *polarisées*.

Une fonction unipériodique est dite *polarisée* avec les *valeurs polaires* u_+ et u_- si, lorsque x s'éloigne indéfiniment le long du bord d'une bande *quelconque*, la valeur de la fonction tend vers la limite u_+ ou u_- suivant que x s'éloigne dans une direction (*boréale*) dans l'autre (*australe*). Les fonctions unipériodiques polarisées jouissent des mêmes propriétés que les fonctions bipériodiques. Toute fonction unipériodique polarisée, indéfiniment méromorphe, n'a qu'un nombre limité de zéros et de pôles dans chaque bande et s'exprime rationnellement en $e^{\frac{2\pi i x}{\Pi}}$, Π étant sa période.

Le développement des fonctions unipériodiques méromorphes

polarisées, en sommes, se fait au moyen des fonctions

$$\xi_i(x) = \sum_{m=-k}^{m=+k} \frac{1}{(x - m\Pi)^i} \qquad (k = \infty),$$

qui sont unipériodiques, polarisées et jouent, par rapport aux fonctions unipériodiques, le rôle d'éléments simples analogue à celui des fractions $\frac{1}{(x-a)^p}$, par rapport aux fractions rationnelles. L'application aux fonctions circulaires donne les formules connues

$$\cot x = \xi_1(x, \pi), \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \xi_2(x, \pi),$$

$$\frac{1}{\sin x} = \xi_1(x, 2\pi) - \xi_1(x - \pi, 2\pi).$$

La décomposition des fonctions circulaires en produits infinis se fait ensuite par l'intermédiaire de la fonction

$$o(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\Pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\Pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2\Pi^2}\right)\cdots,$$

liée à $\xi_1(x)$ par la relation

$$\frac{o'(x)}{o(x)} = \xi_1(x).$$

Toute fonction méromorphe, unipériodique, polarisée, admettant les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_g$ et les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma$ dans une bande élémentaire, peut être mise sous la forme

$$f(x) = \mathrm{K}e^{m\frac{\pi i}{\Pi}x} \frac{[o(x-a_1)]^{m_1}[o(x-a_2)]^{m_2}\ldots[o(x-a_g)]^{m_g}}{[o(x-\alpha_1)]^{\mu_1}[o(x-\alpha_2)]^{\mu_2}\ldots[o(x-\alpha_\gamma)]^{\mu_\gamma}}.$$

En particulier, pour $\Pi = \pi$, on a

$$\sin x = o(x).$$

L'étude des fonctions elliptiques et, plus généralement, des fonctions bipériodiques fait l'objet des Chapitres VIII à XII. L'inversion de l'intégrale de première espèce

$$x = \int \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}}$$

fournit l'exemple de la première fonction bipériodique $E(x)$. a, b, c, d sont ce que M. Méray appelle les *valeurs cardinales* de la fonction $E(x)$. Dans le cas où le polynome sous le radical est du troisième degré, la quatrième valeur cardinale est l'∞ et, à cause de cela, la fonction est désignée par $E_\infty(x)$. Au fond, cette fonction $E_\infty(x)$, avec, en plus, la restriction que la somme des trois valeurs cardinales finies est nulle, est la fonction canonique $p(x)$ de M. Weierstrass.

Je signale de suite une démonstration remarquablement simple du fait que le rapport des deux périodes est imaginaire, fait qui établit la double périodicité *effective*. Puis, après avoir indiqué les principales propriétés des fonctions $E(x)$ et avoir ainsi donné à ses lecteurs un exemple palpable de fonction bipériodique, M. Méray étudie les propriétés générales des fonctions bipériodiques, déduites directement de l'hypothèse de la double périodicité. Pour étudier une telle fonction, il suffit de l'étudier lorsque la variable x reste à l'intérieur du parallélogramme (*maille*) élémentaire construit sur les périodes. Une fonction bipériodique méromorphe a un nombre fini de zéros à l'intérieur d'une maille et la somme des degrés de multiplicité de ces zéros est l'*ordre* m de la fonction (cet ordre m ne peut être inférieur à 2). Toute fonction bipériodique méromorphe satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^m + P_1\left(\frac{du}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + P_m = 0,$$

où m est l'ordre de la fonction et $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des polynomes entiers en u, P_{m-1} étant identiquement nul.

De même que les fonctions unipériodiques polarisées, les fonctions bipériodiques se développent en sommes d'éléments simples et en produits. Ici les éléments simples sont les fonctions suivantes :

$$\Xi_i(x) = \lim \Sigma\Sigma \frac{1}{[x - m\text{H} - n\Omega]^i},$$

le second membre étant une somme quadruplement infinie obtenue en donnant à m et n toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Lorsque $i \geqq 3$, il n'y a aucune difficulté ; mais, pour les cas de

$i=1$ et $i=2$, les sommes ne sont convergentes que si l'on groupe d'*une façon convenable* les termes, et encore la somme n'est pas la même suivant la manière dont on fait le groupement. On définit ainsi plusieurs fonctions $\Xi_1(x)$ et $\Xi_2(x)$. Il y a là une véritable difficulté et M. Méray, au lieu de la masquer, ce qui eût été facile, l'a, au contraire, bien mise en lumière et y a trouvé une occasion pour faire une jolie étude de séries quadruplement infinies. Les fonctions $\Xi_i(x)$ sont doublement périodiques pour $i \geq 2$, et $\Xi_1(x)$ ne peut jamais être bipériodique; mais, en choisissant convenablement la manière de sommer la série, on peut obtenir une fonction ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ qui admet la période Π.

Pour les développements des fonctions bipériodiques en produits, on emploie les fonctions

$$\mathrm{O}(x) = \Pi\Pi\left(1 - \frac{x}{m\Pi + n\Omega}\right),$$

où le second membre est un produit quadruplement infini. Chaque fonction $\mathrm{O}(x)$ est liée à une fonction $\Xi_1(x)$ par la relation

$$\frac{\mathrm{O}'(x)}{\mathrm{O}(x)} = \Xi_1(x),$$

et, ainsi, on a une théorie toute parallèle à celle du développement des fonctions unipériodiques polarisées. A la fonction ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ correspond la fonction ${}^{(\Pi)}\mathrm{O}(x)$, qui n'est au fond que la fonction $\theta_1(x)$ de Briot et Bouquet, et ainsi M. Méray, par une voie toute différente, peut-être plus brève et en tous cas très élégante, établit une grande partie des formules que l'on peut trouver dans le beau Traité des fonctions elliptiques de Briot et Bouquet : les développements des fonctions bipériodiques en séries trigonométriques, en produits, en séries doublement infinies d'exponentielles, etc....

Après ces généralités sur les fonctions bipériodiques, l'auteur revient aux fonctions les plus simples, celles du second ordre, les fonctions $\mathrm{E}(x)$ et $\mathrm{E}_\infty(x)$. Il établit la formule générale d'addition déduite de la relation générale qui peut exister entre deux fonctions du second ordre ayant les mêmes périodes élémentaires, puis pose, d'une façon très nette, le problème général de la transformation. Les dimensions restreintes de l'Ouvrage ne permettent

pas à M. Méray d'aborder la question si vaste de la transformation dans toute sa généralité, et il se borne à une étude complète de la transformation qu'il nomme *primaire*.

Une transformation est *primaire* lorsque les deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ sont liées homographiquement, et l'on arrive assez facilement à la conclusion que ceci ne peut avoir lieu que si l'on a

$$f_1(x) = f(x + \Gamma),$$

Γ ayant une des quatre valeurs $0, \frac{\Pi}{2}, \frac{\Omega}{2}, \frac{\Pi + \Omega}{2}$; Π et Ω étant les périodes élémentaires communes à $f(x)$ et $f_1(x)$. On en conclut qu'il existe une relation de la forme

$$\alpha f(x) f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) + \beta \left[f(x) + f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right)\right] + \gamma = 0.$$

et les coefficients α, β, γ se calculent, au moyen des valeurs cardinales a, b, c, d de $f(x)$, par les relations

$$\alpha ab + \beta(a + b) + \gamma = 0,$$
$$\alpha cd + \beta(c + d) + \gamma = 0.$$

C'est en recherchant la fonction $f(x)$ pour laquelle la transformation primaire, relative à Ω, prend la forme simple

$$f(x) + f\left(x + \frac{\Omega}{2}\right) = 0,$$

que M. Méray arrive, enfin, à définir la fonction canonique de Jacobi $\operatorname{sn} x$. Il donne les formules principales de cette fonction et indique sommairement les trois autres fonctions $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, $\operatorname{tn} x$. Je me demande pourquoi l'auteur est resté muet sur les fonctions canoniques de M. Weierstrass. Lorsqu'il a parlé de la fonction $E_\infty(x)$, il lui eût été facile de la particulariser un peu et de dire quelques mots au moins de la fonction $p(x)$. Ces fonctions sont devenues d'un usage si courant, qu'on ne peut plus les ignorer.

Ce n'est là, il est vrai, qu'une bien petite lacune, qui tient peut-être à l'exiguïté de l'espace dont dispose M. Méray, et je la signale avec regret, car j'aurais bien voulu pouvoir terminer cette courte analyse sans la moindre observation, tant j'ai de respectueuse

sympathie et d'admiration pour le talent et l'œuvre de l'éminent professeur de la faculté de Dijon.

Le Chapitre XIII, qui termine ce second Volume, contient les définitions et les principales propriétés des fonctions eulériennes $B(p, q)$ et $\Gamma(p)$, exposées d'une façon qui ne diffère pas sensiblement de celles qui ont cours. C. BOURLET.

FORMULES ET PROPOSITIONS POUR L'EMPLOI DES FONCTIONS ELLIPTIQUES D'APRÈS DES LEÇONS ET DES NOTES MANUSCRITES DE M. WEIERSTRASS. — Ouvrage traduit de l'allemand par M. Padé. Première Partie (feuilles 1-12). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.

Le *Bulletin* a annoncé, et tous ceux qui s'intéressent aux Mathématiques connaissent certainement les *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwarz. L'édition française que publie M. Padé, rendra des services particuliers aux mathématiciens français. On sait assez quelle sécurité on peut avoir avec M. Schwarz et le soin scrupuleux qu'il a apporté à la confection de son œuvre; pour cette raison même, le lecteur nous saura gré sans doute de donner ici la liste de quelques fautes (très probablement les seules) qui s'y trouvent; c'est à la bienveillance de M. Schwarz lui-même que nous devons cette liste; à vrai dire, la première faute seule mériterait d'être signalée, et c'est M. Schwarz lui-même qui l'a découverte.

Page 31, ligne 4 (en descendant) : *Après le mot* « quelconques » *ajouter la restriction :* « Il faut attribuer au radical $\sqrt{e_1 - e_3}$ la valeur $\frac{\sigma_3 \omega}{\sigma \omega}$, les deux entiers p et q sont soumis à la condition que les deux nombres $4p + 1$ et q soient premiers entre eux. »

Page 35, ligne 6 (en montant), *au lieu de* $v + \frac{1}{2} + \tau$, *lire* $v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau$.

Page 39, ligne 2 (en montant), *au lieu de* $\sqrt[4]{e_\lambda} - e_\mu$, *lire* $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$.

Page 46, ligne 4 en descendant, *au lieu de* $-\frac{1}{\tau}$ *lire* $-\frac{1}{\tau} = \tau_1$.

J. T.

BARBERA (L.). — TEORICA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DUPLE, preceduta da un discorso preliminare sul giudizio fattone dai calcolatori lincei, e sopra una recensione del prof. *H.-A. Schwarz*. Bologne, Cenerelli, 1895.

L'auteur est professeur de Philosophie à l'Université de Bologne et, sans doute, dans notre pays, peu de professeurs de Philosophie seraient capables d'aborder la théorie des solutions singulières des équations différentielles. M. Barbera l'a-t-il fait avec succès? C'est un point qu'il discute avec abondance dans son discours préliminaire, qui ne contient pas moins de cent vingt-neuf pages, tandis que son Mémoire n'en contient pas cinquante. Il est vrai que M. Barbera avait affaire à forte partie, à l'Académie royale des Lincei en général et à M. Schwarz en particulier, qui n'ont pas émis sur ce Mémoire un jugement conforme à l'opinion de l'auteur. Le *Bulletin* n'a pas la prétention de reviser ce jugement.

RESAL (H.). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE, comprenant les leçons professées à l'École Polytechnique. Deuxième édition, entièrement refondue, t. I, v-295 p.; t. II, v-162 p. In-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1895.

Depuis l'époque où a paru la première édition de cet Ouvrage si apprécié, bien des résultats intéressants ont été obtenus dans le domaine de la Mécanique. Il est vrai qu'après la publication des six Volumes composant son Traité, M. Resal avait comblé une partie des lacunes qui s'étaient produites dans le tome VII et dernier de sa première édition, consacré tout entier à des développements complémentaires. Néanmoins, il est bien évident que tous les lecteurs de M. Resal feront bon accueil à la nouvelle édition, qui constitue à bien des égards un Ouvrage nouveau.

Ces deux premiers Volumes de la nouvelle édition traitent de la Cinématique, des théorèmes généraux de la Mécanique, de l'équilibre et du mouvement des corps solides pour ce qui concerne la Mécanique rationnelle et du mouvement des solides, eu égard aux frottements, de l'Élasticité, de l'Hydrostatique, de l'Hydrodynamique et de l'Hydraulique pour ce qui concerne la

Mécanique appliquée. M. Resal s'est borné, pour ce qui concerne la Thermodynamique, à renvoyer à l'exposition qu'il avait donnée des principes de cette Science dans le tome II de son *Traité de Physique mathématique*. Sous sa forme nouvelle, le *Traité de Mécanique générale* continuera à être consulté et étudié avec grand profit aussi bien par les théoriciens que par les ingénieurs.

G. D.

H.-G. ZEUTHEN. — Notes sur l'histoire des Mathématiques (Extraits du *Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, 1893 et 1895).

M. Zeuthen a commencé à publier une série de *Notes* en français sur divers points de l'histoire des Mathématiques. J'appelle en particulier l'attention sur les trois qui ont paru en cette année 1895.

La première, *Sur les quadratures avant le Calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat*, contient notamment une étude approfondie des procédés du géomètre de Toulouse; la seconde, *Sur le fondement mathématique de l'invention du Calcul infinitésimal*, est surtout consacrée aux travaux de Newton, que M. Zeuthen s'attache à relever; la troisième, *Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton*, est destinée à défendre le grand Anglais contre le reproche de certaines fautes qui lui ont été attribuées, en particulier par Weissenborn (*Die Principien der höheren Analysis*, Halle, 1856).

Cette dernière Note surtout a un caractère polémique, mais, dans les autres également, M. Zeuthen ne s'abstient pas de prendre à partie les auteurs dont les appréciations diffèrent des siennes. Je n'entrerai pas dans le détail de ces controverses, qu'il ne s'agit pas de prendre au tragique, mais qui ont en tout cas l'avantage de provoquer à une réflexion approfondie sur des points parfois assez délicats. Je me contenterai de dire qu'en ce qui concerne les reproches de fautes adressées à Newton, M. Zeuthen m'a personnellement convaincu qu'ils reposent à peu près exclusivement sur des méprises, alors que, par un préjugé de

longue date (¹), je croyais à la réalité de ces fautes et aurais plutôt été tenté de croire que M. Cantor, dans ses *Vorlesungen*, n'avait pas suffisamment insisté sur leur gravité.

Mais je préfère saisir cette occasion pour présenter quelques observations sur les origines du Calcul infinitésimal. M. Zeuthen rappelle qu'ici même (1894, p. 232) j'ai indiqué, comme le véritable point de départ de la fondation de ce calcul, la découverte du caractère inverse des opérations que, dès la génération antérieure, on savait effectuer pour résoudre les problèmes des tangentes et les problèmes de quadratures. En déclarant qu'il partage la même opinion, M. Zeuthen ajoute sur la même ligne l'usage des séries infinies.

Pour bien comprendre le rôle capital joué par l'emploi des séries, il suffit, en effet, de se demander comment il peut se faire que Fermat, également maître en quadratures et en tracé des tangentes, n'ait nulle part laissé soupçonner qu'il eût la moindre idée de la relation entre les deux problèmes.

Notez que cette relation a été sans aucun doute reconnue en France bien avant Newton. Dans une lettre à Florimond de Beaune (²), du 20 février 1639, Descartes dit :

« Pour vos lignes courbes, la propriété dont vous m'envoyez la démonstration me paroît si belle, que je la préfère à la quadrature de la parabole trouvée par Archimède. Car il examinoit une ligne donnée, tandis que vous déterminez l'espace contenu dans une qui n'est pas encore donnée. »

Si l'on ignore absolument quelle était cette première des quatre courbes dont Beaune avait parlé à Descartes, il ne m'en paraît pas moins certain que la phrase ci-dessus ne peut recevoir qu'une interprétation; Beaune s'était donné l'aire d'une courbe en fonction de l'abscisse et en avait déduit la relation entre

(¹) Il remontait aux leçons de Duhamel, que j'ai entendues à l'École Polytechnique; ceci peut prouver en tous cas que l'opinion de Weissenborn n'était nullement isolée, et que la réfutation de M. Zeuthen était d'autant plus utile.

(²) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, t. III, nº 71. Ce tome a été édité en 1667, c'est-à-dire à une date à laquelle Newton était déjà en possession de sa méthode des fluxions; mais Beaune a eu sans doute d'autres confidents que Descartes.

l'abscisse et l'ordonnée, par une méthode identique à celle des tangentes.

Descartes continue en effet : « Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver généralement la converse de ma règle pour les tangentes, ni de celle dont se sert M. de Fermat non plus, bien que la pratique en soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne. Mais on en peut déduire *a posteriori* des théorèmes, qui s'étendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par une équation en laquelle l'une des deux quantités x ou y n'ait point plus de deux dimensions, encore que l'autre en est mille, et je les ai trouvés presque tous en cherchant ci-devant votre deuxième ligne courbe, mais pour ce que je ne les écrivois que sur des brouillons que je n'ai pas gardés, je ne vous les puis envoyer. »

Ainsi voilà Descartes en pleine possession du principe du Calcul infinitésimal. Avec son génie pour les notations, qui peut douter qu'il aurait fondé ce calcul dès 1639, s'il avait trouvé à propos de s'occuper un peu plus sérieusement de la question? Mais comment a-t-il pu la négliger?

Nous savons quelles étaient la deuxième et la troisième courbe de Beaune, qu'il avait définies par une propriété de la tangente. Descartes ramène le problème dans les deux cas à trouver la fonction primitive de $\frac{1}{x}$; il prouve que cette fonction n'est point algébrique, *enferme chacune de ses valeurs pour x rationel entre deux séries limitées* (divergentes si on les prolongeait indéfiniment), enfin définit la fonction par le mouvement, ainsi que Napier l'avait fait. Mais croie le contraire qui voudra, je ne puis penser que Descartes ignorât l'invention des logarithmes, et je vois même dans cette lettre une preuve suffisante qu'il avait lu la *Constructio*.

Là est, je crois, la clef de l'énigme : Fermat, aussi bien que Descartes ou que Roberval, connaissait les logarithmes; mais cette fonction considérée seulement comme tabulaire, ou comme mécanique, n'ayant aucune représentation explicite, fût-ce sous forme infinie, ne leur paraissait pas susceptible d'être admise dans l'Algèbre, uniquement réservée, d'un commun accord, aux relations exprimables sous formes rationelles entières. Même difficulté pour les fonctions circulaires; elles sont bien connues, mais on

dirait que l'algébriste ignore leurs représentations symboliques, admises seulement en Trigonométrie, car ses représentations concernent la forme tabulaire, et s'il s'agit de la définition géométrique, on préfère introduire nettement les lignes d'une figure.

Ainsi les maîtres français se trouvaient dans une impasse; Fermat et les autres savaient très bien, ne l'eussent-ils reconnu qu'empiriquement, que les procédés des méthodes des tangentes et de celles des quadratures donnaient des résultats inverses; aucun ne l'a dit explicitement; si l'un d'eux a reconnu théoriquement la raison de cette relation inverse, il a gardé le secret de sa découverte; c'est qu'en fait elle ne menait à rien pour le moment, tandis qu'on pouvait aisément pressentir son importance si l'on trouvait quelque moyen de sortir du cercle des fonctions algébriques. Avec les habitudes du temps, et alors que Newton lui-même a si longtemps laissé mûrir ses idées, on peut dès lors, je crois, s'expliquer aisément la rareté des allusions antérieures à l'arcane que chacun espère posséder seul.

Fermat, pour nous en tenir à lui, enseigne, vers 1650 ([1]), un moyen détourné, mais au fond très suffisant, pour traiter, dans les questions de tangentes, les relations compliquées d'irrationelles; cependant il n'en développe pas les conséquences.

Les fonctions circulaires ne l'arrêtent pas, mais il ne les traite que sur la figure. Pour le problème inverse, il remonte sans difficulté aux fonctions primitives pour tout monome, à exposant entier ou fractionnaire, positif ou négatif ([2]) (sauf l'exception de la fonction logarithmique). Il sait changer de variable et intégrer par parties; il traite des radicaux assez compliqués et aussi bien dès lors des fonctions circulaires, ramenées à la forme algébrique par le choix de la variable. Mais il n'exprime les fonctions primitives, dans le cas où elles sont circulaires, qu'en montrant comment le problème se ramène à la rectification de l'arc de cercle, absolument comme, avant l'invention des fonctions elliptiques, on

---

([1]) *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 153; *cf*. t. II, p. 285. Il est remarquable qu'il n'ait guère fait en réalité d'applications de ce procédé, comme le montre bien ce qu'il dit en 1662 de la façon dont il a abordé le problème de la réfraction (t. II, p. 461).

([2]) Bien avant ses communications avec Wallis, quoique M. Zeuthen émette un doute à cet égard. Voir *Œuvres de Fermat*, t. II, p. 338, Note.

ne pouvait que ramener telle intégrale à la rectification de l'arc d'ellipse ([1]).

Ainsi ce qui lui fait défaut pour aller plus loin, c'est moins l'invention d'une notation dont il saurait se passer aussi bien que le fit plus tard Huygens, c'est l'introduction de nouvelles fonctions. Il faut, pour le progrès, se débarrasser de la conception géométrique concrète, mais pour cela il est nécessaire de définir analytiquement les fonctions à introduire.

Or cela ne pouvait être fait qu'au moyen de l'emploi de séries infinies, et c'est là sans aucun conteste une invention due à l'Angleterre. Le premier précurseur de Newton, avant Mercator, y avait d'ailleurs été Wallis, quoiqu'il ait suivi une voie divergente. Mais Newton fut en tout cas le grand maître, celui qui montra toutes les ressources de l'invention; et même une fois connue sur le continent, elle resta le domaine propre des géomètres anglais, jusqu'à Taylor et Maclaurin.

Nous pouvons certainement concevoir aujourd'hui la notation de Leibniz développée et appliquée sans l'emploi des séries, mais au XVIIe siècle la chose n'était pas possible, parce que le concept général de fonction faisait défaut, et qu'il ne pouvait s'introduire tant que les relations non algébriques ne pouvaient être figurées que géométriquement ou mécaniquement.

En résumé, il y a entre l'invention des séries et celle du Calcul infinitésimal une relation historique étroite, qui justifie amplement l'opinion de M. Zeuthen que j'ai mentionnée plus haut. Mais c'est dans la première que je mettrais surtout le principal titre de gloire de Newton; la reconnaissance de la relation inverse entre le problème des tangentes et celui des quadratures, que M. Zeuthen lui attribue également, était au moins depuis vingt-cinq ans une idée dans l'air, et Leibniz, le véritable héritier des grands géomètres français, l'a très probablement recueillie à Paris; cela ne peut d'ailleurs non plus en rien rabaisser son génie, si merveilleusement doué pour la symbolisation. PAUL TANNERY.

([1]) Pascal l'avait déjà fait; de même Fermat ramène la rectification de courbes à celle d'arcs de paraboles (*Œuvres*, t. I, p. 203, etc.).

SUR L'ÉTUDE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE AUTOUR D'UN DE SES POINTS (Extrait d'une lettre adressée à M. J. Tannery);

PAR M. E. VESSIOT.

Je pose le problème ainsi : *Étant donnée, en un point* O *d'une courbe algébrique, l'une des tangentes à la courbe en ce point, reconnaître combien il y a de rayons curvilignes réels de la courbe tangents à cette tangente, en* O, *et comment ces rayons sont placés par rapport au point* O *et à la tangente considérée.*

Supposant l'origine transportée au point O, et $y - mx = 0$ étant l'équation de la tangente considérée, je pose $y = (m + \mu)x$, ce qui donne une certaine équation $\Phi(\mu, x) = 0$, et tout revient à voir combien de valeurs réelles de μ, satisfaisant à cette équation, tendent vers zéro quand x est un infiniment petit positif, puis négatif, et à étudier, dans chacun des deux cas, le signe de ces valeurs de μ.

Jusqu'ici, rien de nouveau. Mais je remarque que cette étude algébrique sera faite, si l'on peut faire, à l'origine, l'étude de la courbe $\Phi(\mu, x) = 0$. On est donc conduit à chercher les tangentes à l'origine à cette courbe et à essayer de résoudre, pour chacune d'elles, le problème énoncé plus haut. En appliquant de nouveau la même méthode à ces diverses tangentes on sera conduit à étudier, à l'origine, une ou plusieurs nouvelles courbes, et ainsi de suite.

Il est facile de voir, sur un exemple, que ce procédé peut conduire au but. Prenant, par exemple, la courbe

$$f(x, y) = y^2 + 3xy^2 - 3y(x^3 + y^3) + x^4 y + 2x^6 + x^{10} = 0,$$

et posant

$$y = \mu x,$$

il vient

$$\Phi(\mu, x) = \mu^2 + 3\mu^2 x - 3\mu x^2(1 + \mu^3) + \mu x^3 + 2x^4 + x^8 = 0$$

Posant de même

$$\mu = \mu' x.$$

il vient alors

$$\Phi_1(\mu', x) = \mu'^2 + 3\mu'^2 x - 3\mu' x(1 + \mu'^3 x^3) + \mu' x^2 + 2x^2 + x^6 = 0$$

ou

$$(\mu'^2 - 3\mu' x + 2x^2) + \ldots = 0.$$

Ici on a deux tangentes simples

$$\mu' - x = 0, \qquad \mu' - 2x = 0;$$

on en conclut facilement l'existence de valeurs de μ' de la forme

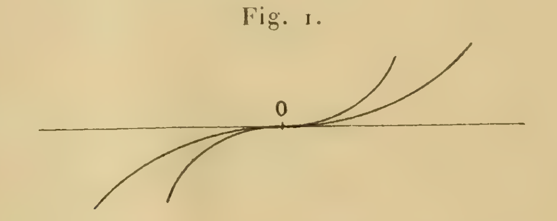
$$\mu' = (1 + \varepsilon)x,$$
$$\mu' = (2 + \varepsilon')x.$$

Donc pour y celles de valeurs de la forme

$$y = (1 + \varepsilon)x^3, \qquad y = (2 + \varepsilon')x^3.$$

D'où la figure ci-jointe pour la courbe proposée.

Fig. 1.



Je dis, de plus, que le procédé réussira toujours, c'est-à-dire qu'au bout d'un nombre limité d'opérations on sera conduit à des courbes auxiliaires ayant, à l'origine, toutes leurs tangentes distinctes. Soit, en effet,

$$f(x, y) = (y - mx)^k \psi_{p-k}(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe donnée. On a

$$\Phi(\mu, x) = \mu^k \psi_{p-k}(1, m) + \ldots.$$

Donc l'origine est un point multiple d'ordre k au plus pour la nouvelle courbe. On a donc fait un pas dans la réduction de la singularité, sauf si l'origine est pour $\Phi = 0$ un point multiple d'ordre k à tangentes toutes confondues, c'est-à-dire si l'on a, à un facteur constant près,

$$\Phi(\mu, x) = (\mu - m_1 x)^k + \overline{\varphi}_{k+1}(x, y) + \ldots = 0.$$

Mais on pose alors, d'après la méthode,

$$\mu = (m_1 + \mu_1)x,$$

et il vient

$$\Phi_1(\mu_1, x) = \mu_1^k + \ldots = 0,$$

et l'on a fait un pas dans la réduction, à moins que de nouveau

$$\Phi_1(\mu_1, x) = (\mu_1 - m_2 x)^k + \varphi_{k+1}(x, y) + \ldots = 0,$$

et ainsi de suite. Supposons que l'on arrive toujours, en continuant, si grand que soit q, à

$$\Phi_q(\mu_q, x) = (\mu_q - m_{q+1}x)^k + \ldots = 0.$$

On a

$$y = (m + \mu)x, \qquad \mu = (m_1 + \mu_1)x, \qquad \ldots, \qquad \mu_{q-1} = (m_q + \mu_q)x,$$

donc

$$y = mx + m_1 x^2 + m_2 x^3 + \ldots + (m_q + \mu_q)x^{q+1},$$

et cette formule représente toujours k racines de l'équation proposée $f(x, y) = 0$, μ_q y ayant les k valeurs infiniment petites données par $\Phi_q(\mu_q, x) = 0$. La différence de deux de ces valeurs de y est donc d'ordre plus grand que tout ordre donné, c'est-à-dire que $f(x, y) = 0$ a, quel que soit x, k racines égales en y, cas que l'on peut écarter (¹).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Cayley (A.). — *An elementary treatise on elliptic functions.* 2ᵉ édition. In-8°, 390 p. London, Bell et Son. 15 sh.

(¹) M. Andoyer m'avait indiqué un procédé tout semblable à celui qu'on vient de lire, qui d'ailleurs peut être regardé comme une particularisation d'une méthode développée par M. Weierstrass; la marche indiquée par M. Vessiot se recommande, au point de vue de l'enseignement, par sa simplicité et son caractère pratique. J. T.

Genaille (H.). — *Le Calculateur Henri Genaille.* In-8°, 5 p. avec fig. Paris, impr. Chaix.

Weierstrass (K.). — *Mathematische Werke,* herausgeg. von d. kgl. Akademie d. Wissenschaften. 2 Bd. Abhandlungen. II. Gr. in-4°, VI-362 p. Berlin, Mayer et Müller. 21 m., relié 24 m.

Cayley (A.). — *Collected mathematical papers.* 10 vols. t. VIII. In-4°. Cambridge, University Press. 25 sh.

Grassmann (R.). — *Die Formenlehre der Mathematik in strenger Formelentwickelung.* 4 Thle. in 1 Bande, nebst Formelbuch. Gr. in-8°, avec fig. Stettin, Grassman. 10 m.

Kronecker's (L.) Werke. — Herausgegeben auf Veranlassung der königl. preuss. Akad d. Wissensch. von K. Hensel. 1 Bd. Gr. in-4°, IX-483 pages, avec portrait. Leipzig, Teubner. 28 m.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. — Nos 60, 61. In-8°. Leipzig, Engelmann.

Plucker's (J.) Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. — Im Auftrag der königl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen herausgeg. von A. Schönflies u. F. Pockels. In 2 Bänden. 1 Bd. Gesammelte mathemat. Abhandlgn. Herausgeg. von A. Schoenfliess. Gr. In-8°, XXXV-620 p. avec portrait et 73 fig. Leipzig, Teubner. 20 m.

Saintignon (F. de). — *Nouvelle théorie des marées. Le mouvement différentiel.* In-4°, 133 p. avec 8 pl. Nancy, Berger-Levrault et Cie. 6 fr.

Serres (E.). — *Méthode chronométrique pratique.* In-8°, 32 p. avec fig. Paris, Imp. nationale.

Sievert (H.). — *Ueber Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen.* 2. Thl. Progr. 36 p. Bayreuth, Giessel. 75 pf.

Stäckel (P.) und Engel (F.). — *Die Theorie Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nicht euklidischen Geometrie.* Gr. in-8°, X-325 p. avec 145 fig. Leipzig, Teubner. 9 m.

Stähli (F.). — *Die Cylinderfokalen.* In-8°, 50 p. et 2 planches. Bern.

Wagner (C.). — *Beiträge zur Entwickelung der Bessel'schen Function.* I. Art. In-8°, 65 p. Bern.

Poincaré (H.). — *Cours de Physique mathématique. Capillarité.* Rédigées par J. Blondin. In-8°, 195 p. avec fig. Paris, Carré.

1re Partie.

MÉLANGES.

CHRISTIAN HUYGENS (¹).

Rendre les suprêmes honneurs à un ami est une des grandes douleurs de la vie. Comme une image dont aucune passion fugitive n'altère la sereine noblesse, ainsi nous apparaît le fond de son âme avec une clarté que les agitations de la vie n'admettaient pas toujours. Le voir ainsi au moment du dernier adieu rend plus cruelle l'amertume de la perte irréparable. Cette impression persiste et renouvelle, à chaque retour de la date funeste, le deuil de ceux dont il fut la joie.

Il en est autrement dans la grande famille humaine. Les distances d'espace et de temps changent, avec leurs proportions, la nature même des choses. Celui qui fut l'ami et le bienfaiteur de toute l'humanité nous est attaché par des liens moins sensibles mais plus durables que les tendres fibres du cœur. Lorsque le cours incessant des années a depuis longtemps fait perdre de vue le groupe d'amis qui pleuraient à son lit de mort, il arrive que sa figure de plus en plus semble s'élever, attire et enchaîne nos regards, mieux connue dans l'harmonie de ses grandes lignes, à mesure que la distance augmente. Les héros de la pensée ne peuvent être justement appréciés que par les générations qui suivent, car l'importance de leur œuvre, l'étendue de leur influence, n'apparaissent qu'à la lumière de la science qu'ils ont fait naître. Parlant et agissant par leurs travaux, ils ne cessent de nous appartenir. Le terme de leur vie est pour nous la fin d'une tâche dont le souvenir élève l'esprit en nous mettant devant les yeux tout ce que peut embrasser une vie humaine bien employée.

Tel fut Christian Huygens. Quel autre sentiment ce 8 juillet,

(¹) Discours prononcé par M. J. Bosscha dans l'Auditoire de l'Université d'Amsterdam, le 8 juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire de la mort de Huygens.

où deux siècles nous séparent de sa vie, peut-il exciter en nous, si ce n'est l'admiration de la grandeur de son œuvre et la reconnaissance des dons précieux de lumière et de vérité qu'il nous transmit?

Il dut s'écouler plus d'un siècle avant que l'on reconnût la valeur d'une de ses plus profondes pensées. Un autre siècle a passé, et sans cesse son image grandit et gagne en attraits. Tandis que les théories actuelles des forces de la nature s'approchent de plus en plus des vues de Huygens, de nouvelles données, concernant sa personne, viennent prêter couleur et vie à sa figure de héros. Des documents, extraits du trésor de la Bibliothèque de Leyde, nous racontent ce qui se passa dans l'atelier spirituel du grand Hollandais, ses luttes avec la matière réfractaire, la patience tenace de son merveilleux génie, les soins inépuisables qu'il ne cessa de donner au perfectionnement d'un même Ouvrage, afin de satisfaire aux conditions presque excessives qu'il exigeait dans tout travail qui devait sortir de ses mains.

La publication de tout ce qui, dans la succession littéraire d'un homme célèbre, peut être déchiffré et rangé dans un ordre intelligible, s'est montrée quelquefois une épreuve dangereuse. Examinée de trop près, l'image peut s'obscurcir, troublée par les passions humaines. Il est permis de croire que, pour cette raison, des manuscrits de haute valeur pour l'histoire des Sciences nous sont restés cachés. Les éditeurs des lettres et des notes de Huygens n'ont pas connu cette difficulté. Déjà, en six gros in-quarto, nous avons sous les yeux plus de la moitié de sa Correspondance. Les détails qu'ils nous font connaître sur sa vie, sur ses relations avec ses amis et parents, sur son attitude vis-à-vis la jalousie et l'inimitié, sur tout, enfin, ce qui regarde son caractère, ne font que confirmer ce qu'on devait attendre d'un homme aussi scrupuleusement consciencieux dans ses recherches scientifiques. Rien ne trouble l'heureuse surprise de reconnaître que ce puissant penseur, homme comme nous, parmi nous et dans la vie ordinaire, compterait parmi les plus modestes et les plus attrayants.

Jamais il ne nous a paru si noble, et notre joie, si grande que fut la valeur d'un homme, et — pourquoi le cacher? — d'un compatriote, serait sans mélange si nous ne sentions trop péniblement

combien nous devons rester au-dessous de la tâche de retracer sa figure et d'honorer sa mémoire comme il le mérite.

Les destinées de la famille Huygens sont intimement liées à celles de notre patrie et de la maison d'Orange, dans la période la plus critique, mais aussi la plus glorieuse de leur histoire. Le grand-père et parrain de Christian était, dès sa vingt-septième année, secrétaire du prince Guillaume Ier. Après la mort du Taciturne, il accompagna le prince Maurice dans ses campagnes, en qualité de secrétaire du Conseil d'État. Il assista ainsi et participa aux délibérations du Père de la patrie et aux brillants faits d'armes du grand capitaine, fidèle et vaillant comme eux. Christian, le vieux, tenta le coup audacieux de ravir, du palais de l'ambassadeur espagnol à Londres, le fils du commandant de vaisseau Hoorn. L'enfant y était retenu comme otage, pour garantir l'exécution d'une entreprise des Espagnols contre Flessingue, à laquelle son père, de connivence avec le Stathouder, avait feint de se laisser gagner. Le jour même où Hoorn devait faire tomber dans l'embûche l'ennemi de sa patrie, l'enfant, dont le prince Guillaume avait garanti la sécurité, fut enlevé par le secrétaire Huygens, défendu à main armée contre les gens de Mendoza et conduit en lieu sûr. Maintes fois, au cours du voyage en Hollande, la chance d'échapper aux poursuites de Mendoza sembla perdue; mais la fin heureuse de la périlleuse mission a dû réjouir d'autant plus le cœur du Taciturne, dont la parole se trouvait dégagée avec autant de circonspection que de hardiesse.

C'est à cette école de fermeté et de persévérance que fut élevé le poète Constantin. Son nom devait être le symbole de la constance avec laquelle il servirait la cause de la liberté. Constanter, comme il s'appelait lui-même, a pleinement satisfait aux vœux de son père. La maison d'Orange a rarement connu un serviteur d'une plus inébranlable fidélité. Toutefois, les penchants de Constantin Huygens le portaient plutôt au service des Muses qu'aux rumeurs de la guerre. Et il est surprenant de voir tout ce que son intelligence pouvait embrasser : la langue et la littérature de toutes les nations et de toutes les époques, la musique, la peinture, les Mathématiques, la Mécanique; rien de ce qui mérite d'être connu ne fut négligé.

Son grand savoir excitait l'étonnement, même au delà des

frontières de la République. Il fut admiré par des amis tels que Hooft et Heinsius, Descartes et Balzac. Mais les soucis de sa charge, ses longs et nombreux voyages, en qualité de membre et de chef d'ambassade, ne lui laissaient guère le loisir d'un travail soutenu. Certes, un homme de tant de talent et de goût, dont l'intelligence sut démêler le sens des dépêches ennemies les plus habilement chiffrées, était un secrétaire et conseiller hautement estimé par Frédéric-Henri, l'ami des arts. Maintes fois aussi le prince en a rendu témoignage. Constantin, toutefois, ne nous a laissé aucune œuvre durable qui augmente nos connaissances. Pendant les heures arrachées au sommeil, sous la tente, en marche, à cheval, au milieu du bruit des armes, sans cesse il était occupé de ce que pouvait produire sa fantaisie, des formes et des images poétiques nouvelles, des épigrammes et des jeux de mots. Ce qu'un esprit aussi prompt, appliqué à un travail sérieux, maintenu dans les étroits chemins de la recherche et de la réflexion aurait pu produire, c'est ce que son fils Christian allait montrer.

L'éducation des fils de Constantin portait les marques de l'époque où les efforts, portés à l'extrême, étaient une chose ordinaire. On a peine à croire quel lourd fardeau d'études ils eurent à supporter dès leur plus tendre jeunesse. A l'âge de huit ans, ils apprirent le latin et, dans sa dixième année, Christian se servait familièrement de cette langue avec son frère Constantin. Leur père leur envoya du camp, sous Grave, des vers latins; ils trahissent les sentiments divers que lui inspirait chacun de ses fils. L'aîné, Constantin, lui apparaît, dans ses trop brillantes espérances, comme un futur poète, « tel qu'il n'y en a pas encore eu au monde ». Envers son petit Christian, le ton dont il parle est moins emphatique, mais plus affectueux. Il l'appelle « le miel de son cœur, son mignon, son gentil et élégant garçonnet », qui, lorsque son père reviendra du camp, sera récompensé par une pluie d'or des vers envoyés à l'occasion de sa fête. Et, toute sa vie, le père a conservé ce sentiment plus tendre à l'égard de Christian. Il a beau assurer qu'il chérit au même degré tous ses enfants, on lit clairement dans ses lettres que c'est toujours Christian dont l'adieu lui est le plus affligeant, l'absence la plus pénible.

Dès l'âge de huit ans, l'enfant connut les quatre opérations de l'Arithmétique et la règle de trois. En même temps, il apprit le chant et, avant que l'année ne fût écoulée, il savait « chanter avec grande justesse, dans toutes les clefs, toute espèce de morceaux de musique ». A neuf ans, il apprit la Géographie et l'emploi du globe pour trouver l'heure du lever et du coucher du Soleil dans toutes les saisons. A dix ans, il apprit la versification latine et le violon, à onze le luth, et à douze la Logique.

On serait tenté, aujourd'hui, de se demander comment de pareilles études pouvaient être supportées par Christian, qui était d'une constitution faible et délicate. Mais les enfants de Constantin avaient, à l'âge le plus difficile, le privilège d'être instruits par leur père; combien celui-ci s'entendait à tenir leur intérêt en éveil, c'est ce que l'on peut voir par une des petites pièces de vers, composées par Constantin à cette époque, sur « Christian, qui me suit partout comme un petit chien ». Cependant, lorsque d'année en année les campagnes du prince tinrent le père éloigné de la maison, l'éducation des enfants dut être confiée à des professeurs, Myrkinius et Bruno. On doit douter que ce dernier fût un bon maître pour le jeune Christian. Nous connaissons Henricus Bruno par les léttres latines qu'il était chargé d'écrire tous les quinze jours à Constantin, pour lui rendre compte des progrès de ses élèves. Ces lettres sont des modèles de mauvais goût prétentieux, écrites sous la préoccupation trop visible de faire sa cour au père haut placé et influent, en affectant l'admiration pour la poésie, en faisant étalage de savoir, tout en se perdant dans un verbiage absurde. Pour un enfant aussi vif que Christian, ce devait être un tourment que d'avoir un tel maître. Quelle que fût son habileté au calcul, dans l'emploi du globe, en musique, il y avait une chose qui lui donnait de la peine : composer des vers latins. Ce fut en vain que Bruno l'importunait sans cesse, que le frère Constantin lui prêtait un bienveillant secours, sa muse latine était et restait paresseuse. Bruno nous a conservé les premiers vers latins, un distique, que Christian, à l'âge de dix ans, a péniblement élaboré :

Jam primum tantum compono carmen et oro
Excuses jam me, post meliora dabo.

Le suivant, certes, était meilleur, de forme irréprochable, et non sans ironie naïve vis-à-vis du père, dont l'amour de la poésie faisait indirectement souffrir le fils :

O Pater in sylvâ liceat mihi ludere clavâ,
Per lusum clavæ nulli periere poetæ.

Une époque plus heureuse commença lorsque, après le latin et le grec, le français, l'italien et le clavecin, Christian put aborder les principes de la Mécanique. Ce fut aussitôt sa branche de prédilection, une récréation plutôt qu'un travail. Les heures du jeu furent consacrées à copier des figures et des modèles. Bientôt il s'essaya à construire des machines et, avant la fin de l'année, Christian s'était fabriqué lui-même un tour de charpentier.

A cette grande diversité d'exercices vinrent s'ajouter, dans le courant des deux années suivantes, les Mathématiques, sous maître Stampioen, l'équitation et la danse. Après ce dernier complément d'études, les deux enfants furent jugés suffisamment préparés pour être inscrits comme étudiants en droit à l'Université de Leyde. Christian venait d'atteindre l'âge de seize ans.

A Leyde, il eut le privilège de trouver dans Van Schooten un excellent maître pour l'étude qui l'attirait plus que la jurisprudence. Van Schooten était un très habile géomètre, ami de Descartes, et en correspondance suivie avec le Père Mersenne, le confident du grand philosophe, travailleur scientifique infatigable, le correspondant universel de presque tous les mathématiciens de son temps. Bientôt, l'année qui suivit l'arrivée de Christian, le nom de Van Schooten allait se répandre dans le monde scientifique par la publication de son *Traité des sections coniques* et les deux premiers Livres de ses *Exercices mathématiques*. Mais déjà, à cette époque, un peu plus d'un an et demi après sa première leçon, l'élève de Van Schooten s'était si bien fait connaître, que le Père Mersenne pria le jeune Huygens de lui donner son avis sur le nouvel Ouvrage de son professeur.

Van Schooten, quelques semaines après sa première rencontre avec Christian, avait envoyé à Descartes un écrit de son nouvel élève touchant « une invention de Mathématiques ». Descartes, tout en observant que le jeune Huygens « n'y eût pas trouvé tout à fait son compte, ce qui n'était nullement étrange, parce

qu'il avait cherché une chose qui n'a jamais été trouvée de personne », en fut tellement satisfait, qu'il n'hésita pas à prédire que l'auteur deviendrait « excellent en cette Science ». Bientôt le Père Mersenne avait envoyé à Constantin Huygens des problèmes destinés à être soumis à son fils, qui s'occupait de Mathématiques ; et ainsi s'était établie une correspondance entre Mersenne et Christian. Dans une de ses lettres, en démontrant que, contrairement à ce qui était admis alors, une corde suspendue à ses deux bouts ne prend pas la forme d'une parabole, en examinant ensuite de quelle manière la corde doit être chargée pour réaliser cette courbe, Christian avait donné des preuves de jugement et de perspicacité plus que suffisantes pour motiver une entière confiance dans la sûreté de sa critique.

Van Schooten était plus qu'un savant géomètre, c'était encore un homme d'un excellent caractère. Il s'est toujours sincèrement réjoui du succès de son élève et est resté toute sa vie pour Christian, dans leurs relations scientifiques, l'ami le plus intime et le plus éprouvé. En ce jour, consacré à la mémoire de Huygens, nous devons à Van Schooten un hommage de respect et de reconnaissance.

Trop tôt ils durent se séparer. A peine les deux frères eurent-ils passé deux années à Leyde, que l'aîné alla remplir une charge pour assister son père en sa qualité de secrétaire du prince. Frédéric-Henri, après avoir reconquis Bréda, avait fondé en cette ville un Athénée, le *Collegium Arausiacum*, dont le poète Constantin était un des plus zélés curateurs. Celui-ci y avait déjà envoyé comme étudiant son troisième fils Louis, et Christian, resté seul à Leyde, alla rejoindre son frère à Bréda. Il y vint habiter chez Dauber, professeur en Jurisprudence. Le souci du père de ménager à son fils un avenir dans une carrière politique fut sans doute le motif principal de ce changement. Mais le goût des Mathématiques continua de prévaloir. C'est à Bréda que Christian réunit les matériaux du premier Ouvrage qu'il allait publier. Et pendant qu'il exerçait son génie naissant dans des lettres à Mersenne et Van Schooten, et en recherchant les paralogismes dans le volumineux Traité de Grégoire de Saint-Vincent sur la quadrature du cercle, Dauber traçait, dans une lettre au père Constantin, ce portrait du jeune étudiant : « Je n'ai pas encore vu tant

de sagesse et de savoir, un esprit si vif, un jugement si exquis, une diligence si extraordinaire, une conversation si honnête et modeste, et tant d'autres belles qualités rassemblées en qui que ce soit à un âge si tendre. »

Le séjour de Bréda dura deux ans. Selon l'usage du temps, l'éducation devait se terminer maintenant par un voyage. Une ambassade partant pour le Danemark en fournit l'occasion. Le chef, le comte Henri de Nassau, faisait fond sur l'assistance en matière juridique de l'élève de Dauber. Le jurisconsulte en herbe rêvait de pousser son voyage jusqu'en Suède, pour y rencontrer Descartes et la reine Christine. La joyeuse cour de Flensbourg ne paraît pas avoir réclamé beaucoup de diplomatie et les rigueurs de la saison firent échouer les projets de Suède.

De retour à la Haye, Huygens s'occupa aussitôt à rédiger et rassembler les problèmes conçus et résolus dans le cours de ses études à Leyde et à Bréda, ainsi que les observations auxquelles le livre de Saint-Vincent lui avait donné lieu. Van Schooten, auquel il communiqua son travail, fut si surpris « de la subtilité des inventions et de la clarté des démonstrations » qu'il engagea Christian à le publier. L'étroite relation qui existait entre les sujets de ses premiers exercices et les propositions de Saint-Vincent induisirent Christian à ajouter à ses problèmes un examen critique du livre de ce dernier.

C'est sous cette forme que parut le premier Ouvrage de Huygens, suivi bientôt d'un deuxième sur le calcul approché de la circonférence du cercle et sur quelques problèmes renommés par leur difficulté : la forme et le fond révélaient à l'instant la main d'un jeune maître.

Grégoire de Saint-Vincent était un jésuite de soixante-cinq ans, renommé par son savoir. Jamais il n'a reconnu publiquement son erreur. Quelques années après l'apparition de la critique, un des disciples de Saint-Vincent a fait une tentative pour attaquer l'adversaire de son maître : il fut réfuté sans peine. Mais les premiers rapports avec Saint-Vincent ont donné lieu à une correspondance qui forme un épisode remarquable dans la vie si remplie de Christian Huygens. Saint-Vincent est devenu non seulement un admirateur sincère, mais aussi un ami de plus en plus dévoué de son premier antagoniste scientifique. Il était heureux de pou-

voir rapporter à Huygens comment un de ses élèves, Gottignies, avait démasqué à Rome l'horloger du pape, lequel voulut se faire passer pour l'inventeur d'une horloge qui se trouva n'être qu'une copie de l'horloge à pendule de Huygens, de même que plus tard il se réjouit de pouvoir écrire que le Père jésuite Fabri, qui avait entrepris en Italie une campagne violente contre l'explication de l'anneau de Saturne, avait fini par reconnaître la justesse des vues du jeune Hollandais.

Huygens, de son côté, ne méconnaissant pas les mérites réels de Saint-Vincent, a recommandé à un jeune Allemand, que l'*Horologium oscillatorium* avait porté à s'occuper de Mathématiques, l'étude des œuvres du jésuite, et c'est ainsi qu'échut à la mémoire de ce dernier la louange reconnaissante du grand Leibniz.

L'abbé Monchamps, qui l'année dernière a tiré des premiers Volumes publiés par la Société hollandaise des Sciences un remarquable Mémoire sur les correspondants belges du grand Huygens, fait remarquer qu'ils étaient tous les neuf des ecclésiastiques, parmi lesquels six Pères jésuites; fait surprenant quand on se rappelle que Huygens était protestant, d'une famille qui, par ses étroites relations avec les premiers Stathouders, était plus que toute autre engagée dans l'âpre lutte religieuse et politique de cette époque. Cela peint bien l'esprit et le caractère de Christian. Il avait en aversion tout conflit, surtout ceux que créent les différences de sentiment et d'intérêt entre les hommes. Son attention et ses efforts ne se portaient que sur la recherche des vérités qui sont évidentes pour chacun. Il vivait dans les sereines régions de la Science, au-dessus de la foule agitée des hommes; ses intentions étaient si évidemment pures et sa puissance si grande, qu'il attirait à lui, vers ces hautes sphères, les hommes les plus éminents de toute opinion.

Outre les trois Ouvrages cités, Huygens en a publié encore séparément, sur les Mathématiques, un autre qui à lui seul suffirait à sa renommée. C'est un Mémoire intitulé : *Tractaet van Rekening van Spelen van Gheluck* (Traité de calcul des jeux de hasard), écrit dans sa vingt-huitième année et paru comme Appendice au cinquième Livre des *Exercices mathématiques* de Van Schooten. Cet Ouvrage est le premier qui traite de la théo-

rie des chances. Il renferme les principes d'une doctrine alors entièrement nouvelle, qui aujourd'hui, dans la théorie mathématique des probabilités, avec ses nombreuses applications dans le calcul des observations et celui des lois de mortalité, s'est développé en une science spéciale. Jacques Bernoulli plaça, en 1813, le Traité de Huygens en tête de son *Ars conjecturandi*.

Nombreuses, d'ailleurs, furent les contributions à la Géométrie, fournies par Huygens dans ses lettres, dans les journaux et dans ses propres Ouvrages traitant d'autres sujets, quand il avait besoin de ce puissant auxiliaire pour inventer de nouveaux instruments ou découvrir des lois physiques.

Il a indiqué lui-même le caractère distinctif de son œuvre mathématique. Montrant à Van Schooten, avec sa clairvoyance habituelle, le côté faible, et même, par un exemple bien choisi, la faillibilité de la méthode des indivisibles de Cavalieri, telle que Van Schooten la lui avait transmise, il dit : « Je suis ainsi fait que, en Géométrie, j'attache moins de prix aux résultats qu'à la solidité du raisonnement et à la clarté de la démonstration. »

Toutefois, on ne peut mieux mesurer son génie mathématique que par l'estime des plus éminents géomètres qui lui ont succédé. Condorcet, dans son éloge de Huygens, nous en a conservé un témoignage précieux : « On voit, dit-il, dans la Correspondance littéraire de Leibniz et de Bernoulli, où ces deux illustres amis se confient leurs plus secrets sentiments, quelle profonde estime ils faisaient de Huygens, combien ils étaient avides de ses manuscrits et jaloux d'y trouver leurs opinions, et avec quel triomphe ils opposaient le seul jugement de Huygens à la foule des adversaires qu'avait attirés aux calculs de l'infini le double démérite d'être nouveaux et sublimes. Si quelque chose a droit de flatter l'amour-propre, ce sont de tels éloges, donnés par de grands hommes dans le secret, et auxquels la malignité ne peut soupçonner aucun motif qui en diminue le prix. »

Du temps des premières études de Huygens datent également ses contributions à la Physique et à la Mécanique. Elles ouvrent la série des grands travaux par lesquels Huygens a exercé l'influence la plus profonde et la plus durable sur notre connaissance de la nature et aussi sur notre vie pratique.

Pour bien comprendre la place que Huygens a occupée parmi les physiciens du XVIIe siècle, pour expliquer le sort que subit son œuvre après sa mort, il faut avoir égard aux idées philosophiques de son temps.

Le système de Descartes occupait à cette époque tous les esprits; il n'avait pas de partisan plus enthousiaste que le maître de Huygens, Van Schooten. Celui-ci avait joui du commerce instructif du philosophe; il avait pu connaître toute la puissance de son génie par l'étude approfondie de la *Géométrie*, dont il avait donné une traduction latine, augmentée de commentaires. Personne mieux que Van Schooten ne pouvait juger de la valeur de l'instrument dont Descartes, par sa nouvelle Géométrie, avait doté la Science. Et quel est le mathématicien de ce temps qui ne dut être rempli d'admiration pour les deux autres Ouvrages que Descartes avait ajoutés à son premier écrit : les *Météores,* avec la subtile théorie de l'arc-en-ciel et l'ingénieuse et lucide *Dioptrique?* Mais l'ambition de Descartes visait plus haut que la découverte de nouvelles méthodes de Mathématiques et de quelques effets de la lumière. Le secret de la structure de l'Univers entier devait sortir de sa puissante imagination. Il avait, dans ses *Principes*, déduit de son doute philosophique en toutes choses la certitude de sa propre existence; celle-ci l'avait conduit à la certitude de l'existence de Dieu; l'idée de Dieu aux conceptions d'espace et de temps et de leurs qualités qui enfin lui servirent de base pour la théorie du mouvement et de la percussion. Ces lois du mouvement, dont Descartes se croyait si certain, « qu'encore que l'expérience nous semblerait faire voir le contraire, nous serions néanmoins obligés d'ajouter plus de foi à notre raison qu'à nos sens » formaient les articles fondamentaux de la constitution réglant un univers uniquement composé d'espace en mouvement. Tous les phénomènes de la nature devaient, en effet, trouver leur explication dans l'infinie variété de transmission et de transformation du mouvement.

On se demande comment un homme aussi exercé dans les sévères méthodes de raisonnement de la Géométrie a pu se laisser entraîner par une fantaisie aussi désordonnée dans l'élaboration ultérieure de son système. Pour Van Schooten, comme pour

une foule de ses contemporains et de ses successeurs, Descartes était infaillible.

Quels doivent avoir été ses sentiments lorsque son élève admiré vint lui montrer ce qu'il venait d'écrire à Gutschoven, savoir que, sauf la première, toutes les lois du mouvement énoncées par Descartes étaient peu sûres et suspectes de fausseté?

La nouvelle édition des œuvres de Huygens nous donne un vivant tableau de la discussion qui s'engagea, à ce propos, entre les deux amis. Après le premier entretien, Huygens, dans une lettre, embarrasse aussitôt son maître en lui soumettant un problème dont la résolution, d'après les lois de Descartes, conduit à une absurdité évidente. Van Schooten, cependant, ne se laisse pas convaincre. Il conjure Huygens de ne pas mettre en péril sa réputation en s'attaquant à une autorité aussi incontestée et surtout en se montrant ingrat envers l'illustre maître. Il lui conseille de s'occuper plutôt de Mathématiques et l'avertit qu'un professeur de Hambourg a confirmé par l'expérience les lois de Descartes.

Il confie même à Christian un secret de la table d'études — on dirait mieux de l'établi — du philosophe : « Descartes, dit-il, n'avait pas, en réalité, déduit ses lois de pures considérations philosophiques : au professeur Heidanus il avait confessé les avoir tirées des profondeurs de l'Algèbre et avoir hésité s'il ne les placerait pas en tête de son système au lieu de les incorporer dans sa démonstration philosophique et de les présenter comme une conséquence de son fameux : « Je pense, donc je suis. »

Tout fut en vain : la résistance de Van Schooten ne fit qu'accroître l'assurance de Huygens et sa foi en lui-même. Pourquoi Van Schooten le jugeait-il sans l'entendre, sans connaître ses preuves? Descartes lui-même se serait-il prétendu au-dessus de toute erreur humaine? « Le don de ne jamais faillir n'appartient qu'à ceux qui ne font rien. »

Il y a lieu de regretter que Huygens n'ait pas publié dès 1656 ses lois du choc des corps. Il est certain qu'il les possédait déjà complètement à cette époque : c'est ce qui résulte des problèmes dont il communiquait les solutions dans ses lettres, principalement d'un théorème élégant dont il fit part à Claude Mylon. Lorsque, cinq ans après, Huygens vint à Londres, il y trouva Wren et Rooke occupés à faire des expériences sur le choc des corps,

sans cependant réussir à y découvrir quelque règle. Il avait encore ses lois dans la mémoire, et sut, à chaque expérience, prédire quel en serait le résultat.

En 1669 parurent, sur ce sujet, dans les *Philosophical Transactions* de la Société Royale, deux articles, l'un de Wren, l'autre de Wallis. Ce dernier traitait d'une question dont Huygens ne s'était pas occupé : le choc des corps non élastiques. La Note de Wren renfermait les lois déjà découvertes par Huygens, précédées de quelques développements qui devaient passer pour une démonstration, dont cependant l'insuffisance prouvait clairement que ce n'était pas par cette voie que Wren avait obtenu ces lois.

Il est arrivé ainsi qu'une assertion inexacte, une critique insuffisante ont fait naître la tradition que Wren, Wallis et Huygens ont successivement découvert les lois du choc des corps.

Le sixième Volume, récemment paru, des œuvres de Huygens fait justice de cette erreur. Il apporte le témoignage, rendu par Wren lui-même, qu'il n'a pas fourni de démonstration, et fait voir de plus que, par la date de la publication également, Huygens fut le premier auteur de cette découverte.

L'année précédente il avait lu ses lois du mouvement à l'Académie des Sciences de Paris, où leur discussion avait occupé deux séances entières.

L'incident stimula Huygens à vaincre la répugnance qu'il ressentait à publier des découvertes qu'il jugeait inachevées.

Il fit connaître deux nouvelles lois du mouvement, extrêmement importantes : la conservation du mouvement du centre de gravité, et la conservation des forces vives. A la Société Royale, il transmit de plus quatorze propositions, cachées encore dans des anagrammes.

Dans l'histoire de la Science il n'existe certainement pas une page renfermant tant de remarquables découvertes. Les quatorze propositions contenaient les lois du pendule simple, du pendule composé et du pendule conique, la détermination et les propriétés des centres d'oscillation, les lois de la force centrifuge — qui plus tard élevèrent à son apogée le renom de Huygens — et quatre lois d'optique, parmi lesquelles il y en a une qui, dans sa généralité, embrasse toutes les propriétés des systèmes de lentilles centrés : la quarantième proposition de la *Dioptrique* de Huy-

gens, dont jusqu'ici personne encore n'a fait ressortir toute la portée.

Dans les mémorables années de 1655 à 1657, l'esprit de Huygens fut occupé par les sujets les plus divers. Tandis qu'il inventait le Calcul des probabilités, qu'il répondait au défenseur de Saint-Vincent, qu'il venait d'entrer en correspondance avec Wallis, qu'il étudiait les problèmes de la théorie des nombres reçus de Fermat par l'intermédiaire de de Carcavy, trois découvertes se succédèrent qui, aussitôt, firent retentir son nom en dehors du monde scientifique : le satellite de Saturne, l'anneau de Saturne et l'horloge à pendule.

Depuis l'époque où Galilée, Metius, Simon Marius et Fabricius, en dirigeant vers les astres la lunette hollandaise, avaient découvert les montagnes de la Lune, les satellites de Jupiter, les phases de Vénus et les taches du Soleil, on n'avait plus observé de nouveaux phénomènes célestes bien importants. Ce qui alors avait étonné le monde pouvait se voir au moyen de la lunette de Lippershey, telle qu'on la montrait déjà en 1608 à la foire d'automne de Francfort, et qu'on la vendait l'année suivante dans les rues de Paris. Les nouvelles lunettes, construites d'après le principe de Képler, n'avaient pas conduit à de bien grands progrès. L'art de tailler les verres était encore dans l'enfance : Huygens comprit que de son perfectionnement dépendait en premier lieu le progrès de l'Astronomie. Il mit lui-même la main à l'œuvre, après avoir pris bon conseil chez le professeur *Van Gutschoven* à Louvain. Sa persévérance dans ce long et difficile travail fut couronnée de succès. La première lunette, de 12 pieds de longueur, qu'il construisit, dépassait en pouvoir résolvant toutes les autres lunettes de cette époque, même les plus grandes. Le 5 mars 1655, il vit, dans le voisinage de Saturne, une petite étoile qui parut accompagner la planète dans sa marche à travers les astres, un satellite dont, par l'observation de six révolutions complètes, Huygens détermina la période au 1/64 près. Suivant l'exemple de Galilée, il communiqua sa découverte à ses correspondants sous forme d'anagramme, dans l'intention de ne la publier qu'après avoir complètement résolu le problème des mystérieuses apparences de la planète ellemême. Mais il ne put résister à la tentation de montrer le nouvel astre à ses amis. L'un d'entre eux lui donna le conseil prudent de

ne pas tarder à publier sa découverte, et c'est ainsi qu'au premier anniversaire du satellite hugénien parut un petit Mémoire, *De Saturni luna Observatio nova,* qui renfermait encore, en un nouvel anagramme, la découverte de l'anneau. Cependant Huygens continua ses observations avec une deuxième lunette de 23 pieds de longueur. Ce n'est qu'au bout de trois ans qu'il jugea ses observations assez concluantes pour être présentées au monde scientifique. Mais alors aussi, son travail avait acquis une portée bien plus grande que la mise au jour de nouveaux phénomènes merveilleux. La raison qu'il donna des différents aspects de la planète, le calcul et la prédiction des phases de son anneau, furent de nouvelles preuves de son étonnante perspicacité; mais on doit souvent estimer plus que les découvertes mêmes les moyens d'en faire de nouvelles. Or le *Systema Saturnium,* en dehors de la théorie de l'anneau, apportait de nouvelles preuves que les soins extrêmes employés à la fabrication des lentilles étaient le secret qui permettait de pénétrer plus profondément les mystères du ciel. L'Ouvrage contenait la première description des bandes brillantes de Jupiter, d'une bande obscure de Mars et de la nébuleuse d'Orion dont Huygens put affirmer qu'elle ne pouvait être résolue en un amas d'étoiles, comme toutes celles que l'on connaissait alors, mais qu'elle était une véritable nébuleuse. Ces observations nouvelles firent naître partout une émulation fructueuse chez les amateurs, qui se mirent à perfectionner les lunettes, et parmi lesquels Huygens et son frère Constantin continuèrent à tenir le premier rang. Pour donner enfin à l'instrument sa valeur entière, Christian le munit d'un accessoire nouveau, qu'il imagina pour mesurer les dimensions apparentes des astres. Le *Systema Saturnium,* en effet, renferme les premières données sur les diamètres des planètes et de l'anneau de Saturne obtenus à l'aide d'un micromètre oculaire.

La troisième œuvre créée par Huygens à cette époque fut le grand événement de sa vie : l'invention de l'horloge à pendule. Lorsqu'une fois l'idée heureuse lui fut venue d'appliquer le pendule aux horloges alors existantes, la réalisation en fut facile. Il suffisait de remplacer par un arbre horizontal l'axe vertical autour duquel, par la force du poids moteur, le balancier était projeté alternativement d'un côté et de l'autre, et d'y attacher une four-

chette embrassant le bout supérieur du pendule. L'exécution ne demandait que quelques jours. Et cependant cette modification, en apparence insignifiante, avait fait naître un instrument dans lequel le temps était mesuré d'après un principe nouveau. La marche de l'horloge ne dépendait plus du poids moteur et de la résistance variable des rouages.

Le secret de la découverte ne tarda pas à se divulguer. Le succès de la nouvelle horloge, la rapidité avec laquelle elle se répandit chez nous et créa une nouvelle industrie dépassèrent encore le mouvement qu'avait causé, cinquante ans plus tôt, l'invention de la lunette hollandaise. Huygens, dans son désir de perfectionner la nouvelle horloge, négligea une fois de plus de veiller à ses propres droits. Il y avait déjà huit mois que le clocher de Schéveningue était pourvu de la première horloge publique à pendule avant que Huygens, dans un petit travail, *Horologium,* se fît connaître au monde savant comme l'inventeur. Sa trop grande confiance dans l'équité de ses concitoyens lui a causé bien des ennuis. Nous les passons : ils n'ont pu amoindrir ni son nom ni son œuvre.

Huygens avait surtout mis son espoir dans l'application à la navigation. La détermination de la position d'un navire en mer était dans ce temps encore très défectueuse. La mesure de la hauteur des astres pouvait bien faire connaître avec une exactitude suffisante à quelle distance on se trouvait au nord ou au sud de l'équateur, mais le « problème d'ouest et d'est » demeurait irrésolu. On devait se contenter d'une estimation faite d'après la vitesse et la direction du navire, données incertaines et souvent trompeuses par suite des courants marins. En vain les rois d'Espagne, d'Angleterre et de France et le gouvernement de la République avaient-ils promis de fortes récompenses pour l'invention d'une méthode des longitudes. Si l'on pouvait seulement déterminer en mer la différence de l'heure locale et celle d'un port connu, la solution était évidemment trouvée. Or, l'heure locale se déduisait sans peine de la position du Soleil et des étoiles. Une horloge exacte qui, malgré les oscillations du navire, continuerait de donner l'heure précise du port quitté en dernier lieu, tel était donc le moyen cherché. Huygens a, pendant dix-huit ans consécutifs, cherché à rendre ses horloges propres à cet effet. Vers le

milieu de cette époque, le voyage du capitaine anglais Holmes réussit dans une tentative qui eut un grand retentissement; mais depuis il parut de nouveau qu'il était difficile d'assurer le succès d'une manière absolue en toute circonstance. Ce n'est qu'en 1675 que les efforts infatigables de Huygens furent couronnés d'un plein succès par l'application du mouvement pendulaire et des ressorts à spirale aux montres. Sa légitime joie peut nous réjouir encore aujourd'hui. A son frère Louis qui l'avait félicité, et qu'il avait à complimenter à l'occasion de la naissance de son premier-né, il écrit : « Il y a du plaisir d'avoir matière à se faire ainsi des félicitations réciproques, à l'un pour des enfants de chair, à l'autre pour des enfants d'esprit. Si votre garçon est beau, ma fille, la nouvelle invention, est aussi belle en son espèce et vivra longtemps avec sa sœur aînée le pendule et son frère l'anneau de Saturne. »

Dans l'Astronomie l'horloge à pendule opéra une véritable révolution. L'étude du mouvement des corps célestes réclame avant tout la mesure du temps. L'Astronomie rationnelle se trouve arrêtée par un obstacle infranchissable tant que l'on ne peut pas, dans cette mesure, atteindre à une très grande exactitude. On avait essayé de remplacer les anciennes horloges insuffisantes par le pendule libre de Galilée, en s'imposant la peine presque insupportable de compter pendant des heures les oscillations d'un poids ou d'une verge suspendue qu'un aide maintenait en mouvement. Mais ce moyen devait rester tout aussi défectueux. On ne pouvait empêcher que les oscillations ne fussent d'amplitude très inégale, et l'égalité prétendue de la durée des grandes et des petites oscillations n'était vraie que d'une manière très grossièrement approchée. La loi célèbre de Galilée, déduite d'observations très imparfaites, était aussi inexacte que ses considérations sur la chute des corps suivant un arc de cercle.

Le nouvel instrument à pendule qui, tout en enregistrant ses oscillations, restait de lui-même en mouvement, avait presque entièrement écarté cette difficulté. Il marchait si régulièrement, que l'amplitude de ses oscillations ne variait presque pas. Toutefois l'exactitude mathématique de Huygens ne se trouvait pas satisfaite. Recherchant la précision la plus rigoureuse il se posait cette question : Si un corps pesant, tombant suivant un arc de

cercle, emploie pour atteindre le point le plus bas des temps inégaux selon la longueur des arcs parcourus, quelle doit être la courbe de descente pour que l'égalité des temps, le tautochronisme soit réalisé? C'était un problème de même nature environ que celui de la corde chargée dont il s'était occupé dans sa jeunesse. Le secret ne pouvait lui rester caché. La courbe était la roulette ou cycloïde que décrit un point de la circonférence d'un cercle roulant. Mais comment disposer l'horloge de telle manière que le poids oscillant soit obligé de suivre cette courbe? Ici s'ouvrait un champ tout nouveau de spéculation géométrique qui fournit à Huygens l'occasion d'une invention considérée encore aujourd'hui comme une merveille de pénétration d'esprit. Il créa la théorie du développement des lignes courbes et en tira cette conséquence, que l'application au bout supérieur du pendule de deux lames en métal courbées en forme de cycloïde, et contre lesquelles viendrait s'appliquer alternativement le fil du pendule, devrait rendre la marche de l'instrument complètement insensible aux variations d'amplitude.

Les progrès de l'art ont bientôt permis de construire des horloges tellement parfaites qu'une variation d'amplitude appréciable au point de vue pratique ne peut plus s'y présenter : aussi les horloges à pendule dans lesquelles on rencontre encore les lames en arc de cycloïde sont devenues très rares. Mais la théorie géométrique de Huygens est restée et les considérations auxquelles il a été conduit par le désir d'approfondir complètement le mécanisme de son invention ont été la source de la plus grande découverte qui ait été faite jusqu'ici, celle de l'attraction universelle.

Mais il nous faut suivre maintenant Huygens dans ses voyages et dans ses travaux à Paris.

Le premier séjour de Huygens en France avait pour objet d'acquérir, en même temps que son frère Louis, le grade de docteur en Droit à l'Université protestante d'Angers. Ce n'est pas là cependant la raison pour laquelle son voyage a eu une si profonde influence sur le reste de sa vie. Il entra en relations à Paris avec Boulliau, Auzout, de Roberval et Chapelain. Ce dernier, l'ami sexagénaire du vieux Constantin, conçut aussitôt une vive affection pour Christian. Ce fut Chapelain qui lui donna le sage

conseil de ne pas différer la publication de la découverte du satellite de Saturne. Il est resté depuis ce moment le paternel ami et protecteur en lequel Huygens apprit à connaître toute l'exquise amabilité d'un vieux savant français.

Lorsque, cinq ans plus tard, Christian retourna à Paris, le cercle de ses amis s'y était considérablement élargi. Conrart, Mylon, de Carcavy, de Monmor et Petit s'étaient successivement offerts comme ses correspondants. Déjà au temps de Mersenne il s'était formé à Paris des sociétés qui se réunissaient à époques fixes pour s'entretenir de toutes les nouvelles intéressant les lettres et les sciences. Chez Mersenne se rencontraient les mathématiciens, chez Conrart les hommes de lettres. Ces sociétés se nommaient Académies, et c'est, en effet, de celle de Conrart qu'est issue l'Académie française. La société la plus mélangée et la plus brillante était celle de Monmor. Les sujets dont on s'occupait n'étaient pas toujours des plus intéressants : chacun avait le droit de se mêler à la discussion. Il arrivait que la question de savoir si un point géométrique a une existence réelle provoqua des débats qui remplirent toute la soirée.

Mais l'attention fut générale et soutenue lorsque Chapelain lut à un auditoire d'une quarantaine de hauts courtisans, de fonctionnaires de l'État, de membres du clergé, de nobles et de docteurs de la Sorbonne une lettre de son jeune ami de Hollande sur les merveilles de l'anneau de Saturne.

Dans cette assemblée, Huygens, lors de sa deuxième visite à Paris, fut introduit par Chapelain. Le nouvel hôte, qui s'occupait de tant de sujets divers, qui avait toujours quelque fait nouveau à rapporter, s'entendit bientôt assurer que jamais les réunions n'étaient si fidèlement suivies que lorsqu'on savait qu'il y paraîtrait. Aussitôt que Huygens, en 1663, fut arrivé pour la troisième fois à Paris, de Monmor, l'abbé de Bryas et de Sorbière vinrent le prier de ne pas manquer le premier mardi de Monmor. On y mettrait à l'ordre du jour un nouveau règlement tendant à donner aux discussions une direction scientifique sérieuse et utile. Le fait que l'on désirait voir Huygens y assister prouve que non seulement on le considérait comme un avocat influent de la bonne cause, mais déjà comme un membre de la Société.

Le mouvement pour les arts et les sciences qui existait alors

dans la société cultivée de Paris fut énergiquement appuyé par le grand Colbert. Il désirait en prendre la direction et le faire servir le plus possible à la gloire de son pays et de son roi. Il conçut le projet de fonder une Académie royale des Sciences, avec des traitements fixes pour ses membres et des subsides pour défrayer les recherches. Il ne procéda pas à la réalisation de ce projet avant de s'être assuré que Huygens viendrait se fixer à Paris comme membre.

Un an et demi avant que la célèbre Académie tînt sa première séance, Huygens reçut à la Haye la proposition de Colbert. Il n'hésita pas longtemps.

En Hollande il n'avait pas de confrères qui approchassent de sa valeur. Le mathématicien Heuraet, de Harlem, s'était déjà depuis longtemps fixé en France. Le bourgmestre d'Amsterdam, Hudde, était trop occupé de ses fonctions, et n'était d'ailleurs guère attrayant par ses lettres prolixes. C'était à Paris et à Londres qu'il pourrait vivre parmi ses semblables. Peu apprécié dans sa patrie, il n'y trouvait guère d'emploi utile. Une fois il avait fait un rapport aux États généraux sur une prétendue invention de la méthode des longitudes; pour le reste, les services qu'il avait eu l'occasion de rendre à la République se bornaient à la construction, à bord de l'un des vaisseaux de guerre, d'une couchette suspendue, comme son horloge marine, à une articulation sphérique, afin de protéger le Pensionnaire du Conseil contre les mauvais effets des remous et des vagues de la mer. C'était à l'occasion de la fameuse expédition dans laquelle Jean de Witt, contre l'avis des pilotes et fort de ses propres connaissances, conduisit lui-même la flotte de l'État à travers les bancs de sable de Texel.

La décision prise par Huygens fit éclater des cris de joie parmi ses amis parisiens. Seul, Auzout manifesta la crainte que Huygens ne rencontrât à Paris des difficultés avec les ouvriers, moins habiles que ceux de la Hollande; mais Huygens, qui avait lui-même fabriqué ses lentilles et ses lunettes et construit sa machine pneumatique, pouvait répondre avec raison qu'il trouverait bien les moyens d'exécuter ses inventions, quand il en aurait.

Il partit pour Paris au printemps de 1666. On lui assigna comme demeure le futur siège de l'Académie, la Bibliothèque du Roi, rue Vivienne, attenant au palais de Colbert. C'est là que Huygens a

passé plus de douze années de sa vie si active; c'est là qu'il écrivit son immortel *Traité de la Lumière*.

On sait peu de chose jusqu'ici des travaux de Huygens à l'Académie. Ce qu'en rapporte du Hamel, le premier secrétaire, dans son *Historia Academiæ*, est incomplet et a été peu remarqué. Le Secrétaire perpétuel, M. Bertrand, en retraçant *l'Académie et les Académiciens de* 1666 *à* 1793, n'a pas manqué de mettre en lumière les mérites de Huygens. C'est à son obligeance ainsi qu'à celle de M. le bibliothécaire Lalanne que nous sommes redevables d'une copie de tout ce qui, dans les anciens registres de l'Académie, se rapporte à Huygens et à ses travaux; c'est une très importante contribution à la nouvelle édition de ses œuvres.

De toute son âme, Huygens se mit à sa nouvelle tâche. La première page de son journal, écrite à Paris, contient l'énumération de trente sujets de recherches propres à être traitées dans l'Académie. A Colbert il présente un programme de travaux pour les deux Sections : celle des Sciences mathématiques et celle des Sciences physiques. Dans l'exécution de ce programme, il occupe toujours le premier rang. Dès la première séance qui suit l'ouverture, il décrit une expérience en ce temps étonnante, dont le froid excessif lui avait fourni l'occasion : la rupture d'un canon de mousquet par la congélation de l'eau.

Dans les séances suivantes, il communique quatre nouvelles méthodes d'observation astronomique, basées sur la première application de la mesure exacte du temps, que permettait son horloge à pendule. Il dirige les expériences que l'Académie a décidé de faire au moyen de sa nouvelle machine pneumatique. Quand on prend la résolution d'étudier la force mouvante des courants d'eau et d'air, c'est Huygens que l'on charge d'indiquer la méthode, d'imaginer les instruments, et c'est lui qui invente le gazomètre flottant. Il résume les conclusions de ces remarquables expériences dans un lumineux exposé et prouve que les forces sont proportionnelles aux carrés des vitesses.

Dans la Section de Mathématiques on met à l'ordre du jour l'examen des causes de la pesanteur. Chacun des membres doit donner son avis. Des sept Mémoires, c'est celui de Huygens qui est jugé digne d'un examen spécial. Le Mémoire de Huygens, en

effet, contient la majeure partie de son *discours sur la cause de la pesanteur*.

Les deux Sections de l'Académie se trouvaient très inégalement partagées quant à la valeur de leurs membres. Dans l'Assemblée des Mathématiques siégeaient les sept membres qui avaient été nommés les premiers : Huygens, de Carcavy, de Roberval, Frenicle, Buot, Picard et Mariotte; dans l'Assemblée de Physique, la Chimie, la science non encore née, était représentée par trois médecins, et nous savons par Molière ce qu'étaient les médecins de ce temps-là. On extrayait, sublimait et distillait tout ce qui venait sous la main. On mettait dans la cornue un melon entier, une autre fois quarante crapauds vivants.

Du Clos, médecin ordinaire du Roi, y donnait le ton. Il s'empara de la direction des recherches sur la coagulation. Elles durèrent d'avril à décembre, car elles embrassaient, dans une confusion inextricable, la congélation de l'eau, la coagulation des œufs, la formation de toutes sortes de précipités, le lait et le sang caillés, la plâtre durci, — et du Clos ne tarissait pas en discours interminables. Au milieu du galimatias général, Huygens, à son tour appelé à donner son opinion, est le seul qui fait entendre une parole sensée. Clairvoyant et profond comme toujours, il dit : « Les liquides se caractérisent par la mobilité de leurs particules, ainsi qu'il apparaît lorsqu'on fait tomber une goutte de vin dans l'eau : les parties colorées se dispersent dans tout le liquide. Dans un corps fixe les particules restent en place. Or la vitesse des particules diminue avec la chaleur. Il faut donc que les liquides se solidifient par le refroidissement. » Mais ce jugement remarquable n'empêche pas du Clos d'énoncer, comme la conclusion de huit mois de recherches, cette proposition :

« La cause de la concrétion des liqueurs est vraisemblablement la sécheresse : cette qualité étant opposée à l'humidité, qui rend les corps liquides, peut bien produire un effet opposé, qui est la concrétion des liquides. »

Les expériences sur la coagulation alternaient avec la dissection de toutes sortes d'animaux, choisis sans règle à mesure qu'ils se présentaient. Ce fut un jour le corps d'une femme suppliciée. Huygens devait y assister; il s'intéresse à l'œil, en mesure soi-

gneusement les dimensions, les rayons de courbure de la cornée et des deux faces du cristallin, et écrit dans son journal que le cristallin est mou et se laisse comprimer entre les doigts, et que ce doit être ce qui permet à l'œil de s'adapter à la vue des objets proches et éloignés, puisque le déplacement du cristallin en entier ne saurait y suffire. Pour Huygens, la découverte de l'accommodation de l'œil, annoncée deux siècles plus tard, était toute faite.

Ses occupations incessantes se trouvaient considérablement aggravées par les fréquents rapports qu'il avait à rédiger sur de prétendues inventions ou sur des Ouvrages nouvellement parus. Son activité devait sembler presque téméraire. Elle le fut, hélas! en effet. Après une maladie de quelques mois, Huygens dut être ramené dans la maison paternelle par son frère Louis. Il revint à Paris l'année suivante et écrivit son célèbre *Horologium oscillatorium*, dont presque chaque page contient une nouvelle invention de Mathématiques ou de Mécanique. Mais le mal revint à deux reprises, et chaque fois avec un caractère plus grave. Deux fois encore Huygens dut être transporté, comme un pauvre malade, dans sa patrie. Ce n'est que trois ans après la dernière attaque qu'il se sentit assez fort pour retourner à la tâche qui lui était devenue chère. Il était trop tard : ses premiers amis parisiens étaient tous morts, le généreux Colbert était remplacé par Louvois, et Louis XIV, abaissé jusqu'à devenir l'instrument du plus aveugle fanatisme. Ce fut en vain que, malgré son grand âge, son père Constantin essaya d'exercer son influence : la France était fermée pour Christian Huygens.

Dans les deux dernières périodes de son séjour à Paris, Huygens, en dehors de ses travaux mathématiques ininterrompus, a encore produit deux œuvres importantes : le *Traité de la Lumière* et la machine à poudre.

On a si peu fait attention à cette dernière invention qu'on s'étonnera peut-être de l'entendre nommer parmi la brillante série des travaux de Huygens. Les manuscrits de Leyde font connaître la place importante qui revient à cette découverte dans les annales de la civilisation.

Si, en remontant le cours des âges, on poursuit jusqu'à son origine l'histoire de la machine à vapeur, on rencontre successi-

vement les grands noms de Stephenson, Watt, Savary et Papin. Mais avec Papin nous ne sommes pas encore à la source première. Comment Papin a-t-il conçu l'idée d'un cylindre fermé par un piston mobile sous lequel on produit de la vapeur, de sorte qu'il puisse se soulever, et qui ensuite, lorsque la vapeur se refroidit et que l'espace intérieur du cylindre devient vide, est poussé en bas par le poids de l'atmosphère avec une force capable de soulever une lourde charge?

L'idée de se servir de la force du feu pour chasser l'air et d'employer ensuite le poids de ce dernier comme force motrice dérivée de celle du feu appartient à Huygens; sa première réalisation a été la machine à poudre. Celle-ci consistait en un cylindre fermé par un piston mobile et dans la paroi duquel, un peu au-dessous de la position la plus élevée du piston, on avait adapté de part et d'autre des canaux ouverts munis de soupapes de cuir mouillé, en forme de tubes. Un peu de poudre au fond du cylindre étant allumée, l'air du cylindre était chassé en même temps que les gaz incandescents qui sortaient par les tubes de cuir. Quand l'air atmosphérique revenait de même que dans une arme à feu déchargée, il fermait de lui-même les soupapes en cuir, et pressait le piston en bas avec une force que l'on pouvait employer à lever des fardeaux considérables.

On ne peut mieux comparer l'appareil qu'aux premières machines à gaz. Dans celles-ci également l'effet violent et désordonné de l'explosion n'est pas employé. Tandis que la tige à crémaillère du piston est projetée en haut par l'explosion, la roue dentée sur laquelle elle agit se trouve déclenchée de l'axe moteur : ce n'est que dans le mouvement descendant, lorsque le poids de l'atmosphère pousse le piston en bas, que la roue dentée fait tourner l'arbre. Remplacez, dans la machine de Huygens, la poudre par le gaz d'éclairage, et vous aurez la forme primitive de la machine à gaz telle que, en 1867, à l'Exposition de Paris, elle fit son entrée dans le monde industriel.

La machine ne fut pas seulement imaginée par Huygens : il la construisit, la mit en œuvre et la montra à Colbert. Son aide, dans ce travail, fut Papin. Celui-ci était venu s'établir à Paris en 1670; il fut adjoint à Huygens comme aide-préparateur au laboratoire de l'Académie. C'est dans la rue Vivienne qu'est née la machine

à vapeur. Quinze ans après, étant professeur à Marbourg, Papin s'est remis à reconstruire l'appareil de son maître, auquel il avait dédié son premier Livre. Après deux années de travail, il annonce à Huygens qu'on peut produire plus économiquement un vide plus parfait en se servant, au lieu de poudre, de la vapeur d'eau. Mais cette idée également venait de Huygens. Dans la liste des trente sujets à traiter dans l'Académie, ainsi que dans le programme présenté à Colbert, on trouve proposé l'essai de la force de l'eau raréfiée par le feu à la suite de celui de la poudre. On ne peut admettre que Huygens, travaillant à la machine à poudre assisté par son aide, avec lequel il fut pendant cinq ans en rapports journaliers, ne lui aurait pas dit que la vapeur d'eau pourrait servir au même but.

Papin s'est vainement efforcé de réaliser la première machine à vapeur sous une forme applicable dans la pratique. Il a lutté toute sa vie contre le destin de ceux qui, dans leurs efforts, inconsciemment, entrent en lutte avec d'inflexibles lois de progrès. Il fallait plus que la vie d'un homme pour établir l'usage industriel de la vapeur. Son application exigeait dans le travail des métaux et la construction des machines des progrès que la machine à vapeur devait elle-même rendre possibles. C'est pas à pas, l'une secondant l'autre, que la construction et l'application devaient progresser. Ce n'est pas au laboratoire du professeur, mais à l'usine, que l'emploi de la force motrice du feu devait grandir.

Huygens a compris à la fois l'utilité de son invention et les difficultés de l'exécution. L'esquisse qu'il traça, le 13 février 1678, dans son journal, porte l'inscription suivante. « Pour avoir toujours à son commandement un agent très puissant et qui ne coûte rien à entretenir comme font les chevaux et les hommes. » Et sa description se termine par cette remarque pratique. « Mais il seroit assez difficile de faire un cylindre en métal, d'égale largeur partout et bien uni. » Huygens n'a pas usé ses forces en une entreprise qu'il ne pouvait mener à bien : il estimait avoir fait assez en inventant le principe d'une nouvelle machine motrice et en montrant par l'expérience de quelle force elle serait capable si l'on parvenait à la bien conduire : il a passé à d'autres travaux.

Cependant Huygens doit être considéré comme l'inventeur de la machine à gaz et comme l'auteur spirituel de la machine à

vapeur. C'est de plein droit que, dans la cour d'entrée du bureau central des chemins de fer à Utrecht, dont la façade est ornée des bustes de Papin, Watt et Stephenson, sera placé le portrait en médaillon de Huygens avec cette légende :

Temporis invenit mensuram, ignisque movendi
Vim, fugiente die qua licet arte frui.

Le *Traité de la Lumière* nous introduit dans la sphère où le génie de Huygens prit son plus haut essor.

L'idée que tout l'espace est rempli d'une substance qui transmet le mouvement était d'origine ancienne. Pour Descartes, un espace vide ne pouvait exister; d'autres avaient déjà émis l'opinion que la lumière est transmise par les vibrations d'une matière répandue dans tout l'Univers. Des conceptions et hypothèses aussi peu définies n'avancent guère la Science, tant qu'elles sont impuissantes à rendre compte des plus simples phénomènes. Or on ne parvenait pas à expliquer, par leur moyen, la propriété fondamentale de la lumière, la propagation en ligne droite. Huygens résolut le problème. Par un admirable effort de son génie, la vague conjecture, précisée, discutée et poursuivie dans ses conséquences, devint la base d'une théorie qui expliquait non seulement la propagation rectiligne, mais aussi la réflexion et la réfraction des rayons lumineux. La singulière force d'abstraction qui distinguait son esprit, guidée par le raisonnement mathématique, lui fit découvrir dans les mystères débrouillés de la double réfraction la confirmation de sa théorie. Et aussitôt son œil embrassa dans toute son étendue le domaine où il avait, le premier, trouvé un terrain solide.

Plus d'une fois il avait attaqué le système de Descartes dans ses allégations arbitraires. Personne n'avait d'une main aussi audacieuse déchiré le tissu artificiel de la théorie des tourbillons. Aux yeux de plusieurs ce fut Huygens qui avait détruit entièrement ce système. Ce fut une erreur. Huygens en a conservé le noyau en ces deux thèses : « Tous les phénomènes de la nature doivent trouver leur explication dans les lois de la Mécanique », et puis : « Tout mouvement est la conséquence d'un autre transmis par contact immédiat ». Avec ces notions, *force* n'est qu'un terme par

lequel nous exprimons le lien de phénomènes de mouvement, telle la force d'élasticité, même celle de l'éther dont les vibrations constituent la lumière. C'est ici que l'imagination de Huygens s'élève à une conception hardie au-dessus de ce qu'avait jusqu'ici deviné l'esprit humain. Si l'éther, infiniment délié et mobile, est élastique, c'est-à-dire s'il se met en mouvement lorsque ses parties ne se trouvent pas coordonnées d'une manière déterminée, il faut qu'il existe une autre substance qui l'ébranle, un fluide qui le traverse et qui, dans son effort pour se procurer la plus grande liberté de mouvement possible, dispose la texture de l'éther dans l'état le plus approprié. Cette nouvelle substance doit, quant à la subtilité, être à l'éther ce que celui-ci est à la matière palpable. Et il n'y a aucune raison pour douter que cette deuxième substance ne soit suivie par une autre, et que l'échelle des degrés infinis de ténuités n'ait pas de limite. Elle peut s'étendre à l'infini des deux côtés. La même relation de cause à effet règne par tout l'Univers dans tous les degrés. Mais aussi, quand nous pouvons rattacher un phénomène aux propriétés d'une des substances élastiques de la chaîne, nous avons pénétré jusqu'à la dernière cause qui nous est accessible et nous nous trouvons devant la limite naturelle de toute science humaine : la compréhension de l'infini.

Le *Discours de la cause de la pesanteur* fournit une application trop peu appréciée de ces principes à l'explication de la gravité. Plus remarquable encore est une autre relative au magnétisme. Le manuscrit *De l'Aimant,* qui la contient, a été mis de côté par les premiers éditeurs des œuvres de Huygens comme une pièce inachevée; il n'a jamais été publié.

Le *Traité de la Lumière* et le *Discours sur la cause de la pesanteur* parurent trop tôt de plus d'un siècle : il y avait à peine trois ans que Newton avait publié, dans ses *Principia*, la loi de l'attraction universelle.

De même que l'hypothèse des vibrations lumineuses, celle d'une force attractive qui assujettit les planètes à leurs courbes n'était pas nouvelle. La loi des carrés, d'après laquelle la force diminuerait avec les distances, avait même été clairement énoncée par Boulliau et Borelli. Cependant, ici encore, quoiqu'il n'y eût

aucune incompatibilité avec des faits connus, les opinions émises ne furent que des conjectures. Newton, en établissant leur vérité, leur donna toute leur valeur scientifique. Les éléments de sa démonstration furent empruntés à l'*Horologium oscillatorium;* il a reconnu lui-même que le travail de Huygens en fut la base. En effet, la loi des forces centrifuges avait permis de calculer la force qui retient dans son orbite le satellite de la Terre. Les lois du pendule avaient fourni à Huygens la mesure exacte de la gravité à la surface de notre globe. Les deux termes de l'équation étaient ainsi donnés; réunis ils fournirent à Newton la pierre de fondation de son œuvre gigantesque.

La loi de l'attraction ne put satisfaire Huygens : la cause demeurait inconnue. Prétendre que deux corps sont poussés l'un vers l'autre parce qu'ils s'attirent, « c'était dire autant que rien ». Une action à distance lui parut une absurdité.

Au point de vue de la Science, on doit considérer comme une circonstance heureuse que la découverte de la loi d'attraction échût au plus jeune des deux grands penseurs, à celui qui, satisfait d'une connaissance moins profonde, reconnut aussitôt toute la valeur de son nouveau principe; qui, de plus, possédait dans le Calcul infinitésimal, encore tenu secret, l'instrument avec lequel il put opérer des prodiges.

Huygens et Newton différaient d'opinion en plusieurs questions importantes. Si le premier ne pouvait admettre que toutes les particules de la matière s'attirent, ne voyant pas comment on pourrait ramener cette action à un effet de mouvement, Newton a rejeté la théorie de la double réfraction et a même voulu la remplacer par une autre, contraire à l'expérience. Cependant ils reconnurent réciproquement leurs mérites. Dans son discours sur la pesanteur, Huygens énumère toutes les difficultés, en apparence insurmontables, que la loi de Newton avait heureusement résolues. Et lorsque le docteur Benthley demande à Newton quels livres il faut lire pour pouvoir comprendre les *Principia,* la réponse est une longue liste d'Ouvrages d'Euclide, de Descartes, Van Schooten, Jean de Witt, Gassendi, Mercator, formant ensemble un cours d'études complet, avec à la fin cette remarque : « Si toutefois vous pouvez vous procurer l'*Horologium oscilla-*

torium de Huygens, ce livre vous aidera bien mieux. » Éloge brillant donné tant à la richesse des matières qu'à la clarté de l'exposition.

Ils se connurent et furent amis. Le journal de Constantin Huygens, frère, rapporte, sous la date du 10 juillet 1689, le fait suivant : « Frère Christian vint avec le jeune M. Hambden et Fatio Dhuillier et M. Newton, le matin, à 7 heures, à Londres, dans le dessein de recommander ce dernier auprès du Roi pour une place vacante de régent dans un collège de Cambridge. » Huygens, Newton et Guillaume III réunis dans un même groupe, quel tableau ! Hélas ! le grand roi n'a reconnu la valeur d'aucun de ses deux visiteurs.

Lorsque Huygens disparut d'entre les vivants, l'antagonisme des théories et les rapports de leurs défenseurs prirent un autre caractère. Même dans la patrie du grand inventeur, les *Principia* eurent à soutenir une lutte acharnée contre d'anciennes erreurs. Cartésiens et newtoniens se trouvèrent face à face. Dans les luttes des partis, la sûreté de sa propre position et la ruine de son adversaire sont bientôt l'unique souci de chacun. Les écoles en querelle respectent peu ce qu'honoraient les maîtres.

Malgré la remarque irréfutée de Huygens que deux courants de projectiles ne peuvent pas, comme des rayons lumineux, se rencontrer sans perturbation réciproque, la théorie de l'émission, proposée par Newton, fut maintenue. Une substance qui, selon l'idée de Huygens, remplirait tout l'espace, parut incompatible avec l'ordre que la loi de l'attraction avait fait reconnaître dans le système solaire. Pour laisser libre carrière aux corps célestes, qui obéissaient avec une si étonnante exactitude à cette loi, l'Univers fut déclaré vide. Huygens, suspect aux cartésiens, gênant pour les newtoniens, fut écarté : c'est à peine si l'on citait son nom.

La ruine du système de Descartes, détruit par Huygens jusqu'à ses fondements, ne pouvait plus être dissimulée. L'admiration des *Principia* de Newton devint aussi générale qu'elle était justifiée. Bientôt Newton domina toute la Science rationnelle, et tel fut son ascendant qu'à la fin du siècle dernier on considérait comme une marque d'étroitesse d'esprit de ne pouvoir s'élever à la conception d'une action à distance. Lorsque Coulomb eut ramené les actions

électriques et magnétiques à la loi des carrés des distances, il semblait que le dernier mot fût dit sur ces phénomènes.

Ce fut l'expérience qui vint briser l'autorité empruntée à la prétendue omnipotence d'une formule mathématique. Au commencement de ce siècle, un médecin anglais, Young, fixa l'attention sur des phénomènes lumineux dont seule la théorie des ondulations pouvait rendre compte. Presque en même temps, un ingénieur français, Fresnel, sans connaître les travaux d'Young, entreprit une recherche pareille et sut l'étendre en une brillante série d'expériences concluantes. Dès que l'étude de la lumière eut retrouvé dans la théorie de Huygens son principe directeur, les découvertes se succédèrent sans relâche.

Dans les mêmes années où Foucault réussit à mesurer le rapport des vitesses de la lumière dans l'eau et dans l'air et porta ainsi le jugement final qui condamnait irrévocablement la théorie de l'émission, le roi des expérimentateurs, Faraday, fit entendre sa voix. L'expérience journalière, continuée pendant des années, des phénomènes magnétiques et électriques lui avait donné la profonde conviction que, dans l'espace qui sépare deux corps, il doit se trouver quelque chose qui produit les mouvements d'attraction et de répulsion apparentes, quelque modification se propageant de point en point et dont la direction est indiquée par ce qu'il appelait les lignes de force magnétiques et électriques. La forme et la disposition de ces courbes, leurs propriétés, la nature de la variation elle-même devaient, d'après lui, servir de base à toute recherche concernant le mécanisme de ces phénomènes. Faraday eut le courage de le déclarer de nouveau : une action directe à distance est peu probable.

Ce ne fut pas seulement dans ce dernier jugement que les idées de Huygens revivaient. L'opinion de Faraday, adaptée aux conceptions de Huygens, ne peut être résumée plus simplement et plus clairement que ne le fait l'exorde du *Traité de l'aimant*, qui pendant plus de deux siècles a dormi parmi les manuscrits de Leyde et dans les anciens Registres de l'Académie des Sciences de Paris : « Il paraît, dit Huygens, par les expériences de la limaille de fer répandue sur un carton qui couvre un aimant ou dans lequel on l'a enchâssé, qu'il y a quelque matière qui coule

à travers et autour de cette pierre, car la disposition de la limaille marque le chemin de ce mouvement, et elle en est ébranlée, ce qui ne se peut que par le moyen de quelque corps qui soit en mouvement. » Ces courants de force forment le point de départ des considérations de Huygens, et, en suivant cette trace pour trouver en grandeur et en direction le mouvement de deux aimants qui agissent l'un sur l'autre, il arrive à un résultat qui fournit, en données concrètes, une solution identique à la règle que l'abstraite Analyse mathématique déduit de la loi des carrés des distances.

Faraday, Maxwell, Hertz, ces trois noms nous représentent les trois pas importants qui nous ont ramenés et avancés sur la route indiquée et inaugurée par Huygens. Au deuxième centenaire de la fin de sa tâche, nous célébrons la résurrection de sa plus grandiose conception : la physique de l'impalpable.

Nous laissons-nous affliger par la pensée que la satisfaction du triomphe ne fut pas son partage? Ce serait méconnaître la hauteur de son âme. Sa raison était trop sûre et trop claire pour qu'il pût faiblir dans ses convictions. Quant aux honneurs, il ne les a jamais recherchés. Approfondir la nature autant qu'il pouvait, la contempler dans toute la sublimité accessible à l'intelligence humaine, c'était là sa joie.

Son dernier écrit, le *Kosmothéoros,* fut inspiré par le vœu d'associer à ces hautes jouissances ses amis, son frère d'abord, le camarade de ses jeux d'enfance, l'aide fidèle dans les fastidieux travaux manuels, le compagnon des longues veillées passées devant la lunette en discourant des secrets du ciel; puis d'autres, si possible, un cercle restreint d'élus, d'initiés. A ces intimes il voulut laisser l'impression du spectable merveilleux que révèle le tube optique, lorsque l'œil, dans un groupe d'étincelantes étoiles, aperçoit et embrasse un monde de systèmes solaires, et l'émotion qui nous saisit lorsque, détournant les regards, nous nous retrouvons devant le néant des choses humaines.

La plume tomba de ses mains, l'esprit qui avait répandu tant de lumière s'éteignit.

A nous, il légua plus qu'il ne pouvait donner à ses contemporains. La théorie de la lumière, qui dévoile la nature et les mouvements de l'invisiblement petit, nous manifesta dans l'étalement

du spectre des lueurs stellaires l'essence des corps célestes; elle nous permit de découvrir dans un point lumineux indivisible des soleils gravitant autour de leur centre commun, de mesurer leurs vitesses vertigineuses et de distinguer ainsi, dans les ténues ondulations de l'océan éthéré qui arrivent à nos yeux après des années de traversée, la nature et les mouvements de l'invisiblement loin.

Christian Huygens, noble par le cœur, par l'esprit, par les travaux de son rare génie, continue de nous guider et de nous éclairer dans nos plus hautes aspirations : connaître la nature, approcher du sublime Infini.

J. Bosscha.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN (F.). — VORTRÄGE ÜBER AUSGEWÄHLTE FRAGEN DER ELEMENTARGEOMETRIE AUSGEARBEITET VON F. TÄGERT. v-66 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1895.

Ces quelques pages, destinées à conserver le souvenir d'une Leçon de M. Klein à une assemblée de professeurs de gymnase, seront lues avec un vif intérêt. Elles se rapportent à des questions qui se posent nécessairement dans l'enseignement élémentaire et que, à la vérité, on n'y peut guère aborder, non que les solutions supposent des connaissances élevées, mais parce qu'elles exigeraient des élèves trop de temps et peut-être trop d'efforts. Pour les élèves comme pour les maîtres, il est singulièrement incommode d'aller chercher les solutions de ces questions inévitables dans les diverses collections des journaux mathématiques, dans des Mémoires qui ne contiennent pas toujours d'une façon explicite ce que l'on y cherche, et dont la lecture peut être hérissée de difficultés. On saura donc gré à l'éminent professeur de Goettingen de cette précieuse marque d'intérêt pour l'enseignement élémentaire. Est-il besoin de dire qu'il a traité des divers sujets qu'il a abordés avec un esprit vraiment philosophique et pédagogique, de manière à bien dégager la nature des questions et la marche des solutions? Il a voulu aussi ajouter à ses exposés dogmatiques quelques aperçus historiques très brefs, mais très nets et où tout est essentiel.

C'est tout d'abord des constructions au moyen de la règle et du compas qu'il s'occupe. Parmi les divers Traités d'Algèbre supérieure, il n'y a, paraît-il, que le Livre de M. Petersen où ce sujet soit abordé. M. Klein montre comment une expression algébrique portant sur des données qui doivent rester indéterminées et où ces données n'entrent que rationnellement ou sous des radicaux de second degré, qui peuvent d'ailleurs être en nombre quelconque et superposés les uns aux autres, satisfait à une équation algébrique d'ordre 2^n, dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité constitué par les données indéterminées et qui, dans ce domaine, est *irréductible*. Si donc une expression est ra-

cine d'une équation irréductible dans le même domaine, et dont le degré n'est pas une puissance de 2, on peut affirmer qu'il est impossible de la construire au moyen de la règle et du compas. D'où, par exemple, résulte l'impossibilité du problème délique, et de la trisection de l'angle. Le même théorème sert à montrer l'impossibilité de l'inscription, au moyen de la règle et du compas, d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est premier et n'est pas de la forme $2^n + 1$; quant à ces derniers, M. Klein se borne au cas du polygone de 17 côtés, de manière à faire pressentir la méthode générale, et à exposer, dans ce cas particulier, la solution avec tous ses détails. Cette exposition est un modèle d'élégance et de clarté. La construction est faite au moyen d'un seul cercle. L'auteur s'occupe ensuite des nombres e et π; pour le nombre e, c'est la démonstration de M. Gordan qu'il expose, et pour π, il établit les résultats que l'on doit à M. Lindemann. Il va sans dire que M. Klein rend pleine justice au géomètre profond dont les recherches, comme tout le monde en convient, sont et resteront la véritable source de nos connaissances touchant ces nombres célèbres. J. T.

LAZZERI (G.) E BASSANI (A.). — ELEMENTI DI GEOMETRIA. Libro di testo per l'Accademia Navale. In-8°, XIX-455 p. Livorno, R. Giusti, 1891.

Les auteurs ont suivi la méthode de la fusion de la Planimétrie avec la Stéréométrie, dont on avait eu des exemples peu nombreux mais remarquables, entre autres le beau Traité de De Paolis (*Elementi di Geometria;* Torino, 1884). Leur expérience personnelle dans l'enseignement a été, comme ils le disent, favorable à cette méthode. Ils ont mis très justement grand soin dans le choix des vérités que l'on admet sans démonstration, et cherché de les énoncer toujours explicitement, ce que l'on ne fait pas dans tous les Traités. A ce propos, nous trouvons à remarquer que le postulatum qu'ils substituent à celui de la parallèle (p. 34) n'est pas aussi bien choisi que les autres, et, de plus, que sa première partie, regardant la bande comprise entre deux parallèles, pourrait être supprimée, en faisant dépendre l'inversion de la bande de

celle du segment. La théorie des proportions est faite arithmétiquement. C'est là une modification importante dans un Traité qui est dans tout le reste purement synthétique, mais les auteurs en donnent de bonnes raisons : la nécessité où l'on se trouverait d'introduire le concept de nombre entier au moins, même en traitant les proportions géométriquement, et surtout la clarté sans doute plus grande que la définition des grandeurs proportionnelles acquiert par la voie arithmétique. Nous croyons que même ceux qui voudront discuter cette innovation seront forcés de l'apprécier comme une chose sérieusement méditée, ainsi que toutes les autres parties de cet Ouvrage, que l'on peut dire un livre bien fait. Plus de mille exercices, en partie nouveaux, placés à la fin des différents Chapitres de ce Traité, ne font qu'en augmenter l'importance et l'utilité.

BÔCHER (M.). — Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Mit einem Vorwort von *F. Klein.* 1 vol. in-8°, VIII-258 p. Leipzig, Teubner, 1894.

L'intéressant travail de M. Maxime Bôcher est le développement d'un Mémoire remis en 1891 à la Faculté philosophique de Goettingue, pour répondre à une question qu'elle avait mise au concours.

On y demandait de déterminer les développements en série propres à représenter une fonction potentielle ayant des valeurs prescrites sur la surface d'un corps limité par six cyclides confocales, de manière à pouvoir embrasser d'un seul point de vue les divers développements en série, auxquels a donné lieu la théorie du potentiel, en regardant comme des déformations d'un système de cyclides confocales les différents systèmes triplement orthogonaux que l'on avait eus à considérer jusqu'à ce jour. M. Klein, qui a sans doute été l'inspirateur de cette belle question, et qui a honoré d'une courte préface le Livre de M. Bôcher, avait communiqué à ses auditeurs (1889-1890) des résultats concernant l'équation de Lamé dont l'auteur a tiré grand parti et dont il a fait ressortir l'importance. Il importe de rappeler aussi les deux Notes

de M. Darboux (1876) sur l'application des méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 1037 et 1099.)

La première partie du Livre de M. Bôcher est purement géométrique; suivant une habitude qui est assez fréquente en Allemagne, et qui a ses avantages, il reprend les choses au début et ne craint pas de développer en détail les théories géométriques dont il aura besoin; à le voir, au début, démontrer que tous les cercles d'un plan ont deux points communs à l'infini, ou reprendre les principes de la théorie de l'inversion, un lecteur français ne se douterait pas du haut problème d'analyse qui est l'objet essentiel de l'auteur. Il convient de dire, toutefois, que ces théories élémentaires sont traitées d'une façon large et philosophique. M. Bôcher développe ensuite la théorie des coordonnées tétracycliques ou pentasphériques, classe les cycliques et les cyclides et décrit avec détail, dans les différents cas, les figures formées par un faisceau de cycliques ou de cyclides confocales; il étudie, dans les différents cas encore, les systèmes de coordonnées qui naissent de la considération des cyclides confocales, et qui se substituent aux coordonnées pentasphériques, comme les coordonnées elliptiques se substituent aux coordonnées orthogonales.

Après ces préliminaires géométriques, qui occupent un bon tiers du volume, M. Bôcher passe à l'étude de l'équation de Lamé. Il définit comme telle une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels, partout régulière [1], ayant à distance finie les points singuliers e_1, e_x, ..., e_n, auxquels correspondent les exposants o, $\frac{1}{2}$, et pour laquelle le point ∞ est un point improprement singulier. Une telle équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{f'(x)}{2f(x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\psi(x)}{4f(x)}y=0,$$

---

(1) C'est-à-dire que, en chaque point x_0, il existe deux solutions distinctes de la forme

$$(x-x_0)^k\,[1+A(x-x_0)+B(x-x_0)^2+\ldots],$$
$$(x-z_0)^{k_1}[1+A_1(x-x_0)+B(x-x_1)^2+\ldots];$$

au point x_0 correspondent les exposants k, k_1; si l'on a $k=0$, $k_1=1$, le point est ordinaire: si l'on a $k-k_1=1$, le point est improprement singulier.

où l'on a mis $f(x)$ à la place du produit

$$(x - e_1)(x - e_2)\ldots(x - e_n)$$

et $\psi(x)$ à la place du polynome

$$-\frac{n(n-4)}{4}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)x^{n-3}$$
$$+ \mathrm{A}x^{n-4} + \mathrm{B}x^{n-5} + \ldots + \mathrm{M};$$

A, B, ..., M sont des constantes dites *accessoires*. Cette équation, dont toute solution sera dite une fonction de Lamé, peut se transformer de diverses manières, en particulier par le changement de variable indépendante que définit l'équation

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{f(x)}};$$

une autre transformation intéressante consiste à introduire des variables indépendantes homogènes.

L'étude des courbes (courbes de Lamé) représentées par une solution de l'équation de Lamé, en se plaçant, bien entendu, dans le cas des variables réelles, conduit à des résultats importants, dûs à M. Klein. On reconnaît d'abord, en général, à cause de la nature des points singuliers $e_1, e_2, e_3, \ldots$, qu'une telle courbe (formant un trait continu) doit rester, en général, entre les deux parallèles à l'axe des y, dont les abscisses sont deux des nombres consécutifs $e_1, e_2, \ldots$; en d'autres termes, pour une telle courbe, l'abscisse x doit rester dans un des *intervalles* limités par ces nombres. C'est surtout le cas de $n = s$ qu'il importe de considérer, en vue des applications ultérieures; dans ce cas, l'équation de Lamé, quand on a pris la variable t pour variable indépendante, prend la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left[-\frac{f''(x)}{16} + (ax + b)\right]y,$$

où l'on rappelle que x et t sont liés par la relation

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{f(x)}};$$

l'équation (1), si l'on y regarde la variable t comme représentant

le temps, peut être regardée comme définissant le mouvement d'un point matériel situé sur l'axe des y et attiré vers l'origine par une force égale à

$$\left[\frac{f''(x)}{16} - (ax + b)\right] y;$$

si l'on considère deux époques t_1, t_2 correspondant à deux valeurs m_1, m_2 de x, nécessairement comprises dans le même intervalle, il est clair qu'on pourra déterminer les constantes accessoires a, b de manière que la quantité entre crochets soit aussi grande qu'on le voudra quand t varie de t_1 à t_2, ou quand x varie de m_1 à m_2; le point matériel pourra faire ainsi autant d'oscillations qu'on voudra; on est amené ainsi à se demander si l'on peut déterminer les constantes accessoires de manière que le nombre de demi-oscillations soit précisément égal à m; on aperçoit là un sujet de recherches assez délicates, dans le détail desquelles il nous est impossible d'entrer et qui conduit à la proposition suivante : Si l'on considère sur l'axe des abscisses deux intervalles, puis, sur chacun d'eux, un segment arbitraire m_1, m_2, n_1, n_2, on peut, et cela d'une seule façon, déterminer les constantes accessoires a, b de l'équation de Lamé ($n = s$), de manière qu'il existe deux solutions particulières représentées par des courbes dont la première fasse précisément m demi-oscillations dans le segment $m_1 m_2$ et la seconde précisément n demi-oscillations dans le segment $n_1 n_2$. On conçoit, d'ailleurs, que la détermination des constantes a, b dépende d'équations transcendantes fort compliquées.

Reprenant ensuite l'analyse de M. Darboux, l'auteur montre comment l'équation du potentiel se transforme en coordonnées pentasphériques x_1, x_2, ..., x_5 vérifiant l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_i^2 = 0,$$

puis en coordonnées *cyclidiques* μ, ν, ρ, ces trois coordonnées n'étant autre chose que les racines de l'équation du troisième degré en λ,

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0,$$

ou, si l'on veut, les trois paramètres qui définissent les trois cyclides confocales qui passent par le point $x_1, x_2, \ldots, x_5$.

On trouve alors qu'une fonction potentielle V peut se mettre sous la forme $T\psi(\mu, \nu, \rho)$, T étant une fonction qui s'exprime simplement au moyen de x, et ψ devant vérifier une certaine équation aux dérivées partielles, transformée de l'équation $\Delta V = 0$. En cherchant à vérifier l'équation en ψ par un produit de la forme

$$E'(\mu)\,E''(\nu)\,E'''(\rho),$$

on trouve que les quantités $E'(\lambda)$, $E''(\lambda)$, $E'''(\lambda)$ sont trois solutions de l'équation de Lamé ($n = 5$),

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \left[-\frac{5\lambda^3}{4} + \frac{3\lambda^2}{4}\sum_{i=1}^{i=5} e_i + A\lambda + B\right] E,$$

où les paramètres accessoires A, B sont arbitraires.

Considérant ensuite un corps limité par six cyclides confocales, l'auteur, au moyen des remarques antérieures sur les oscillations des courbes de Lamé, montre comment on peut déterminer les paramètres accessoires A, B, de manière à faire correspondre à chaque système de nombres entiers positifs m, n un produit

$$E'_{m,n}(\mu)\,E''_{m,n}(\nu)\,E'''_{m,n}(\rho)$$

qui soit nul sur *cinq* des faces des corps, puis déterminer les coefficients $B_{m,n}$ de la série double

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} B_{m,n}\,E'_{m,n}(\mu)\,E''_{m,n}(\nu),$$

pour que la somme de cette série ait une valeur prescrite $f(\mu, \nu)$. On parvient ainsi à former une série double dont la somme est nulle sur cinq des faces et a des valeurs prescrites sur la sixième; on en déduit le moyen de former une fonction potentielle qui ait des valeurs prescrites sur les six faces.

M. Bôcher est le premier à faire observer tout ce que cette solution, si intéressante qu'elle soit, présente d'imparfait. Il n'a pas abordé le problème de la convergence; sur cette question de la convergence, il émet d'ailleurs des idées très justes, en disant

que la question a deux faces suivant qu'on se place au point de vue de l'Analyse mathématique ou des applications : dans ce dernier cas, la convergence n'offre d'intérêt que si elle est suffisamment rapide, et à une convergence complète il faudrait préférer une semi-convergence pourvu qu'elle permît une approximation suffisante en calculant un petit nombre de termes; malheureusement, comme le fait observer l'auteur, rien ne permet de dire, dans la solution considérée, si l'on est dans un cas ou dans un autre, et il faut se contenter de poser le problème; d'ailleurs le calcul de chaque terme de la série présente déjà de grandes complications, à cause de la façon transcendante dans les paramètres accessoires A, B dépendent des nombres m, n; sans compter que l'on n'a à sa disposition aucune représentation simple des fonctions de Lamé qui en permette le calcul effectif. La valeur de la solution donnée par M. Bôcher est surtout théorique; mais, à ce point de vue, sa portée est indéniable, comme le montre la troisième Partie du Livre, où l'auteur étudie en détail les divers cas de dégénérescence, suivant le degré de multiplicité des points singuliers de l'équation de Lamé; il est à peine utile de dire que cette étude exige beaucoup de soin et de sagacité. Un résumé historique des diverses recherches particulières que l'auteur se trouve avoir ainsi embrassées termine cette troisième Partie. Enfin, on trouvera à la fin du volume, en Appendice, quelques indications sur l'extension du problème à l'espace à n dimensions.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES DE PUISSANCES ET LES FONCTIONS MAJORANTES;

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.
Professeur au Lycée de Douai.

Dans ce qui va suivre, nous ne nous occuperons que de variables réelles.

I. Soit une série

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

dont tous les coefficients sont positifs et supérieurs à un nombre fixe A, et qui est supposée absolument convergente si $|x| < \delta$, $(\delta < 1)$.

Soit x_0 une valeur de x comprise dans cet intervalle, en x_0 la fonction $f(x)$ sera encore développable en une série

$$\sum a'_n (x - x_0)^n,$$

et il semble tout naturel, par raison de continuité, d'admettre que, si x_0 est suffisamment petit, cette nouvelle série aura encore tous ses coefficients positifs.

C'est évident, si $x_0 > 0$, puisque ces coefficients seront des séries à termes positifs; mais il n'en est plus forcément de même si l'on donne à x_0 une valeur négative $-z$, et je vais montrer qu'il existe des séries telles que $f(x)$ qui auront des dérivées négatives, si petite que soit la quantité z.

En cherchant à rendre positives, pour $x = -z$, les dérivées successives de $f(x)$, on est conduit, en forçant les inégalités obtenues, à considérer des séries dont les coefficients sont alternativement A et $\frac{B}{\beta^n}$, A, B, β étant des nombres positifs et en outre

$\beta < 1$. Plus généralement, considérons la série

$$\varphi(x) = 2A + \frac{2B}{\beta}x + \frac{2A}{\alpha^2}x^2 + \frac{2B}{\beta^3}x^3 + \frac{2A}{\alpha^4}x^4 + \ldots,$$

dans laquelle on a

$$a_{2p} = \frac{2A}{\alpha^{2p}}, \qquad a_{2p+1} = \frac{2B}{\alpha^{2p+1}}, \qquad \beta < \alpha < 1.$$

C'est bien une série satisfaisant aux conditions imposées au début et elle est absolument convergente si $|x| < \beta$.

On peut écrire

$$\varphi(x) = 2A\left(1 + \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^4}{\alpha^4} + \ldots\right) + 2B\left(\frac{x}{\beta} + \frac{x^3}{\beta^3} + \frac{x^5}{\beta^5} + \ldots\right)$$

et par suite

$$\varphi(x) = A\left[\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\alpha}}\right] + B\left[\frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{\beta}}\right].$$

On aura

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{A}{\alpha^n}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{n+1}}\right] + \frac{B}{\beta^n}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{n+1}}\right].$$

Faisons $n = 2p$ et $x = -z$

$$\frac{\varphi^{2p}(-z)}{1.2\ldots 2p} = \frac{A}{\alpha^{2p}}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}}\right] - \frac{B}{\beta^{2p}}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)^{2p+1}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{\beta}\right)^{2p+1}}\right].$$

Quelle que soit la valeur z, inférieure à β, les deux termes de cette différence sont positifs. Considérons le rapport

$$\frac{\frac{A}{\alpha^{2p}}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^{2p+1}}\right]}{\frac{B}{\beta^{2p}}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)^{2p+1}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{\beta}\right)^{2p+1}}\right]}.$$

On peut l'écrire

$$\frac{A\alpha}{B\beta}\times\frac{1+\left(\frac{\alpha-z}{\alpha+z}\right)^{2p+1}}{1-\left(\frac{\beta-z}{\beta+z}\right)^{2p+1}}\times\left(\frac{\beta-z}{\alpha-z}\right)^{2p+1}.$$

Lorsque p croît indéfiniment, ce rapport tend vers o, car le premier facteur est constant, le second tend vers 1, et le dernier tend vers o en vertu de l'hypothèse $\beta<\alpha$. Il en résulte que, quelle que soit la valeur de z, aussi petite que l'on voudra, il existera toujours une valeur correspondante de p à partir de laquelle le rapport précédent deviendra et restera toujours inférieur à 1 et par suite à partir de laquelle on aura

$$\frac{\varphi^{(2p)}(-z)}{1.2\ldots 2p}<0.$$

Ce résultat peut encore exister, même pour des séries dont tous les coefficients restent finis. Considérons en effet la série

$$2A+2Bx+2Ax^2+2Bx^3+\ldots,$$

dans laquelle on a

$$a_{2p}=2A,\qquad a_{2p+1}=2B,\qquad 0<A<B;$$

c'est $\varphi(x)$ où l'on suppose $\alpha=\beta=1$, $A<B$.

On sera conduit à étudier un rapport analogue au précédent, mais qui se réduira à

$$\frac{A}{B}\times\frac{1+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2p+1}}{1-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2p+1}}.$$

Quand p croîtra indéfiniment, il aura pour limite $\frac{A}{B}$ et comme, par hypothèse, on a $\frac{A}{B}<1$, les conclusions précédentes subsisteront encore.

Le même fait peut se produire pour des séries à un nombre quelconque de variables.

Considérons une série $\Phi(x, x_1, x_2, \ldots)$, ordonnée suivant les puissances de x, x_1, x_2, ... et dont tous les coefficients ont une valeur positive constante C, à l'exception de ceux des termes de la

forme x^n qui sont $\frac{A}{\alpha^n}$ ou $\frac{B}{\beta^n}$ suivant que n est pair ou impair, A, B, α, β étant les constantes de la fonction $\varphi(x)$ précédemment étudiée.

Cette série Φ a bien tous ses coefficients supérieurs à un nombre positif fixe, elle est absolument convergente quand toutes les variables ont des modules inférieurs à β, et je dis que l'on peut trouver des valeurs x, x_1, x_2, ... aussi petites que l'on veut pour lesquelles Φ a des dérivées négatives. Il suffit, pour le voir, de considérer, pour un système $x = -z$, $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, z étant une quantité positive aussi petite que l'on veut, les dérivées d'ordre pair prises par rapport à x seulement. On a évidemment

$$\left[\frac{\partial^{2p}\Phi}{\partial x^{2p}}\right]_{\substack{x=-z \\ x_1=x_2=\ldots=0}} = \left[\frac{\partial^{2p}\Phi(x, 0, 0, \ldots)}{\partial x^{2p}}\right]_{x=-z} = \varphi^{(2p)}(-z);$$

donc, pour des valeurs de p suffisamment grandes, ces dérivées seront négatives.

II. Pour ne pas compliquer inutilement, nous ne considérerons que des fonctions de deux variables réelles x et y.

Soit

$$f(x, y) = \sum a_{ik}(x - x_0)^i (y - y_0)^k,$$

une série absolument convergente au voisinage de $m_0(x_0, y_0)$.

On sait qu'il existe toujours des séries qui seront majorantes pour cette série f. C'est-à-dire des séries

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum \alpha_{ik}(\xi - \xi_0)^i (\eta - \eta_0)^k,$$

à coefficients positifs, absolument convergentes au voisinage de $\mu_0(\xi_0, \eta_0)$ et telles que l'on ait, quels que soient i et k,

$$\alpha_{i,k} \geqq |a_{i,k}|.$$

M. Poincaré indique cette dépendance des fonctions f et φ par la notation

$$f(x, y)_{m_0} \ll \varphi(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

Supposons en plus que l'égalité soit exclue, c'est-à-dire que l'on ait toujours

$$\alpha_{i,k} \geqq |a_{i,k}| + A,$$

A étant une constante positive. Nous exprimerons ce fait par

$$f(x, y)_{m_0} < \varphi(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

Il semble alors tout naturel, par raison de continuité, d'admettre que la propriété se conserve pour les points voisins, ou, pour être plus précis, d'admettre que l'on pourra déterminer deux régions r et ρ entourant respectivement m_0 et μ_0 et telles que, m désignant un point quelconque de r et μ un point quelconque de ρ, on ait toujours

$$f(x, y)_m \leqslant \varphi(\xi, \eta)_\mu.$$

Ce que nous avons vu précédemment nous montre immédiatement que cette propriété générale n'existe pas, car, quoique la fonction φ ait, en μ_0, tout ses coefficients positifs et supérieurs à un nombre fixe non nul, il n'en résulte pas qu'il en sera encore ainsi pour les points voisins.

On peut même en donner des exemples. Soit $\varphi(\xi, \eta)$ une des séries à plusieurs variables formées à la fin de la première partie et dont tous les coefficients sont supérieurs à une constante positive u. Prenons v telle que

$$0 < v < u$$

et formons une série $f(x, y)$ en $x - x_0$, $y - y_0$ dont tous les coefficients seront compris entre $-v$ et $+v$.

La série $f(x, y)$ est absolument convergente dans le même rectangle que $\varphi(\xi, \eta)$ et l'on a toujours

$$\alpha_{i,k} \geqq |a_{i,k}| + u - v.$$

On a donc bien

$$f(x, y)_{m_0} < \varphi(\xi, \eta)_{\mu_0}$$

et nous avons vu que l'on peut trouver des points μ, aussi voisins de μ_0 que l'on veut, et où le développement de φ présente des coefficients négatifs et, par suite, où φ ne peut plus être une fonction majorante.

Il n'y a donc pas là une propriété générale; néanmoins, dans les applications, on peut toujours supposer que les fonctions majorantes employées la possèdent; cela résulte immédiatement de ce que le choix des fonctions majorantes initiales est, en général, arbitraire et de la propriété suivante, que nous allons démontrer.

$f(x, y)$ étant une fonction analytique dans un domaine R,

quel que soit le domaine r, intérieur à R, il est toujours possible de trouver une fonction φ(ξ, η) et un domaine ρ dans le plan des ξ, η de façon que la fonction φ soit analytique dans tout ρ et, qu'en désignant par m et μ deux points quelconques, situés respectivement dans r et ρ, on ait toujours

$$f(x, y)_m < \varphi(\xi, \eta)_\mu.$$

En tout point m de r, la fonction f est développable en série ordonnée et nous savons former une série majorante

$$\psi_m(\xi, \eta) = \frac{M_m}{\left(1 - \frac{\xi - \xi_0}{\delta_m}\right)\left(1 - \frac{\eta - \eta_0}{\delta'_m}\right)}.$$

Soit M le maximum de M_m dans r et de même Δ le minimum de δ_m et δ'_m. On aura, quel que soit m,

$$\left|\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f(x, y)}{\partial x^i\,\partial y^k}\right)_m\right| \leqq \frac{M_m}{\delta_m^i\,\delta_m'^k} \leqq \frac{M}{\Delta^{i+k}},$$

de sorte que si l'on considère la fonction

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\xi - \xi_0}{D}\right)\left(1 - \frac{\eta - \eta_0}{\Delta}\right)},$$

on aura

$$f(x, y)_m \leqslant \varphi(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

Ceci posé, prenons une fonction de même forme

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{N}{\left(1 - \frac{\xi - \xi_0}{\Delta}\right)\left(1 - \frac{\eta - \eta_0}{D}\right)},$$

et assujettissons le point $\mu(\xi, \eta)$ aux conditions

$$|\xi - \xi_0| < D\varepsilon, \qquad |\eta - \eta_0| < D\varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

qui définissent un rectangle ρ ayant μ_0 comme centre. En tout point μ de ρ, la fonction φ aura évidemment toutes ses dérivées positives et en outre on aura

$$\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k}\varphi(\xi, \eta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^k}\right)_\mu$$

$$= \frac{1}{D^{i+k}} \times \frac{N}{\left(1 - \frac{\xi - \xi_0}{D}\right)^{i+1}\left(1 - \frac{\eta - \eta_0}{D}\right)^{k+1}} \geqq \frac{1}{D^{i+k}} \times \frac{N}{(1+\varepsilon)^{i+k+2}}.$$

Cherchons si l'on peut déterminer N, D et ε de façon que la différence

$$\frac{1}{D^{i+k}} \times \frac{N}{(1+\varepsilon)^{i+k+2}} - \frac{M}{\Delta^{i+k}}$$

soit supérieure à un nombre positif donné A, quels que soient i et k.

Il faut d'abord, pour que cette quantité reste toujours positive, que le rapport

$$\frac{\dfrac{M}{\Delta^{i+k}}}{\dfrac{1}{D^{i+k}} \times \dfrac{N}{(1+\varepsilon)^{i+k+2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{M(1+\varepsilon)^2}{N} \times \left(\frac{D(1+\varepsilon)}{\Delta}\right)^{i+k}$$

reste toujours inférieur à 1, condition certainement réalisée si l'on a

$$\frac{M(1+\varepsilon)^2}{N} < 1, \qquad \frac{D(1+\varepsilon)}{\Delta} < 1.$$

En écrivant alors la différence sous la forme

$$\frac{N}{(1+\varepsilon)^2} \times \frac{1}{(D(1+\varepsilon))^{i+k}} \left[1 - \frac{M(1+\varepsilon)^2}{N} \times \left(\frac{D(1+\varepsilon)}{\Delta}\right)^{i+k}\right],$$

on voit que le second facteur croît constamment avec $i+k$, il en sera de même du premier et par suite du produit si l'on a

$$D(1+\varepsilon) < 1.$$

Dans ces conditions, la différence sera toujours égale ou supérieure à sa valeur pour $i+k=0$, de sorte qu'il ne restera plus à vérifier que l'inégalité

$$\frac{N}{(1+\varepsilon)^2} - M > A,$$

laquelle entraîne forcément la première écrite.

Pour les résoudre, on se donnera arbitrairement un nombre ε inférieur à 1. On prendra ensuite D inférieur au plus petit des deux nombres $\frac{\Delta}{1+\varepsilon}$ et $\frac{1}{1+\varepsilon}$ et enfin N supérieur à $(A+M)(1+\varepsilon)^2$.

La fonction φ étant ainsi construite, on aura

$$\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\eta^k}\right)_\mu \geqq \frac{1}{D^{i+k}}\,\frac{N}{(1+\varepsilon)^{i+k+2}} \geqq \frac{M}{\Delta^{i+k}} + A \geqq \left|\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i\,\partial y^k}\right)_m\right| + A.$$

Autrement dit, quels que soient les points m et μ dans r et ρ on aura

$$f(x, y)_m < \varphi(\xi, \eta)_\mu.$$

On peut exprimer ce fait en disant que, dans le domaine ρ, la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ est majorante relativement à la fonction $f(x, y)$ dans le domaine r, et on pourra l'exprimer par la notation

$$f(x, y)_r \ll \varphi(\xi, \eta)_\rho.$$

On pourrait, en suivant la même marche, trouver une fonction φ restant, dans tout un domaine ρ, majorante pour plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dans leurs domaines respectifs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (¹).

En outre, on peut remarquer que la démonstration ne suppose pas que les x et les y, qui correspondent aux points m, sont réels; de sorte que la propriété existe, même si les domaines r sont imaginaires, c'est-à-dire comprennent des points m qui correspondent à des valeurs imaginaires de x et y.

(¹) Dans un Mémoire récent [*Sur les equations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* (*Annales de l'École normale,* Suppl. 1895)]. je me suis servi des fonctions majorantes pour établir un lemme fondamental. J'y étais arrivé en me fondant sur les calculs que je viens de développer en dernier lieu; mais dans la rédaction définitive, pour plus de rapidité, j'avais admis, comme évidente, la propriété générale que je viens de démontrer être fausse. Il suffit, pour rétablir la démonstration primitive et la rigueur absolue, au lieu d'admettre que les fonctions majorantes initiales conservent leur propriété pour les points voisins, de dire que ces fonctions ont été choisies de façon qu'il en soit ainsi.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NEPERUS. — MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS CONSTRUCTIO, ETC., reproduction phototypique de l'édition de Lyon, 1620. 62 p. in-8°. Paris, Hermann; 1895.

On sait qu'il existe, sur les logarithmes, deux Ouvrages, d'ailleurs rarissimes, de leur inventeur John Napier : le premier, la *Descriptio*, publié en 1614, ne parle guère que de l'usage de la Table qui s'y trouve et qui donne pour toutes les minutes du quart de cercle les sinus et cosinus naturels, les logarithmes (¹) des sécantes et cosécantes, ainsi que ceux des tangentes (ou cotangentes). C'est le second, la *Constructio*, qui est le plus important au point de vue théorique, puisqu'il expose avec détail le mode de calcul, très remarquable, imaginé par Napier.

Composée certainement dès avant 1614 (l'expression de logarithme ne s'y trouve pas encore; Napier dit *numerus artificialis*), la *Constructio* a été éditée deux ans après la mort de l'auteur par son fils Robert (Edimbourg, 1619), qui y joignit un *Appendix* (où John Napier propose un système de logarithmes revenant à celui aujourd'hui en usage (²), des *Propositiones* de Trigonométrie sphérique (où figurent les Analogies), ainsi que des additions de Henri Briggs sur ces deux sujets.

L'opuscule fut réimprimé, sans modifications, dès l'année suivante, avec privilège pour la France et l'Allemagne, à Lyon, par Barthélemy Vincent (et non pas à Leyde, comme l'indiquent à tort plusieurs Ouvrages de bibliographie). Sa reproduction phototypique, sera sans nul doute accueillie avec faveur par tous les mathématiciens; mais parviendra-t-elle à dissiper toutes les

(¹) Ce mot étant pris dans le sens ordinaire et non pas d'après la définition de Napier.

(²) Plus exactement un système où le logarithme de l'unité est 0 et le logarithme de 10 est, non pas l'unité, mais 10^{10}, ce qui revient, dans nos logarithmes ordinaires, à déplacer la virgule de 10 rangs vers la droite. C'est dans les additions de Briggs que la base 10 est indiquée, avec la propriété de la caractéristique.

tenaces erreurs qui subsistent à propos du véritable caractère de l'invention de Napier?

Ce n'est pas qu'il manque de bonnes analyses de la *Descriptio* et de la *Constructio;* par exemple on peut citer celle de M. Cantor, au second Volume de ses *Vorlesungen* (pages 666 à 673). Mais on ne peut pas tout discuter dans une analyse, et dans la difficulté de recourir aux sources, les controverses sur des points importants se renouvellent inutilement.

Avant tout, il serait essentiel de faire disparaître le malencontreux usage d'employer le terme de *logarithme népérien* comme synonyme de logarithme naturel ou hyperbolique.

Les nombres de Napier sont, en effet, absolument différents, son but était de simplifier, avant tout, les calculs trigonométriques, les seuls qui, de son temps, eussent une importance réelle. D'après les habitudes d'alors, il a représenté le rayon par une puissance A de 10 (en fait $A = 10^7$), les sinus, dès lors, par des nombres inférieurs; il a affecté d'autre part le zéro comme logarithme au rayon A, et donné pour les sinus des logarithmes de 1 à 8 figures entières. Soit a un sinus, $L(a)$ son logarithme naturel, $N(a)$ le nombre de Napier, on a la relation

$$N(a) = AL\left(\frac{A}{a}\right).$$

Si l'on déplace, dans les Tables de Napier, la virgule de sept rangs vers la gauche, aussi bien pour les sinus naturels que pour les logarithmes, c'est-à-dire si l'on prend le rayon pour unité, d'après nos habitudes, on a, au contraire, évidemment

$$N(a) = L\left(\frac{1}{a}\right).$$

C'est dans ce sens que j'ai dit en commençant que la Table de la *Descriptio* donne les logarithmes des sécantes ou inverses des sinus.

Mais si, théoriquement, en appliquant les principes du Calcul infinitésimal à la définition donnée par Napier (¹), on arrive, sans

(¹) On sait qu'il y fait intervenir la correspondance d'un mouvement uniforme et d'un mouvement dont la vitesse décroît en progression géométrique.

conteste possible, à la relation indiquée ci-dessus; une grave controverse ne s'en est pas moins élevée dès le siècle dernier sur la question de savoir si, en s'attachant au mode de calcul suivi par Napier, on doit réellement considérer le nombre *e* comme étant la base des logarithmes de sécantes de sa Table.

M. Siegmund Günther, dans ses remarquables *Vermischte Untersuchungen* (Leipzig, Teubner, p. 271 à 278; 1876) a résumé comme suit le résultat de cette controverse : « La différence entre les logarithmes de Napier et les logarithmes naturels est à la fois de principe et de fait : de principe, en tant que Napier ne possédait pas au fond le concept de base; de fait, en tant que la base qui est inconsciemment suivie dans son système ne coïncide pas avec le nombre $e = 2,71828\ldots$ ».

Je ne pense pas que cette conclusion doive subsister entièrement, et M. Siegmund Günther ne me paraît pas avoir tenu un compte suffisant des articles de Biot dans le *Journal des Savants*, mars, mai et juin 1835, articles dont le dernier, en particulier, est jusqu'à présent l'étude la plus approfondie qui ait été faite de la *Constructio*.

Il est incontestable que Napier n'a pas notre concept de base; mais quand il remarque (page 28) que tous les sinus en proportion décuple ont leurs nombres artificiels en différence constante, il y a évidemment un concept tout à fait équivalent. A la vérité, le nombre qu'il donne pour cette différence, 23025842,34, ne concorde pas exactement avec le logarithme naturel de 10 soit 2,302585092 9... et si l'on cherche la base du système où 10 a le logarithme indiqué par Napier, on trouve, au lieu de *e*, le nombre 2,714445....

Mais, comme Biot l'a mis en évidence, cette circonstance tient uniquement au fait d'une erreur matérielle de calcul, commise par Napier, erreur qui a influé sur la valeur de la totalité de ses logarithmes au-dessous du nombre 9995000; elle ne tient pas aux principes mêmes du calcul de Napier.

Si Biot dit très exactement : « Napier montre que le logarithme du premier terme 9999999 est nécessairement compris entre 1,0000000 et 1,0000001, de sorte qu'il le prend égal à 1,00000005; or la valeur exacte de ce logarithme, calculée par nos méthodes actuelles est 1,000000050000 3333, de sorte que l'évaluation de

Napier est seulement en erreur d'un tiers d'unité sur la quatorzième décimale de ce logarithme », il ne faut nullement en conclure que les méthodes de calcul de Napier ne pouvaient pas le conduire à une approximation aussi exacte que les nôtres, mais seulement qu'il s'est arrêté à un certain rang, absolument comme dans tout calcul réel.

La *Constructio* montre, en effet, très clairement que Napier se rendait parfaitement compte des erreurs qu'il commettait de la sorte. Il a soin de calculer toujours exactement ses nombres jusqu'à une figure d'un rang déterminé, soit qu'il opère directement, soit qu'il détermine deux limites entre lesquelles sera compris le nombre cherché.

Sa méthode est d'ailleurs excessivement remarquable en ce qu'il arrive à son but (et cela d'une façon rigoureuse, sauf les erreurs matérielles) sans aucune extraction de racine et avec très peu de multiplications et de divisions par des nombres autres que 2 ou les puissances de 10. Aussi, je ne crois pas que le calcul de sa Table lui ait coûté autant d'années que Biot paraît le penser. Il y aurait là une question intéressante à étudier.

Napier a au reste reconnu (page 34) que les erreurs dans sa Table pouvaient affecter les deux dernières figures ; mais il l'a attribué, probablement avec raison, à l'imperfection des Tables de sinus dont il s'était servi et a indiqué les modifications à faire subir à son système de calcul pour opérer sur des Tables de sinus à huit figures exactes.

Le principe du système de Neper est d'ailleurs le suivant : constituer des séries géométriques décroissantes dans les rapports $1-\frac{1}{10^7}$, $1-\frac{1}{10^5}$, $1-\frac{1}{10^2}$, $1-\frac{1}{2.10^3}$, de façon à avoir une suite de nombres assez voisins entre eux (1500 environ) entre 10^7, son point de départ et la moitié de ce nombre.

Cette suite s'obtient de fait au moyen de simples soustractions, avec des déplacements de virgule ou au plus des divisions par 2. Pour chacune de ces séries, il lui suffit de déterminer les logarithmes de deux termes consécutifs ; les autres s'ensuivent par additions successives. Il a ainsi très facilement ce qu'il appelle sa *Table radicale*, procédant par différences assez faibles et donnant une correspondance exacte de nombre à logarithme. Mais les

nombres de cette Table ne sont pas exactement ceux qui doivent figurer dans la Table définitive; ce ne sont pas des entiers ou bien ce ne sont pas les sinus d'un arc d'un nombre entier de minutes. Il a donc, pour trouver les logarithmes de ces derniers, à faire subir une correction aux logarithmes des termes les plus voisins dans sa Table radicale; cette correction s'opère en ajoutant un terme obtenu par division. Biot a montré par une discussion détaillée que ce système revient toujours à négliger dans le développement de $L(1-x)$ des termes qui ne peuvent influer sur le degré d'approximation désiré par Napier, et ce degré pourrait être sensiblement reculé sans modifier en rien les principes généraux du calcul.

Les divergences entre la Table de Napier et les Tables des logarithmes hyperboliques tiennent donc uniquement à des erreurs matérielles, comme celle que Biot a signalée.

PAUL TANNERY.

HENKE (R.). — UEBER DIE METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE. Zweite Auflage. 1 vol. IV-77 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1894.

Ce petit Opuscule est la reproduction de la dissertation inaugurale de l'auteur, qui date de 1868. Il est d'une lecture intéressante et facile, et contient de nombreux renseignements historiques et critiques; l'auteur n'a d'ailleurs pas changé le texte de la première édition; il s'est contenté d'y ajouter deux Notes. Quant à sa conclusion personnelle sur ce sujet si débattu, elle semble bien acceptable; elle consiste, au fond, à regarder la méthode, dans sa généralité, comme fondée sur un *postulat*, que l'on peut éclaircir par de bonnes raisons, indépendamment de la théorie des probabilités. Si l'on ajoute que la pratique justifie l'emploi de la méthode, au moins sous certaines conditions, et lorsqu'on ne prétend pas qu'elle permet, en multipliant les observations, d'approcher indéfiniment de la vérité, on ne risquera sans doute pas de se tromper beaucoup. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES FONCTIONS ULTRA-ELLIPTIQUES A DEUX ARGUMENTS;

PAR M. PIERRE POKROVSKY.

Le présent travail a pour objet l'étude des fonctions ultra-elliptiques, dont nous établirons les propriétés fondamentales à l'aide du théorème d'Abel. Nous nous servirons, dans l'exposé de ce travail, de la théorie des intégrales abéliennes de Riemann et des recherches de M. Weierstrass dans le domaine des fonctions ultra-elliptiques et des fonctions abéliennes. La combinaison de la méthode de M. Weierstrass avec celle de Riemann nous donne la possibilité d'établir aisément la théorie des fonctions ultra-elliptiques à deux arguments, ainsi que d'indiquer une série d'analogies entre ces fonctions et les transcendantes elliptiques.

1. *Des intégrales ultra-elliptiques.* — Nous pouvons prendre comme type général des intégrales ultra-elliptiques de la première classe l'expression

$$\int \tau \, dt, \tag{1}$$

où la fonction algébrique τ est de la forme

$$\tau = \frac{f_1(t) + f_2(t)\sqrt{R(t)}}{F_1(t) + F_2(t)\sqrt{R(t)}}. \tag{2}$$

La fonction τ renferme des fonctions rationnelles à argument t et un radical du second degré d'un polynome $R(t)$ du cinquième degré; posons

$$R(t) = P(t)\,Q(t), \tag{3}$$

où

$$P(t) = (t - a_1)(t - a_3), \qquad Q(t) = (t - a_0)(t - a_2)(t - a_4). \tag{3'}$$

Nous choisirons les racines de l'équation $R(t) = 0$ de manière

que, étant réelles, elles satisfassent aux inégalités

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4;$$

dans le cas des racines imaginaires, leurs parties réelles satisferont aux mêmes inégalités.

Les intégrales du type (1) peuvent être ramenées à trois espèces; nous prendrons ces dernières sous la forme canonique de M. Weierstrass et nous adopterons pour elles les définitions suivantes. Les intégrales de la première espèce

$$(4) \qquad \mathbf{J}(x, a_{2k-1}) = \int \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2k-1})\sqrt{R(x)}} \qquad (k=1, 2)$$

seront finies pour toutes les valeurs de la variable et linéairement indépendantes les unes des autres. Les intégrales de la deuxième espèce

$$(5) \qquad \mathcal{E}(x, a_{2k-1}) = \int \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

auront une discontinuité algébrique au point $x = a_{2k-1}$.

Enfin, les intégrales de la troisième espèce

$$(6) \qquad \prod(x, a) = \int \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

auront une discontinuité logarithmique.

Pour la représentation géométrique des fonctions τ on se sert de la surface de Riemann, formée de deux plans qui se rencontrent aux six *points de ramification* (*points critiques*) et suivant les lignes appelées *lignes de passage*. En généralisant le théorème de Cauchy et en se servant du principe de la déformation continue, Riemann est arrivé à la représentation uniforme des intégrales des fonctions algébriques. Les intégrales du type (1) ont une représentation uniforme sur la surface de Riemann, lorsqu'on la transforme en une surface *simplement connexe,* à l'aide de quatre sections convenablement choisies. En passant du côté droit de l'une quelconque des sections sur son côté gauche les intégrales du type (1) reçoivent des accroissements que nous appellerons *modules de périodicité.*

Désignons mutuellement les modules de périodicité des in-

tégrales de la première et de la deuxième espèce sur nos quatre sections par

$$\mathfrak{J}(x, a_{2k-1}) \ldots\ldots 2\omega_{k1},\quad 2\omega_{k2},\quad 2i\omega'_{k1},\quad 2i\omega'_{k2},$$

$$\mathfrak{E}(x, a_{2k-1}) \ldots\ldots 2\eta_{k1},\quad 2\eta_{k2},\quad 2i\eta'_{k1},\quad 2i\eta'_{k2}.$$

On peut ramener les modules de périodicité des intégrales de la première espèce à des intégrales *rectilignes* entre les points de ramification. Si nous traçons dans le plan supérieur de la surface de Riemann une courbe fermée, entourant tous les points de ramification, nous arriverons à des modules de périodicité de forme plus générale

$$(7)\qquad 2\overset{\alpha}{\omega}_k = 2\int_{a_\alpha}^{\infty}\mathfrak{J}(x, a_{2k-1}) = 2\sum_{h=1}^{2}[m_h\omega_{kh} + n_h i\omega'_{kh}];$$

α est ici l'un des nombres (0, 1, 2, 3, 4), m_h et n_h sont les nombres entiers correspondant à la valeur donnée de α, nombres dont la valeur dépend du choix des sections. Il est facile de voir que les modules généraux des intégrales de la première espèce sont liés par la relation

$$(8)\qquad \overset{0}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k + \overset{2}{\omega}_k - \overset{3}{\omega}_k + \overset{4}{\omega}_k \equiv 0,$$

la première partie de cette relation est égale à zéro ou en diffère par des multiples des modules de périodicité.

Les modules de périodicité des intégrales de la deuxième espèce peuvent aussi être ramenés à des intégrales rectilignes entre les points de ramification, sauf toutefois pour les points a_{2k-1}, pour lesquelles l'une quelconque des intégrales devient infinie. Au système (7) correspondent les modules des intégrales de la deuxième espèce de la forme

$$(9)\qquad 2\overset{\alpha}{\eta}_k = 2\sum_{h=1}^{2}[m_k\eta_{kh} + n_h i\eta'_{kh}],$$

où les nombres α, m_h et n_h ont la signification précédente.

Ces modules généraux sont liés par la relation

$$(10) \qquad \overset{0}{\eta}_{1k} - \overset{1}{\eta}_{1k} + \overset{2}{\eta}_{1k} - \overset{3}{\eta}_{1k} + \overset{4}{\eta}_{1k} = 0.$$

On peut établir une série de relations entre les modules de périodicité de la première et de la deuxième espèce, mais nous ne nous arrêterons pas sur ce point.

2. *Théorème d'Abel.* — Dans son célèbre Mémoire *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes,* Abel a donné le théorème général d'addition des intégrales ultra-elliptiques. Examinons ce théorème dans son application aux intégrales ultra-elliptiques de la première classe sous la forme canonique de M. Weierstrass. Désignons par $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ deux polynomes entiers dont les *coefficients* sont *quantités arbitraires* et formons l'équation

$$\phi(x) = \theta_1^2(x)\,\mathrm{P}(x) - \theta_2^2(x)\,\mathrm{Q}(x) = 0,$$

où $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{Q}(x)$ sont des facteurs du polynome $\mathrm{R}(x)$ [*voir* (3)-(3')].

Supposons que cette équation admette μ racines $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$; en appliquant la méthode d'Abel, nous arrivons au théorème suivant d'addition des intégrales de la première espèce

$$\sum_{h=1}^{\mu} \mathrm{J}(x_h, a_{2k-1}) = \text{const.} \qquad (k = 1, 2).$$

Abel ne va pas plus loin dans son examen des coefficients arbitraires. C'est M. Weierstrass (¹) qui eut le premier l'idée féconde de fixer ces quantités arbitraires. D'après le théorème d'Abel, les sommes des intégrales de la première espèce sont constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des coefficients de la fonction $\phi(x)$; on pourra, par conséquent, attribuer à cette dernière fonction une valeur déterminée, si l'on en considère les coefficients

(¹) Voir *Zur Theorie der abelschen Functionen* et d'autres Mémoires relatifs aux fonctions abéliennes (*Mathematische Werke von Karl Weierstrass,* Bd. I-II. Berlin, 1894-1895).

comme des quantités données, convenablement choisies. A cet effet, prenons la fonction τ du paragraphe précédent (2).

A une valeur donnée de τ correspondent des valeurs de t, fournies par l'équation

$$F(t) = [f_1(t) - \tau F_1(t)]^2 - [f_2(t) - \tau F_2(t)]^2 R(t) = 0;$$

il en résulte que les zéros n_i de la fonction τ sont donnés par l'équation

$$(11) \qquad f_1^2(t) - f_2^2(t) R(t) = 0,$$

et les infinis m_i de la même fonction par l'équation

$$(12) \qquad F_1^2(t) - F_2^2(t) R(t) = 0.$$

La fonction τ, comme il est facile de le démontrer, possède les propriétés suivantes : le nombre de ses zéros est égal à celui de ses infinis, ce nombre ne peut être inférieur à 3.

En outre, on peut définir la fonction τ à l'aide des zéros et des infinis qu'on s'est donnés à l'avance, à condition toutefois que deux des infinis (ou deux des zéros) ne soient pas arbitraires, mais exprimés en fonction des autres zéros et infinis.

En appliquant à l'équation $F(t) = 0$ la méthode d'Abel, nous aurons

$$\sum_i \int_{n_i}^{m_i} \frac{P(t)\,dt}{2(t-a)\sqrt{R(t)}} = \frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}} \log A,$$

où

$$A = \frac{F_1(a) + F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a) - F_2(a)\sqrt{R(a)}}\,\frac{f_1(a) - f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a) + f_2(a)\sqrt{R(a)}}.$$

Le théorème d'addition des intégrales de la première et de la deuxième espèce s'exprime de la manière suivante :

$$(13) \qquad \sum_i \mathbf{J}_{n_i}^{m_i}(x, a_{2k-1}) = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

$$(14) \qquad \sum_i \mathcal{E}_{n_i}^{m_i}(x, a_{k-1}) = \frac{Q(a_{2k-1})}{2} \lim_{a = a_{2k-1}} \left[\frac{\log A}{\sqrt{R(a)}}\right].$$

Conformément aux propriétés fondamentales de la fonction τ,

il ne peut entrer dans chacune des sommes (13) moins de trois intégrales, et deux des quantités m_i et n_i ne sont pas arbitraires.

M. Weierstrass (¹) est le premier qui ait démontré analytiquement, en toute rigueur, que le théorème d'Abel admet *l'inversion :* si deux suites de quantités

$$n_1,\quad n_2,\quad \ldots,\quad n_i \quad \text{et} \quad m_1,\quad m_2,\quad \ldots,\quad m_i$$

satisfont aux relations (13), on peut toujours former une fonction τ, pour laquelle ces suites de quantités seront réciproquement des zéros et des infinis.

Dans ses recherches (*Zur Theorie der abelsch. Functionen, etc.*) M. Weierstrass introduit un cas particulier du théorème d'Abel, sur lequel nous allons nous arrêter.

Formons la fonction τ qui possède les zéros n_i et les infinis m_i suivants :

$$n_i = \infty,\quad a_0,\quad a_2,\quad a_4,\quad a_{2l-1},\quad a_{2k-1},$$
$$m_i = x_k,\quad y,\quad z_1,\quad z_2,\quad x_l,\quad a_{2k-1};$$

ici les nombres k et l, différents les uns des autres, parcourent les valeurs 1, 2.

Les fonctions rationnelles qui figurent dans τ sont évidemment

$$f_1(t) = 0,\qquad f_2(t) = \text{const.},\qquad F_2(t) = -1,\qquad F_1(t) = (t - a_{2k-1})\,\psi(t),$$

où

$$\psi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2. \tag{15}$$

D'après la formule (12) les quantités x_1, x_2, y, z_1 et z_2 seront les racines de l'équation

$$(t - a_{2k-1})\,\psi^2(t) - R(t) : (t - a_{2k-1}) = 0; \tag{16}$$

prenons z_1 et z_2 pour infinis non arbitraires de la fonction τ, les quantités x_1, x_2 et y sont arbitraires, ainsi que les signes des radicaux qui leurs correspondent, c'est-à-dire $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$ et $\sqrt{R(y)}$.

Les coefficients indéterminés c_0, c_1 et c_2, qui entrent dans la

(¹) *Theorie der hyperelliptischen Functionen* (*Nach einer Vorlesung* von Professor Weierstrass, gehalten S. S. Berlin; 1887).

fonction $\psi(t)$, sont fournis par les trois équations de la forme

$$(17) \qquad c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = \sqrt{R(t)} : (t - a_{2k-1});$$

il y faut substituer à t des infinis arbitraires x_1, x_2 et y; quant aux radicaux $\sqrt{R(x_1)}$ et $\sqrt{R(x_2)}$, nous leur attribuons le signe —.

Si nous éliminons entre les équations (15) et (17) les quantités c_0, c_1 et c_2, la fonction $\psi(t)$ sera définie de la manière suivante :

$$(18) \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)\sqrt{R(y)}}{(y - a_{2k-1})\varphi(y)} - \sum_{h=1}^{2}\left[\frac{\varphi(t)}{t - x_h} - \frac{\varphi(t)}{y - x_h}\right]\frac{\sqrt{R(x_h)}}{(x_h - a_{2k-1})\varphi'(x_h)};$$

nous avons posé par abréviation

$$(19) \qquad \varphi(t) = (t - x_1)(t - x_2).$$

Moyennant les conditions indiquées plus haut le théorème d'addition des intégrales (13), (14) prendra, après quelques transformations [*voir* (8), (10)], la forme suivante :

$$(20) \quad \sum_{i=1}^{2}\int_{a_{2i-1}}^{z_i}(z, a_{2h-1}) = \sum_{i=1}^{2}\int_{a_{2i-1}}^{x_i}(x, a_{2h-1}) + \int_{y}^{\infty}(y, a_{2h-1}) - \overset{2k-1}{\omega_h},$$

$$(21) \quad \left\{\begin{aligned} &\overset{2k-1}{\eta_k} + \mathcal{E}_{\infty}^{y}(y, a_{2k-1}) + \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{z_i}(z, a_{2k-1}) - \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{x_i}(x, a_{2k-1}) \\ &= -\psi(a_{2k-1}) : P'(a_{2k-1}). \end{aligned}\right.$$

Examinons deux cas particuliers.

Soit d'abord $y = \infty$; les quantités non arbitraires z_1 et z_2 deviendront z'_1 et z'_2, et l'équation (16) prendra la forme suivante

$$(22) \quad \left\{\begin{aligned} &(t - a_{2k-1})\left[\sum_{h=1}^{2}\frac{\varphi(t)\sqrt{R(x_h)}}{(x_h - t)(x_h - a_{2k-1})\varphi'(x_h)}\right]^2 - \frac{R(t)}{t - a_{2k-1}} \\ &= -\varphi(t)\varphi_1(t), \end{aligned}\right.$$

où

$$(23) \qquad \varphi_1(t) = (t - z'_1)(t - z'_2).$$

En posant dans l'équation (22) d'abord $t = a_{2k-1}$ et ensuite

$t = a_{2l-1}$, l étant différent de k, nous trouverons

$$(24)\qquad \varphi_1(a_{2k-1})\varphi(a_{2k-1}) = \mathrm{R}'(a_{2k-1}),$$

$$(25)\qquad \varphi_1(a_{2l-1}) = \mathrm{P}'(a_{2k-1})\varphi(a_{2l-1})\left[\sum_{h=1}^{2}\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_h)}}{(a_{2k-1}-x_h)(a_{2l-1}-x_h)\varphi'(x_h)}\right]^2.$$

Les expressions (20) et (21) prendront, pour $y = \infty$, maintenant la forme suivante :

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{2}\mathrm{J}_{a_{2i-1}}^{z'_i}(z, a_{2h-1}) = \sum_{i=1}^{2}\mathrm{J}_{a_{2i-1}}^{x_i}(x, a_{2h-1}) - \overset{2k-1}{\omega_h},$$

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overset{2k-1}{\eta_k} + \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{z'_i}(z, a_{2k-1}) - \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{x_i}(x, a_{2k-1}) \\ &\quad = -\frac{\varphi(a_{2k-1})}{\mathrm{P}'(a_{2k-1})}\sum_{h=1}^{2}\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_h)}}{(x_h - a_{2k-1})^2\varphi'(x_h)}. \end{aligned}\right.$$

Examinons maintenant le cas où $y = a_\beta$ [a_β est l'une des racines de l'équation $\mathrm{R}(t) = 0$, différente de a_{2k-1}]; les quantités non arbitraires z_1 et z_2 deviendront z''_1 et z''_2, et l'expression (20) deviendra

$$(28)\qquad \sum_{i=1}^{2}\mathrm{J}_{a_{2i-1}}^{z''_i}(z, a_{2h-1}) = \sum_{i=1}^{2}\mathrm{J}_{a_{2i-1}}^{x_i}(x, a_{2h-1}) + \overset{\beta}{\omega_h} - \overset{2k-1}{\omega_h}.$$

Ayant calculé l'expression (21) pour $y = a_\beta$, et ayant retranché le résultat obtenu de (27), nous aurons

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overset{\beta}{\eta_k} - \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{z''_i}(z, a_{2k-1}) + \sum_{i=1}^{2}\mathcal{E}_{\infty}^{z'_i}(z, a_{2k-1}) \\ &\quad = -\frac{\varphi(a_{2k-1})}{\mathrm{P}'(a_{2k-1})}\sum_{h=1}^{2}\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_h)}}{(a_{2k-1}-x_h)(a_\beta - x_h)\varphi'(x_h)}. \end{aligned}\right.$$

3. *Problème de Jacobi.* — En nous servant des considérations de M. Weierstrass sur le théorème d'Abel, nous arrivons aisément aux conclusions suivantes :

1° Dans l'inversion des intégrales ultra-elliptiques de la pre-

mière classe il faut partir d'un système de deux équations [il y a, en effet, deux limites non arbitraires dans les expressions (13)]. Prenons le système des équations de M. Weierstrass

$$(30)\qquad \int_{a_1}^{x_1}(x, a_1)+\int_{a_3}^{x_2}(x, a_1)=u_1, \qquad \int_{a_1}^{x_1}(x, a_3)+\int_{a_3}^{x_2}(x, a_3)=u_2,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$x_1=a_1, \qquad x_2=a_3 \qquad \text{pour} \qquad u_1=u_2=0.$$

2° Le système de valeurs (x_1, x_2), correspondant aux valeurs données (u_1, u_2), est unique; en admettant qu'il y ait un autre système semblable (x'_1, x'_2) nous serions en contradiction avec la proposition énoncée par M. Weierstrass que le théorème d'Abel est susceptible d'inversion.

Par conséquent les quantités x_1 et x_2 sont les racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions uniformes de u_1 et u_2. Toute fonction symétrique de x_1 et x_2 sera, évidemment, une fonction uniforme des arguments u_1 et u_2; arrêtons-nous sur les plus simples des fonctions symétriques. Posons

$$(31)\qquad \frac{\varphi(a_{2k-1})}{\mathrm{P}'(a_{2k-1})}=\frac{(a_{2k-1}-x_1)(a_{2k-1}-x_2)}{\mathrm{P}'(a_{2k-1})}=\mathfrak{p}(u)_{2k-1} \qquad (k=1, 2).$$

Nous désignons, par abréviation, la fonction $\mathfrak{p}(u_1, u_2)_{2k-1}$ par $\mathfrak{p}(u)_{2k-1}$, de même que nous écrirons par la suite $\mathfrak{p}\left(u-\overset{\alpha}{\omega}\right)_{2k-1}$ au lieu de $\mathfrak{p}\left(u_1-\overset{\alpha}{\omega}_1, u_2-\overset{\alpha}{\omega}_2\right)_{2k-1}$.

En nous servant du développement des fonctions fractionnaires

$$(32)\qquad \frac{\varphi(x)}{\mathrm{P}(x)}=1+\sum_{k=1}^{2}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{(x-a_{2k-1})\mathrm{P}'(a_{2k-1})},$$

nous arriverons facilement à une équation du second degré dont les racines sont x_1 et x_2 :

$$(33)\qquad \frac{\mathfrak{p}(u)_1}{a_1-x}+\frac{\mathfrak{p}(u)_1}{a_3-x}=1.$$

Il est bien clair que toute fonction symétrique de x_1 et x_2 s'exprimera rationnellement par des fonctions $p(u)_{2k-1}$.

Tirons des équations (30) les dérivées partielles de x_1 et de x_2 par rapport à u_1 et u_2; après quelques simplifications nous aurons

$$(34)\qquad \frac{\partial x_h}{\partial u_k} = \frac{2\,p(u)_{2k-1}}{a_{2k-1} - x_h}\,\frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)} \qquad (h = 1, 2;\ k = 1, 2).$$

En nous servant de la dernière formule et de l'expression (32), nous trouverons facilement

$$2\sqrt{R(x_h)} = (a_3 - x_h)\,p'(u)_1 + (a_1 - x_h)\,p'(u_3),$$

où

$$p'(u)_{2k-1} = \frac{\partial\,p(u)_{2k-1}}{\partial u_1} + \frac{\partial\,p(u)_{2k-1}}{\partial u_2}.$$

Les quantités $\sqrt{R(x_1)}$ et $\sqrt{R(x_2)}$ sont, évidemment, les racines d'une équation du second degré dont les coefficients s'exprimeront, en vertu de la formule (33), rationnellement au moyen des fonctions $p(u)_{2k-1}$ et de leurs dérivées. A l'aide des formules (34) on peut établir entre ces dérivées et les radicaux les relations suivantes :

$$(35)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log p(u)_{2h-1}}{\partial u_k} = -\,p(u)_{2k-1}\sum_{i=1}^{2}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_{2k-1} - x_i)(a_{2h-1} - x_i)\,\varphi'(x_i)}.$$

Introduisons maintenant les sommes des intégrales de la deuxième espèce avec les mêmes limites supérieures que dans le système (30). Posons

$$(36)\qquad \int_{\infty}^{x_1}(x, a_{2k-1}) + \int_{\infty}^{x_2}(x, a_{2k-1}) = \zeta(u)_k \qquad (k = 1, 2);$$

nous désignons par abréviation la fonction $\zeta(u_1, u_2)_k$ par $\zeta(u)_k$, de même que nous écrirons par la suite $\zeta\left(u - \overset{\alpha}{\omega}\right)_k$ au lieu de $\zeta\left(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1,\ u_2 - \overset{\alpha}{\omega}_2\right)_k$.

La fonction $\zeta(u)_k$ est une fonction uniforme de ses arguments, car, la relation établie par les équations (30) étant uniforme, le système (x_1, x_2) reprend les valeurs initiales en même temps que (u_1, u_2). Au contraire, à un système donné de valeurs de (x_1, x_2)

correspond un nombre infini de valeurs de (u_1, u_2). Supposons que x_1 et x_2, après avoir parcouru des contours fermés sur la surface de Riemann, aient repris leurs valeurs initiales : les quantités u_h du système (30) recevront des accroissements $2\overset{\alpha}{\omega}_h$ et la somme des intégrales de la deuxième espèce l'accroissement $2\overset{\alpha}{\eta}_k$. Par conséquent on aura la relation

$$(37) \qquad \zeta\left(u_1 + 2\overset{\alpha}{\omega}_1, u_2 + 2\overset{\alpha}{\omega}_2\right)_k = 2\overset{\alpha}{\eta}_k + \zeta(u_1, u_2)_k;$$

α est ici l'un des nombres (0, 1, 2, 3, 4).

La fonction $\zeta(u)_k$ est finie tant que les valeurs de u_1 et u_2 sont différentes de zéro; mais, lorsque u_1 et u_2 s'annulent, l'une des quantités x_h devient égale à a_{2k-1} et l'intégrale correspondante de la deuxième espèce devient infiniment grande.

Enfin, en discutant les intégrales de la deuxième espèce sur la surface de Riemann, nous arrivons à cette conclusion que $\zeta(u)_k$ sera une fonction impaire des arguments u_1 et u_2.

L'introduction des fonctions $\zeta(u)_k$ a une grande importance, attendu que l'on détermine, à l'aide de ces fonctions, le caractère des transcendantes $\mathfrak{p}(u)_{2k-1}$, leurs zéros et leurs infinis. On peut établir une liaison entre les fonctions $\zeta(u)_k$ et $\mathfrak{p}(u)_{2k-1}$ au moyen des relations qui découlent du théorème d'Abel. Il résulte des expressions (26) que les quantités z'_1 et z'_2 sont liées aux arguments $u_h - \overset{2k-1}{\omega}_h$ de la même manière que les quantités x_1 et x_2 sont liées aux arguments u_h. Il s'ensuit que, si nous nous servons des relations (31) et (35), les formules (24), (25) et (27) prendront la forme suivante :

$$(38) \qquad \mathfrak{p}\left(u - \overset{2k-1}{\omega}\right)_{2k-1} \mathfrak{p}(u)_{2k-1} = Q(a_{2k-1}) : P'(a_{2k-1}),$$

$$(39) \qquad \mathfrak{p}(u)_{2k-1}\, \mathfrak{p}\left(u - \overset{2k-1}{\omega}\right)_{2l-1} = \frac{P'(a_{2k-1})}{4} \frac{\partial \log \mathfrak{p}(u)_{2k-1}}{\partial u_l} \frac{\partial \log \mathfrak{p}(u)_{2l-1}}{\partial u_k},$$

$$(40) \qquad \overset{2k-1}{\eta}_k - \zeta(u)_k + \zeta\left(u - \overset{2k-1}{\omega}\right)_k = \frac{1}{2} \frac{\log \mathfrak{p}(u)_{2k-1}}{\partial u_k}.$$

L'expression (28) nous montre que les quantités z''_1 et z''_2, pour $\beta = 2l - 1$, sont liées aux arguments $u_h + \overset{2l-1}{\omega}_h - \overset{2k-1}{\omega}_h$ de la même façon que les quantités x_1 et x_2 sont liées aux arguments u_h; la

formule (29) prendra par conséquent la forme

$$(41)\qquad \overset{2l-1}{\eta}_k - \zeta\Big(u + \overset{2l-1}{\omega} - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k + \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log p(u)_{2l-1}}{\partial u_k}.$$

Indiquons maintenant les relations qui existent entre les dérivées des fonctions $\zeta(u)_k$ et les fonctions $p(u)_{2k-1}$, en nous servant de la définition des intégrales de la deuxième espèce (5) et des formules (31) et (35), nous aurons

$$\frac{\partial \zeta(u)_k}{\partial u_l} = \frac{Q(a_{2k-1})}{[P'(a_{2k-1})]^2}\,\frac{p(u)_{2l-1}}{p(u)_{2k-1}},$$

$$\frac{\partial \zeta(u)_k}{\partial u_k} = -\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\left[\frac{1}{p(u)_{2k-1}} + \frac{1}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{p(u)_{2l-1}}{p(u)_{2k-1}}\right].$$

En remplaçant dans les dernières formules les argument u_h par $u_h - \overset{2k-1}{\omega}_h$, nous obtiendrons, à l'aide des expressions (38) et (39), les relations suivantes

$$(42)\qquad \frac{\partial \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k}{\partial u_l} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial \log p(u)_{2k-1}}{\partial u_l}\,\frac{\partial \log p(u)_{2l-1}}{\partial u_k},$$

$$(43)\qquad \frac{\partial \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k}{\partial u_k} = -\,p(u)_{2k-1} - \frac{1}{4}\,\frac{\partial \log p(u)_{2k-1}}{\partial u_l}\,\frac{\partial \log p(u)_{2l-1}}{\partial u_k}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial \zeta\Big(u - \overset{2l-1}{\omega}\Big)_l}{\partial u_k};$$

par conséquent, les fonctions de la forme $\zeta\Big(u + \overset{\alpha}{\omega} - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k$ sont des dérivées partielles d'une certaine fonction à arguments u_1 et u_2.

Introduisons, en conséquence, avec M. Weierstrass (*Zur Theorie der abelsch. Funct.*) les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_\alpha$, que nous déterminerons au moyen des équations

$$(44)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2) = -\sum_{k=1}^{2}\left[\overset{2k-1}{\eta}_k + \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega}\Big)_k\right]du_k,$$

$$(45)\qquad d\log \mathrm{Al}(u_1, u_2)_\alpha = -\sum_{k=1}^{2}\left[\overset{2k-1}{\eta}_k - \overset{\alpha}{\eta}_k + \zeta\Big(u - \overset{2k-1}{\omega} + \overset{\alpha}{\omega}\Big)_k\right]du_k;$$

α est ici l'un des nombres (0, 1, 2, 3, 4).

Ainsi que nous le savons, cette notation a été donnée par M. Weierstrass aux fonctions considérées en l'honneur d'Abel.

Ayant additionné les expressions (42) et (43), nous aurons, à l'aide de l'équation (44), la relation suivante

$$(46) \qquad p(u_1, u_2)_{2k-1} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left[\frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right].$$

Si dans l'équation (45) nous posons $\alpha = 2h - 1$, h étant l'un des nombres 1 ou 2, égal à k ou différent de k, alors, à l'aide des formules (40) et (41), nous aurons

$$\frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2)_{2h-1}}{\partial u_k} - \frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2)}{\partial u_k} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log p(u)_{2h-1}}{\partial u_k}.$$

Il s'ensuit que

$$(47) \qquad p(u_1, u_2)_{2h-1} = c_{2h-1}^2\,\frac{\mathrm{Al}^2(u_1, u_2)_{2h-1}}{\mathrm{Al}^2(u_1, u_2)};$$

la constante arbitraire de l'intégration c_{2h-1}^2 sera déterminée pour les valeurs données des arguments u_1 et u_2.

Il est facile de remarquer que les fonctions $p(u_1, u_2)_{2k-1}$, $\zeta(u_1, u_2)_k$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ sont tout à fait analogues aux fonctions elliptiques de M. Weierstrass $p(u)$, $\zeta(u)$ et $\sigma(u)$ (¹).

Voyons quelques propriétés de la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$; posons

$$\mathrm{Al}(u_1, u_2) = e^{\mu(u_1, u_2)},$$

où

$$(48) \qquad \mu(u_1, u_2) = -\int \sum_{k=1}^{2}\left[\overset{2k-1}{\eta_k} + \zeta\left(u - \overset{2k-1}{\omega}\right)_k\right] du_k + \mathrm{C}.$$

La fonction $\mu(u_1, u_2)$ reste finie pour toutes les valeurs des arguments, sauf le cas où les arguments des fonctions $\zeta\left(u - \overset{2k-1}{\omega}\right)_k$ s'annulent; ainsi les points de discontinuité de la fonction $\mu(u_1, u_2)$ correspondront aux valeurs

$$(49) \qquad u_1 \equiv \overset{2k-1}{\omega_1}, \qquad u_2 \equiv \overset{2k-1}{\omega_2}.$$

(¹) *Comparer* HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, ou M. SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.*

Discutons le caractère même de discontinuité : en nous rappelant les formules (36), nous remarquons qu'aux points indiqués la fonction $\mu(u_1, u_2)$ devient infinie de la même manière que

$$-\int \mathcal{E}(x_h, a_{2k-1})\, du_k,$$

dans le voisinage du point $x_h = a_{2k-1}$. En développant suivant les puissances de $x_h - a_{2k-1}$ l'intégrale de la deuxième espèce, ainsi que la quantité du_k [déterminée par le système (30)], nous n'aurons qu'un seul terme, où $x_h - a_{2k-1}$ soit affecté d'un exposant négatif; c'est le terme

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx_h}{x_h - a_{2k-1}}.$$

Ainsi la fonction $\mu(u_1, u_2)$ devient infinie aux points particuliers (49) comme $\log\sqrt{x_h - a_{2k-1}}$, pour $x_h = a_{2k-1}$. Il s'ensuit que pour tout système de valeurs de u_1 et u_2 les valeurs de la fonction $\mu(u_1, u_2)$ différeront entre elles par des multiples de $2\pi i$. Nous concluons de là que la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ sera finie et continue pour toutes les valeurs des arguments; les valeurs fournies par les formules (49) rendent notre fonction égale au zéro du premier ordre. Déterminons la constante C de l'intégration de manière à avoir

$$\mu(0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Al}(0, 0) = 1, \qquad \text{pour} \qquad u_1 = u_2 = 0.$$

Il est facile de s'assurer, en se servant des propriétés connues des fonctions $\zeta(u_1, u_2)_k$ [*voir* (36), (37)], que la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ est paire et qu'elle satisfait à la relation

$$(50)\qquad \frac{\partial \log \mathrm{Al}\left(u_1 + 2\overset{\alpha}{\omega}_1,\ u_2 + 2\overset{\alpha}{\omega}_2\right)}{\partial u_k} = -2\overset{\alpha}{\eta}_k + \frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2)}{\partial u_k}.$$

En faisant la même discussion relativement aux fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_\alpha$ nous trouverons que ces fonctions sont partout uniformes et finies et qu'elles deviennent égales au zéro du premier ordre pour le système des arguments

$$u_1 = \overset{2k-1}{\omega_1} - \overset{\alpha}{\omega}_1, \qquad u_2 = \overset{2k-1}{\omega_2} - \overset{\alpha}{\omega}_2.$$

Les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_\alpha$ se déduisent, comme il est facile de le voir, de la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ en changeant les arguments de celle-ci en des systèmes de demi-modules de périodicité (*voir* n° 1).

4. *Des fonctions ultra-elliptiques.* — Comme fonctions ultra-elliptiques *fondamentales* prenons les plus simples des fonctions uniformes de u_1 et u_2, déterminées par le système des équations (30). Conformément à ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on peut considérer comme *fondamentales* les deux fonctions suivantes :

$$(51)\quad \sqrt{\frac{(a_{2k-1}-x_1)(a_{2k-1}-x_2)}{P'(a_{2k-1})}} = \mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1} \qquad (k=1, 2).$$

Les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1}$ peuvent être représentées, comme il est facile de le voir, sous forme de quotient de deux séries transcendantes entières $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_{2k-1}$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$. En nous servant maintenant des formules (46) et (50), nous arrivons à cette conclusion que

$$(52)\quad \mathrm{al}^2\Big(u_1+2\overset{\alpha}{\omega}_1, u_2+2\overset{\alpha}{\omega}_2\Big)_{2k-1} = \mathrm{al}^2(u_1, u_2)_{2k-1} \qquad (\alpha=0, 1, \ldots, 4).$$

Comme les modules de périodicité des intégrales de la première espèce sont liés par la relation [*voir* (8)]

$$\overset{0}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k + \overset{2}{\omega}_k - \overset{3}{\omega}_k + \overset{4}{\omega}_k \equiv 0,$$

les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1}$ auront, évidemment, quatre systèmes différents de *périodes simultanées*.

Montrons, enfin, que les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1}$ sont soumises au théorème d'addition. A cet effet, formons la fonction τ qui admet les zéros n_i et les infinis m_i suivants :

$$n_i = a_1^{(4)},\quad a_3^{(4)}; \qquad m_i = a_1,\quad a_3,\quad x_1,\quad x_2,\quad y_1,\quad y_2,\quad z_1,\quad z_2.$$

L'équation (12), après élimination des racines a_1 et a_3, sera remplacée par la suivante :

$$(53)\quad \begin{cases} P(t)[t^2+A_1t+A_0]^2 - Q(t)[B_0+B_1t]^2 \\ \quad = (t-x_1)(t-x_2)(t-y_1)(t-y_2)(t-z_1)(t-z_2). \end{cases}$$

Prenons comme infinis arbitraires z_1 et z_2 ; les quantités x_1, x_2,

y_1 et y_2, ainsi que les radicaux correspondants $\sqrt{R(x)}$ et $\sqrt{R(y)}$ (dont nous changerons les signes) sont arbitraires.

Les coefficients indéterminés A_0, A_1, B_0 et B_1 s'obtiendront, évidemment, au moyen des quatre équations

$$B_0\sqrt{R(t)} + B_1 t\sqrt{R(t)} + A_0 P(t) + A_1 t P(t) = - t^2 P(t),$$

où t est remplacé par les quantités x_1, x_2, y_1 et y_2.

Moyennant les conditions indiquées le théorème d'Abel prendra la forme suivante :

$$(54)\qquad \int_{a_1}^{z_1}(z, a_{2k-1}) + \int_{a_3}^{z_2}(z, a_{2k-1}) = u_k + v_k,$$

où

$$(54')\quad \int_{a_1}^{x_1}(x, a_{2k-1}) + \int_{a_3}^{x_2}(x, a_{2k-1}) = u_k, \quad \int_{a_1}^{y_1}(y, a_{2k-1}) + \int_{a_3}^{y_2}(y, a_{2k-1}) = v_k.$$

Il est facile d'obtenir le théorème d'addition des fonctions ultra-elliptiques, à l'aide de la formule (53), en posant $t = a_{2k-1}$ et en introduisant les fonctions correspondantes [*voir* (51)]; par abréviation, nous désignerons ces fonctions par $\mathrm{al}(u)_{2k-1}$, $\mathrm{al}(v)_{2k-1}$ et $\mathrm{al}(u+v)_{2k-1}$.

Nous aurons de cette façon

$$N_{2k-1} : D = b_{2k-1} P'(a_{2k-1})\, \mathrm{al}(u)_{2k-1}\, \mathrm{al}(v)_{2k-1}\, \mathrm{al}(u+v)_{2k-1};$$

ici $b_{2k-1} = \sqrt{-R'(a_{2k-1})} : Q(a_{2k-1})$, et les quantités N_{2k-1} et D sont les déterminants suivants :

$$N_{2k-1} = \begin{vmatrix} (x_1 - a_{2k-1})\sqrt{R(x_1)} & P(x_1) & x_1 P(x_1) & x_1^2 P(x_1) \\ (x_2 - a_{2k-1})\sqrt{R(x_2)} & P(x_2) & x_2 P(x_2) & x_2^2 P(x_2) \\ (y_1 - a_{2k-1})\sqrt{R(y_1)} & P(y_1) & y_1 P(y_1) & y_1^2 P(y_1) \\ (y_2 - a_{2k-1})\sqrt{R(y_2)} & P(y_2) & y_2 P(y_2) & y_2^2 P(y_2) \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{R(x_1)} & x_1\sqrt{R(x_1)} & P(x_1) & x_1 P(x_1) \\ \sqrt{R(x_2)} & x_2\sqrt{R(x_2)} & P(x_2) & x_2 P(x_2) \\ \sqrt{R(y_1)} & y_1\sqrt{R(y_1)} & P(y_1) & y_1 P(y_1) \\ \sqrt{R(y_2)} & y_2\sqrt{R(y_2)} & P(y_2) & y_2 P(y_2) \end{vmatrix}.$$

Pour le calcul de ces déterminants servons-nous des formules (35) et de leurs analogues aux arguments v_1 et v_2. En

outre, dans la simplification des expressions de N_{2k-1}, et D, jouent un rôle important les relations qui découlent de l'équation (33) et de leur analogue aux arguments v_1 et v_2; telles sont les relations

$$\frac{(x_h - y_1)(x_h - y_2)}{P(x_h)} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{al}^2(u)_{2i-1} - \mathrm{al}^2(v)_{2i-1}}{a_{2i-1} - x_h} \qquad (h = 1, 2).$$

Après une série de calculs nous arrivons au théorème d'addition des fonctions ultra-elliptiques *fondamentales*

$$(55) \quad b_1 \overset{1}{W}_h \, \mathrm{al}(u+v)_1 + b_3 \overset{3}{W}_h \, \mathrm{al}(u+v)_3 = \mathrm{al}^2(u)_{2h-1} - \mathrm{al}^2(v)_{2h-1} \quad (h=1,2).$$

Les quantités W, que nous avons introduites, ont la forme suivante :

$$(55') \qquad \overset{2k-1}{W}_h = \mathrm{al}(v)_{2k-1} \frac{\partial\, \mathrm{al}(u)_{2k-1}}{\partial u_h} - \mathrm{al}(u)_{2k-1} \frac{\partial\, \mathrm{al}(v)_{2k-1}}{\partial u_h}.$$

Les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1}$ jouent dans la théorie exposée le même rôle que la fonction $\sin \mathrm{am}\, u$ dans les transcendantes elliptiques de Jacobi. La formule (55) est une généralisation immédiate et une extension aux fonctions ultra-elliptiques du théorème d'addition établi pour les transcendantes elliptiques. On peut, en effet, donner à ce théorème la forme suivante :

$$(56) \qquad W \sin \mathrm{am}(u+v) = \sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, v,$$

où

$$(56') \qquad W = \sin \mathrm{am}\, u \frac{d \sin \mathrm{am}\, v}{dv} - \sin \mathrm{am}\, v \frac{d \sin \mathrm{am}\, u}{du}.$$

Nous entendrons sous le nom de *fonctions ultra-elliptiques générales* (de la première classe) toutes espèces de fonctions uniformes aux arguments u_1 et u_2, définies au moyen du système (30). Conformément aux équations (33) et (35) toutes les fonctions de cette nature s'exprimeront algébriquement au moyen des fonctions *fondamentales* $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2k-1}$. Par conséquent les fonctions ultra-elliptiques *générales* posséderont quatre systèmes différents de *périodes simultanées* et seront soumises au *théorème algébrique d'addition*.

Les plus simples des fonctions ultra-elliptiques générales, outre les fonctions $\mathfrak{p}(u_1, u_2)_{2k-1}$ du paragraphe précédent, sont les

suivantes :

$$\sqrt{\frac{(a_{2l}-x_1)(a_{2l}-x_2)}{\mathrm{P}'(a_{2l})}} = \mathrm{al}(u_1, u_2)_{2l} \qquad (l = 0, 1, 2). \tag{57}$$

Conformément à la formule (32) le rapport entre ces fonctions et les fonctions fondamentales s'exprime au moyen des équations

$$\mathrm{al}^2(u_1, u_2)_{2l} = 1 + \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2)_1}{a_{2l}-a_1} + \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2)_3}{a_{2l}-a_3}. \tag{58}$$

Ayant formé à l'aide de la formule (34) les dérivées partielles des fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2l}$ et en nous servant des expressions (28), (29), (44) et (45), nous arriverons à cette conclusion que les fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_{2l}$ se présentent sous forme de quotient de séries transcendantes entières $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_{2l}$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$.

Enfin, l'étude des fonctions ultra-elliptiques *en général* se ramène à celle des propriétés de la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$, introduite au paragraphe précédent. Cette fonction peut se réduire à une forme plus simple à l'aide de la substitution linéaire suivante :

$$u_1 = 2\omega_{11} w_1 + 2\omega_{12} w_2, \qquad u_2 = 2\omega_{21} w_1 + 2\omega_{22} w_2. \tag{59}$$

Nous arriverons de cette manière à la fonction $\Theta(w_1, w_2)$:

$$\Theta(w_1, w_2) = \sum_{p_1, p_2=-\infty}^{+\infty}\sum e^{2\pi i(p_1 w_1 + p_2 w_2) + \pi(\delta_{11} p_1^2 + 2\delta_{12} p_1 p_2 + \delta_{22} p_2^2)}. \tag{60}$$

La relation entre les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2)$ et $\Theta(w_1, w_2)$, ainsi que les rapports entre ces transcendantes et les fonctions de Rosenhain et Riemann, ont été étudiés en détail dans mon Ouvrage *Théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe* (publié en russe) (¹).

Je remarquerai en terminant que les résultats que je présente peuvent être facilement étendus aux fonctions ultra-elliptiques à plusieurs arguments.

(¹) Une analyse de cet Ouvrage a été donnée par M. Bougaïeff dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII, année 1888.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

SONNET (H.). — *Dictionnaire des Mathématiques appliquées, contenant les principales applications des Mathématiques et l'explication d'un grand nombre de termes techniques usités dans les applications.* In-8°, à 2 col., IV-1478 p. avec 1900 figures. Paris, Hachette et Cie. 30 fr.

KLEIN (F.). — *Ueber die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen.* Antrittsrede. Gr. in-8°, 12 p. Leipzig, Teubner. 60 pf.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique. Théorie analytique de la propagation de la chaleur.* In-8°, 320 p. avec fig. Paris, Carré.

RESAL (H.). — *Traité de Mécanique générale,* comprenant les leçons professées à l'École Polytechnique. 2e édit., t. II : Du mouvement des solides eu égard aux frottements; équilibre intérieur; élasticité; hydrostatique; hydrodynamique; hydraulique. In-8°, XI-166 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 3 fr.

HOEFER (FERD.). — *Histoire des Mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du* XIXe *siècle.* 4e édit. In-16, III-600 p. avec fig. Paris, Hachette et Cie. 4 fr.

NERNST (W.) und SCHÖNFLIES (A.). — *Einführung in die mathemat. Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung m. besond. Berücksichtig. der Chemie.* Gr. in-8°. XI-309 p. avec 61 fig. München, Wolff. 8 m. 60 pf. gebd. 10 m.

SCHLÖMILCH (O.). — *Compendium der höheren Analysis.* (In 2 Bänden). 2 Bd. Vorlesungen über die eizelnen Theile der höheren Analysis, gehalten am k. sächs. Polytechnikum zu Dresden. 4 Aufl. Gr. in-8°, X-546 p. avec gravure sur bois. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 9 m.

KANTOR (S.). — *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene.* In-8°, 111 p. Berlin, Mayer und Müller. 5 m.

KRAUSE (M.). — *Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse.* Tome I. Gr. in-8°, VIII-328 p. Leipzig, Teubner. 12 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H.-G. ZEUTHEN. — GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM ALTERTHUM UND MITTELALTER. 1 vol. petit in-8°, VII-344 p. Copenhagen, And. Fred. Höst und Sön, 1896.

Le savant professeur de l'Université de Copenhague avait publié en danois, dans le courant de 1893, l'œuvre dont une traduction allemande vient de paraître. Elle était particulièrement destinée aux candidats à l'examen pour le professorat de Mathématiques en Danemark; on y exige d'eux, en effet, une connaissance générale de l'histoire de leur Science, ainsi qu'une étude spéciale des Éléments d'Euclide et de la Géométrie de Descartes. Il y a là un exemple sur lequel je crois inutile d'insister.

A côté d'un grand Ouvrage historique comme celui de Moritz Cantor, le besoin d'un bon abrégé se faisait en tous cas sentir, comme le prouvent au reste les essais récemment tentés en Angleterre et aux États-Unis. Je n'hésite pas à signaler le travail de M. Zeuthen comme très supérieur à ces essais; non seulement il donne avec exactitude tout ce qu'il est essentiel de savoir, mais il s'attache à mettre en pleine lumière le caractère des méthodes et leur développement. Il est ainsi parvenu à éclairer d'un jour tout nouveau un certain nombre de questions obscures, qui, à mon avis, sont précisément celles dont l'intérêt est le plus considérable.

Que dans les explications données par M. Zeuthen, l'hypothèse joue un certain rôle, il est le premier à le signaler : mais il n'a en somme, cette fois, que présenté les résultats les plus incontestables de sa magistrale étude sur la *Théorie des sections coniques dans l'antiquité* (1), et son point de départ consiste dans une remarque tellement juste et frappante qu'on ne peut, ce me semble, hésiter à l'accueillir avec toutes ses conséquences.

Lorsque nous pensons à une parabole, nous nous représentons l'équation $y^2 = px$; c'est sous la forme de ce symbolisme algé-

(1) *Voir* l'analyse que j'en ai donnée dans le *Bulletin*, 1886, pages 263 et suivantes.

brique que nous apparaît la liaison entre l'ordonnée et l'abscisse. Or les anciens concevaient exactement la même relation, mais avec un symbolisme tout différent. Ils voyaient en esprit (ou ils traçaient réellement) le carré construit sur l'ordonnée, le rectangle construit sur l'abscisse et le paramètre, et, par une figuration très simple (Euclide, I, 43), ils voyaient égaux ce carré et ce rectangle.

Le fait de l'existence d'un tel symbolisme géométrique dans l'antiquité est une nécessité physiologique; la reconstitution de la forme appartient à M. Zeuthen, mais elle est tellement en accord avec tous les documents qu'on ne peut la mettre en doute.

Partant de là, M. Zeuthen s'est créé l'habitude de l'intuition géométrique des anciens, et il a constaté que cette intuition facilitait singulièrement l'étude de leurs démonstrations; mais il a fait une remarque capitale, c'est que, soit pour le travail personnel, soit pour les démonstrations au tableau, lorsque l'habitude intuitive est acquise, les lettres à tous les points de la figure sont absolument inutiles. Bien plus, il est gênant de les suivre sur le texte grec, car ces lettres constituent un nouveau symbolisme qui ne peut que compliquer le travail intellectuel.

Il suit de là que les découvertes des anciens dans l'Analyse géométrique et l'enseignement de la théorie des coniques en particulier, à l'époque des grands mathématiciens de l'antiquité, se faisaient sur la figure, en en considérant intuitivement (ou en en montrant aux élèves) les parties entre lesquelles on établissait des relations. Les Ouvrages d'Apollonius et d'Archimède n'étaient donc pas destinés à l'enseignement; envoyés en pays étranger, ils étaient calculés pour permettre aux initiés de reconstruire exactement, dans tous ses détails, la démonstration figurée ; pour ceux qui n'avaient pas la pratique de cette Algèbre géométrique, comme l'appelle M. Zeuthen, ils offraient nécessairement le caractère pénible et compliqué que nous leur trouvons d'ordinaire aujourd'hui, mais qui n'est nullement en fait celui des raisonnements que l'on doit supposer (¹).

(¹) On peut comparer, dans une certaine mesure, ce qui a lieu de nos jours en Géométrie descriptive. Il est certain que la multiplicité des notations par lettres ne fait qu'embrouiller inutilement les figures, et que l'enseignement y réclame impérieusement une tradition orale.

Il s'ensuit encore que la tradition de cette Algèbre géométrique devait se faire oralement; que, lorsque les études furent interrompues sous les derniers Ptolémées, cette tradition se perdit, et que les géomètres postérieurs ne retrouvant pas les procédés intuitifs et par suite la véritable clef des démonstrations d'Apollonius, le progrès ne recommença pas; les connaissances restèrent stationnaires jusqu'à l'époque où un nouveau symbolisme fut créé, celui dont nous nous servons depuis Descartes et Fermat.

On peut se rendre compte de la sorte, ce que l'on ne faisait guère en réalité auparavant, du progrès rapide des études géométriques dans l'antiquité, puis de leur arrêt brusque et de leur déclin. Sans doute, la cause indiquée n'est pas la seule qui ait exercé son influence; mais elle a joué un rôle capital.

J'ai essayé de mettre en lumière un des points les plus intéressants du Livre de M. Zeuthen; je ne puis naturellement m'étendre sur nombre d'autres qui ne méritent pas moins cependant d'attirer l'attention. Certains peuvent, sans doute, soulever des controverses, comme, par exemple, l'opinion que les coniques ont été à l'origine étudiées dans le plan comme lieux géométriques servant à la construction des problèmes solides (du troisième degré), avant d'être, au reste par les inventeurs eux-mêmes, engendrées par la section du cylindre ou du cône. Mais de telles conjectures valent au moins la peine d'être émises, et, pour celle, en particulier, que je viens de citer, c'est à très peu près celle que je considère comme la plus plausible.

J'aurais, au contraire, à faire quelques réserves sur d'autres points controversés; mais, comme il s'agit d'idées empruntées par M. Zeuthen à d'autres auteurs, et qui ont assez généralement cours, je crois hors de propos de m'y arrêter aujourd'hui. Je me contenterai donc de signaler deux légères inadvertances matérielles.

Page 73, à la fin de l'alinéa, au lieu de *gleich sein,* il faut lire *ähnlich sein.* C'est, au reste, une erreur de traduction.

Page 248, il est dit que Diophante représente l'inconnue par la lettre ς, choisie parce qu'elle est seule à n'avoir pas de valeur numérique. La raison est erronée, puisque précisément cette lettre a la valeur 6, et le fait est inexact. Diophante paraît avoir employé un symbole ressemblant à cette même lettre retournée;

je dis *paraît*, car la tradition manuscrite n'est pas suffisamment assurée [1]. PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET PÉRIODIQUES DES DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. Soient données :

1° Une fonction $F(z)$, méromorphe et simplement périodique, à période ω;

2° Une fonction algébrique $y(x)$, définie par une relation

$$f(x, y) = 0,$$

où f est entier en x et y, avec les diverses déterminations

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_m = \varphi_m(x).$$

Je me propose d'abord de développer la fonction

$$\Psi(x) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + \ldots + F(\varphi_m)$$

en une série de fractions rationnelles en x.

A cet effet, remarquons que la fonction F peut toujours s'exprimer par la formule

$$F(z) = C + P\left(e^{\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) + Q\left(e^{-\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) + \Phi(z),$$

où P et Q sont des polynomes et

$$\Phi(z) = \sum \left[A_0^i \cot\frac{\pi}{\omega}(z - a_i) + A_1^i \frac{d}{da_i}\cot\frac{\pi}{\omega}(z - a_i) + \ldots + A_{\lambda_i}^i \frac{d^{\lambda_i}}{da_i^{\lambda_i}}\cot\frac{\pi}{\omega}(z - a_i)\right],$$

---

(1) *Voir* la préface de mon édition gréco-latine de Diophante (Leipzig, Teubner, 1893, vol. I, p. VII).

où les a_i sont pôles de $\Phi(z)$, λ_i leurs ordres respectifs et A_i des constantes.

Occupons-nous d'abord de la partie entière de $F(z)$. On a

$$P\left(e^{\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) = \sum_{k=0}^{k=\mu} B_k e^{\frac{2k\pi z\sqrt{-1}}{\omega}},$$

et, en développant les exponentielles du second membre, on aura

$$P\left(e^{\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) = \sum_{i=0}^{i=\infty} K_i z^i,$$

avec

$$K_0 = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_\mu,$$

$$K_i = \frac{\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\right)^i}{1.2.3\ldots i}(B_1 + 2^i B_2 + 3^i B_3 + \ldots + \mu^i B_\mu) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent, en posant

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^{j=m} [\varphi_j(x)]^i,$$

on aura

$$P\left(e^{\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) = \sum_{i=0}^{i=\infty} K_i S_i(x).$$

De même, en écrivant

$$Q\left(e^{-\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) = \sum_{k=0}^{k=\eta} C_k e^{-\frac{2k\pi z\sqrt{-1}}{\omega}},$$

on aura

$$Q\left(e^{-\frac{2\pi z\sqrt{-1}}{\omega}}\right) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_i S_i(x),$$

avec

$$H_0 = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_\eta,$$

$$H_i = \frac{\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\right)^i}{1.2.3\ldots i}(C_1 + 2^i C_2 + 3^i C_3 + \ldots + \eta^i C_\eta).$$

Or les fonctions $S_i(x)$, s'exprimant rationnellement en fonction des coefficients de y dans $f(x, y) = 0$, sont des fractions rationnelles en x. On a ainsi la partie entière de $\Psi(x)$ développée en série de fractions rationnelles en x, convergente pour toutes

les valeurs de x autres que celles coïncidant avec les zéros du coefficient de la plus haute puissance de y dans $f(x, y) = 0$.

2. Faisons encore une remarque sur cette partie entière de $\Psi(x)$. Soit (a, b) un intervalle réel et tel que, lorsque x varie de a jusqu'à b, toutes les déterminations $y_i = \varphi_i(x)$ soient réelles et positives. La partie entière de $\Psi(x)$ peut alors s'exprimer par une intégrale définie simple pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b).

A cet effet, envisageons l'intégrale définie

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z) \cos rz\, dz,$$

où

$$\chi(x, z) = \frac{d}{dz} \log\left[f(x, z\sqrt{-1}) f(x, -z\sqrt{-1})\right].$$

On a

$$\chi(x, z) = \sqrt{-1}\left[\frac{d}{d(z\sqrt{-1})} \log f(x, z\sqrt{-1}) - \frac{d}{d(-z\sqrt{-1})} \log f(x, -z\sqrt{-1})\right].$$

Mais

$$\frac{d}{d(z\sqrt{-1})} \log f(x, z\sqrt{-1}) = \left(\frac{1}{z + \varphi_1\sqrt{-1}} + \ldots + \frac{1}{z + \varphi_m\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1},$$

$$\frac{d}{d(-z\sqrt{-1})} \log f(x, -z\sqrt{-1}) = \left(\frac{1}{z - \varphi_1\sqrt{-1}} + \ldots + \frac{1}{z - \varphi_m\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1};$$

donc

$$\chi(x, z) = \frac{2\varphi_1}{z^2 + \varphi_1^2} + \ldots + \frac{2\varphi_n}{z^2 + \varphi_n^2}.$$

Or, on sait que pour a réel et positif et r réel on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rx}{x^2 + a^2} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a} e^{-ra} & \text{si } r > 0, \\ \dfrac{\pi}{a} e^{ra} & \text{si } r < 0; \end{cases}$$

par conséquent

$$\sum_{i=0}^{i=m} e^{\frac{2r\pi\sqrt{-1}}{\omega}\varphi_i(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z)\cos\rho r z\,dz.$$

avec

$$\rho = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}$$

(pour z positif ou négatif). Il s'ensuit que la partie entière de $\Psi(x)$ s'exprime par une intégrale de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z)\,\mathrm{T}(z)\,dz,$$

où $\mathrm{T}(z)$ est une forme linéaire et homogène en

$$\cos\rho z,\quad \cos 2\rho z,\quad \ldots,\quad \cos p\rho z,$$

p désignant le plus grand des degrés des polynomes $\mathrm{P}(z)$ et $\mathrm{Q}(z)$.

Ajoutons-y encore la remarque suivante. Supposons que dans l'intervalle considéré (a, b) les diverses courbes $y_i = \varphi_i(x)$ ne se coupent pas et que, pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle, on ait

$$\varphi_1(x) > \varphi_2(x) > \ldots > \varphi_m(x).$$

On aura alors

$$\sum_{k=1}^{k=m} e^{r\varphi_k(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z)\cos r z\,dz = \frac{1}{2\pi}\mathrm{J},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{r\varphi_1(x)}[1 + \Delta(x)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{J},$$

avec

$$\Delta(x) = e^{r(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{r(\varphi_3-\varphi_1)} + \ldots + e^{r(\varphi_n-\varphi_1)}.$$

On en conclut que

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{r}\log\frac{\mathrm{J}}{2\pi} - \varepsilon,$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\log[1 + \Delta(x)].$$

Or, on a évidemment

$$\Delta(x) < me^{r(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

ou, en désignant par $-\delta$ la limite supérieure de la différence négative $\varphi_2 - \varphi_1$ (que l'on sait trouver par exemple par la méthode de Lagrange),

$$\Delta(x) < me^{-r\delta}.$$

D'autre part, $\Delta(x)$ étant toujours positive dans l'intervalle (a, b), on aura

$$\log[1 + \Delta(x)] < \Delta(x)$$

et, par suite,

$$\varepsilon < \frac{me^{-r\delta}}{r}.$$

Lorsque r augmente indéfiniment, ε tend rapidement vers zéro et l'expression

$$\frac{1}{r}\log\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, z)\cos rz\,dz$$

tend rapidement vers $\varphi_1(x)$.

3. Occupons-nous maintenant de la partie non holomorphe de $\Psi(x)$. On sait que

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2},$$

d'où

$$\cot\frac{\pi}{\omega}(z-a) = \frac{\omega}{\pi(z-a)} - \frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(z-a)}{n^2\omega^2 - (z-a)^2}.$$

D'autre part, si l'on pose

$$\theta(x, z, a) = \frac{d}{dz}\log[f(x, a+z)f(x, a-z)],$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned}\theta(x, z, a) = &\left(\frac{1}{z + a - \varphi_1} + \frac{1}{-z + a - \varphi_1}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{z + a - \varphi_m} + \frac{1}{-z + a - \varphi_m}\right) \\ = &-\frac{2(\varphi_1 - a)}{z^2 - (\varphi_1 - a)^2} - \ldots - \frac{2(\varphi_m - a)}{z^2 - (\varphi_m - a)^2}\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sum_{k=1}^{k=m} \cot\frac{\pi}{\omega}(\varphi_k - a) = \frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \Theta(x, n\omega, a) + \frac{\omega}{\pi}\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{\varphi_k - a}.$$

Les termes de la première somme du second membre sont des fractions rationnelles en x; la seconde somme est elle-même une fraction rationnelle en x. Par suite la fonction

$$\Omega(x, a) = \sum_{k=1}^{k=m} \cot\frac{\pi}{\omega}(\varphi_k - a)$$

se trouve développée en série de fractions rationnelles en x; et, en revenant à la fonction

$$\sum_{k=1}^{k=m} \Phi(\varphi_k),$$

on voit qu'elle s'exprime linéairement à l'aide des fonctions telles que

$$\Omega(x, a_i), \quad \frac{d}{da_i}\Omega(x, a_i), \quad \ldots, \quad \frac{d^{\lambda_i}}{da_i^{\lambda_i}}\Omega(x, a_i),$$

et par suite la fonction $\Psi(x)$ se trouve développée en série de la forme proposée.

4. Soit maintenant $F_1(z)$ une fonction méromorphe doublement périodique et envisageons la fonction symétrique

$$\Psi_1(x) = F_1(\varphi_1) + F_1(\varphi_2) + \ldots + F_1(\varphi_m).$$

Voici comment on peut la développer en une série de fractions rationnelles en x à double indice. On sait que la fonction Z, jouant le rôle d'élément simple pour les fonctions méromorphes doublement périodiques, peut s'écrire sous la forme

$$Z(z-a) = A(z-a) + \frac{1}{z-a} + \sum_{i,j}\left(\frac{1}{z-a-p} + \frac{1}{p} + \frac{z-a}{p^2}\right),$$

où $p = \alpha i + \beta j$ (α et β étant des constantes) et où les indices i, j obtiennent toutes les valeurs entières, positives, sauf à la fois

$i = 0$, $j = 0$. Par conséquent, en posant,

$$R(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \log f(x, y),$$

$$\Omega(x, a) = Z(\varphi_1 - a) + Z(\varphi_2 - a) + \ldots + Z(\varphi_m - a),$$

on aura

$$\Omega(x, a) = A \sum_{k=1}^{k=m} (\varphi_k - a)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{\varphi_k - a} - \sum_{i,j} \left[R(x, p) - \frac{m}{p} - \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^{k=m} (\varphi_k - a) \right].$$

Les deux premières sommes du second membre s'expriment rationnellement en x; tous les termes de la troisième sont aussi des fractions rationnelles en x, et par suite $\Omega(x, a)$ est ainsi développée en série de fractions rationnelles en x à double indice.

Or, la fonction $\Psi_1(x)$ s'exprime linéairement à l'aide des fonctions telles que

$$\Omega(x, a_i), \quad \frac{d}{da_i} \Omega(x, a_i), \quad \frac{d^2}{da_i^2} \Omega(x, a_i), \quad \ldots,$$

et par suite la fonction $\Psi_1(x)$ se trouve développée en série de la forme proposée.

NOTE SUR LE PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* octobre 1895, M. Hadamard démontre, par un calcul aussi simple qu'heureux, une propriété du mouvement d'un solide de révolution tournant autour d'un point de son axe. Un calcul analogue peut donner immédiatement, sur le pendule sphérique, un théorème que Halphen a déduit de propriétés assez peu élémentaires des fonctions elliptiques. Quand le pendule passe d'une position pour laquelle sa cote est maximum à la position suivante pour laquelle elle devient minimum ou inversement, son azimut varie d'un angle Ψ

que V. Puiseux a montré être supérieur à $\frac{\pi}{2}$: il s'agit de prouver que Ψ ne dépasse jamais π. Cet angle peut s'exprimer par une intégrale de forme bien connue

$$(1) \qquad \Psi = \int_b^a \frac{l\mu\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{R(z)}} = \int_b^a \varphi(z)\,dz,$$

où l'on a posé, l étant la longueur du pendule,

$$\mu = \sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}, \qquad R(z) = (a-z)(z-b)[(a+b)z+l^2+ab];$$

les racines a, b de $R(z)$ sont comprises entre l et $-l$; la troisième, $-\frac{l^2+ab}{a+b}$, ou c, est entre $-l$ et $-\infty$.

Sur un plan, traçons deux axes rectangulaires OX, OY et prenons les points du plan pour affixes d'une variable complexe z : aux valeurs a, b, c correspondent des points A, B, C de l'axe des x. Soient D, D′ les points où OX et son prolongement sont coupés par une circonférence de centre O et de très grand rayon R. Je considère une région S limitée extérieurement par la circonférence R et par un lacet partant de D′ pour entourer le point C, intérieurement par deux circonférences de très petit rayon ε, décrites autour des points A, B et reliées par deux portions Δ, Δ_1 de droites tracées infiniment près de OX, Δ au-dessus, Δ_1 au-dessous. Dans la région S, $\varphi(z)$ est uniforme, avec deux pôles P, P_1 pour $z = \pm l$; soient p, p_1 les résidus correspondants. En D l'argument de $R(z)$ est π; faisons l'argument de $\sqrt{R(z)}$ égal à $\frac{\pi}{2}$ en ce point et suivons sa variation dans la région S : on voit qu'il est égal à 2π sur la partie supérieure du lacet D′C, à π sur sa partie inférieure, à 2π sur Δ_1, à π sur Δ, à $\frac{\pi}{2}$ en P, à $\frac{3\pi}{2}$ en P_1 ; aux deux pôles, $R(z)$ est égal à $-\mu^2$ et l'on trouve aisément que p, p_1 ont la même valeur $-\frac{1}{2i}$.

Cela posé, intégrons $\varphi(z)\,dz$ sur le contour de S, en suivant le contour extérieur dans le sens direct, le contour intérieur dans le sens indirect. Pour R et $\frac{1}{\varepsilon}$ infinis, l'intégrale le long des trois circonférences considérées ci-dessus, aussi bien qu'autour de C,

s'annule; en nous reportant à ce que j'ai dit sur l'argument de $\sqrt{R(z)}$, nous verrons sans peine que le théorème de Cauchy donne

$$2\int_{-\infty}^{c} \varphi(z)\,dz - 2\int_{b}^{a} \varphi(z)\,dz = 2\pi i(p+p_1) = -2\pi;$$

d'où, en remettant pour $\varphi(z)$ sa valeur où les radicaux seront pris positivement,

$$\int_{b}^{a} \frac{l\mu\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{R(z)}} = \pi + \int_{-\infty}^{c} \frac{l\mu\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{R(z)}};$$

dans la dernière intégrale, $l^2 - z^2$ est toujours négatif et le premier membre égal à Ψ est évidemment moindre que π, résultat qu'il semble difficile d'obtenir par l'étude directe de l'intégrale (1) quand b est négatif. Quand b est égal à $-a$, et dans ce cas seul, c étant infini, Ψ atteint sa limite π : la trajectoire du pendule devient un grand cercle.

SUR LES VALEURS QUE PREND LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN, POUR s ENTIER POSITIF ET IMPAIR;

PAR M. KLUYVER.

Dans ce qui suit je me propose de déduire quelques formules qui peuvent servir au calcul de $\zeta(2n+1)$, différentes de celles que donne M. Cahen dans son Mémoire : *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues* (*Annales de l'École Normale*, 1894).

Supposant n entier et positif, je considère la fonction uniforme

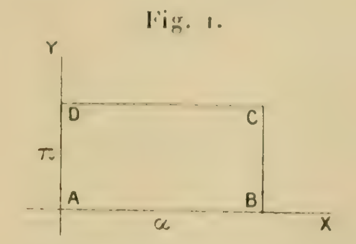
$$w = \frac{(z-i\pi)^n z}{e^z - 1},$$

qui est holomorphe dans l'aire du rectangle ABCD, limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x = \alpha$, $y = \pi$ et à laquelle on peut donc

appliquer le théorème de Cauchy, ce qui donne

$$\int_{AB} w\,dz = \int_{AD} w\,dz + \int_{DC} w\,dz + \int_{CB} w\,dz.$$

Fig. 1.



Comme la dernière intégrale s'évanouit, quand α devient infini, cette égalité se réduit à

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{(x-i\pi)^n x}{e^x - 1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}(-1)^n i^{n+1} \pi^{n+2} \int_0^1 (1-y)^n \left(\cot\frac{\pi y}{2} - i\right) dy - \int_0^\infty \frac{x^n(x+i\pi)}{e^x+1}\,dx. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans cette équation

$$\frac{\pi y}{2}\cot\frac{\pi y}{2} = 1 - \sum_1^\infty \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k)!} y^{2k} = 1 - f(y),$$

je remarque que l'intégrale $\int_0^1 (1-y)^n f(y)\,dy$ s'exprime par la série

$$\Gamma(n+1) \sum_1^\infty \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k+n+1)!} = \Gamma(n+1) I_{n+1};$$

puis je rappelle que pour des valeurs de s à partie réelle positive on aura

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx, \qquad \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx;$$

enfin je pose

$$\frac{\Gamma(s)\zeta(s)}{\pi^{s-1}} = H_s, \qquad \Gamma(s)\left(\frac{1}{s!} - I_s\right) = L_s;$$

conséquemment l'équation (1) se transforme en celle-ci

$$(2)\quad \begin{cases} H_{n+2} - n_2 H_n + n_4 H_{n-2} - \ldots, \\ - i n_1 H_{n+1} + i n_3 H_{n-1} - i n_5 H_{n-3} + \ldots, \\ = (-1)^n i^{n+1} L_{n+1} + \dfrac{(-1)^{n+1} i^{n+2} \pi}{2(n+1)(n+2)} - \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) H_{n+2} - i\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) H_{n+1}. \end{cases}$$

Si l'on prend ici $n = 1, 3, 5, \ldots$ ou bien $n = 2, 4, 6, \ldots$, il en résulte les deux systèmes d'équations

I.

$$H_3 = L_2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) H_3,$$
$$H_5 - 3H_3 = -L_4 - \left(1 - \frac{1}{16}\right) H_5,$$
$$H_7 - 10H_5 + 5H_3 = L_6 - \left(1 - \frac{1}{64}\right) H_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

II.

$$2H_3 = L_3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) H_3,$$
$$4H_5 - 4H_3 = -L_5 + \left(1 - \frac{1}{16}\right) H_5,$$
$$6H_7 - 20H_5 + 6H_3 = L_7 + \left(1 - \frac{1}{64}\right) H_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

par lesquelles H_3, H_5, H_7, ... sont exprimés par π et par les nombres de Bernoulli à l'aide des séries d'une convergence assez rapide.

En particulier on trouve pour $\zeta(3)$ les deux expressions équivalentes

$$\zeta(3) = \frac{2\pi}{7}\left[\frac{1}{2!} - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k+2)!}\right] = \frac{4\pi}{5}\left[\frac{1}{3!} - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k+3)!}\right].$$

Aux équations I et II on peut encore ajouter deux autres systèmes en appliquant le raisonnement précédent à la fonction

$$w' = \frac{(z - 2i\pi)^n z}{e^z - 1};$$

toutefois il faut en même temps doubler la hauteur AD du rectangle ABCD et prendre $AD = 2\pi$. Alors, au lieu de $\frac{\pi y}{2} \cot \frac{\pi y}{2}$ et de $f(y)$, ce seront $\pi y \cot \pi y$ et la fonction

$$\varphi(y) = \sum_{1}^{\infty} \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{(2k)!} y^{2k},$$

qui s'introduisent dans le calcul et, par conséquent, ce seront les

séries

$$J_{n+1} = \sum_1^\infty \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{(2k+n+1)!},$$

et les quantités

$$K_s = \Gamma(s)\left(\frac{1}{s!} - J_s\right),$$

qui interviennent au lieu des I_{n+1} et des L_s.

Tout calcul fait, on trouvera au lieu de (2) l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &-2^2 n_2 H_n + 2^4 n_4 H_{n-2} - 2^6 n_6 H_{n-4} + \ldots \\ &-2 i n_1 H_{n+1} + 2^3 i n_3 H_{n-1} - 2^5 i n_5 H_{n-3} + \ldots \\ &\quad = (-1)^n 2^{n+1} i^{n+1} K_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} i^{n+2} \pi}{(n+1)(n+2)} + 2 i H_{n+1}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on obtient, pour $n = 1, 3, 5, \ldots$ et pour $n = 2, 4, 6, \ldots$, les systèmes suivants

III.

$$\begin{aligned} 0 &= -K_2, \\ 3 H_3 &= 2^2 K_4, \\ 10 H_5 - 20 H_3 &= -2^4 K_6, \\ 21 H_7 - 140 H_5 + 112 H_3 &= 2^6 K_8, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} 3 H_3 &= 2^2 K_3, \\ 5 H_5 - 16 H_3 &= -2^4 K_5, \\ 7 H_7 - 80 H_5 + 96 H_3 &= 2^6 K_7, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

entièrement différents des systèmes I et II et dans lesquels on remarquera les premières équations, qui peuvent s'écrire

$$0 = \frac{1}{2} - \sum_1^\infty \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{(2k+2)!},$$

$$\zeta(3) = 4\pi\left[\frac{1}{4!} - \sum_1^\infty \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{(2k+4)!}\right] = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{1}{3!} - \sum_1^\infty \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{(2k+3)!}\right].$$

Ainsi, en faisant usage tour à tour des équations I, II, III ou IV, il est possible de trouver quatre expressions équivalentes pour les sommes $\zeta(2n+1)$ dont il serait peut-être difficile d'établir directement l'identité.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Zeuthen (H.-G.). — *Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter Vorlesungen.* Gr. in-8°, VII-344 p. Kopenhague, Host et fils. 6 m.

Ball (W.-W.-R.). — *A Primer of the History of Mathematics.* In-8°, 169 p. London, Macmillan. 2 sh.

Bosscha (J.). — *Christian Huygens.* Rede, am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes. Mit erläut. Anmerkg. von Verf. Aus dem Holländischen von Th. W. Engelmann. Gr. in-8°, 77 p. sur hollande. Leipzig, Engelmann. 1 m. 60 pf.

Brahy (H.-E.). — *Exercices méthodiques de Calcul intégral.* In-12, 304 p. Bruxelles, Lamertin. 5 fr.

Cantor (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 3. (Schluss-Band). Vom J. 1668 bis zum J. 1759. 2 Abthlg (1700-1726). Gr. in-8° avec fig. Leipzig, Teubner. 6 m.

Collette (L.). — *Exercices sur le Calcul différentiel.* In-8°, 294 p. Liége, Miot et Jamar. 3 fr.

Connaissance des Temps ou des mouvements célestes pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1898, publiée par le Bureau des Longitudes. In-8°, VI-873 p. et planches. Paris, Gauthier-Villars et fils. 4 fr.

D'Ovidio (E.). — *Geometria analitica.* In-8°. Torino, Frat. Bocca. 10 fr.

Elliot (E.-B.). — *An Introduction to the Algebra of Quantics.* In-8°. London, Frowde. 15 sh.

Faye (H.). — *Sur l'origine du monde.* Théories cosmogoniques des anciens et des modernes. 3e édit. In-8°, XI-314 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 6 fr.

Fleury (H.). — *L'Analyse dite infinitésimale sans limites ni infiniment petits.* 2e édit. In-8°, 80 p. Paris, impr. Blot. 2 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres complètes de Christian Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences. Tomes II à VI. La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1895.

Le premier Volume de cette belle et importante publication nous a été donné en 1888, le sixième en 1895. Jamais peut-être pour l'histoire d'un savant illustre, les documents n'ont été plus nombreux, plus authentiques, et réunis avec plus de conscience, de savoir et de zèle. Le tome VI se termine par la mille sept cent quatre-vingt-dixième lettre écrite par Huygens ou reçue et conservée par lui, pendant la première moitié, à peine, de sa vie scientifique. Aucun document n'a été négligé. Tous ne sont pas d'importance égale, mais tous contribuent à l'intérêt d'une collection à la fois imposante et touchante. Les éditeurs ne sauraient recevoir trop de remercîments. Nous devons aujourd'hui leur exprimer nos sympathiques regrets. Un grand deuil a attristé la savante Commission, sans ralentir ses travaux. M. Bierens de Hahn, le géomètre érudit et profond qui, président de la Commission, avait abandonné pour elle ses autres travaux, a succombé le 11 avril 1895 à une courte maladie, à l'âge de 73 ans. Né à Amsterdam le 3 mai 1822, M. Bierens de Hahn, instruit dans sa famille, n'était élève d'aucune école. Sa thèse de doctorat, soutenue à Leyde en 1847, traitait *de Lemniscata Bernoulliana*. Elle fut remarquée par les maîtres et contribua sans doute à le faire nommer professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Leyde, où il a formé de brillants élèves. L'œuvre personnelle de M. Bierens de Hahn révèle les qualités éminentes qui devaient rendre sa collaboration à la publication des œuvres d'Huygens si précieuse pour tous. Les tables d'intégrales définies, publiées par l'Académie des Sciences d'Amsterdam en 1856, et dont une seconde édition a paru en 1867, lui avaient mérité déjà la reconnaissance, la haute estime et la confiance de tous les géomètres. Sans autre but que celui d'être utile, il a rendu son nom justement célèbre. Dans les notes remplies d'une érudition aussi solide que sobre et modeste, dont il a enrichi chaque page des six

Volumes de la Correspondance d'Huygens, on reconnaît la même main, le même esprit judicieux et le même dévouement à une tâche sans éclat. Nul ne pouvait faire mieux que lui, et bien peu de savants, capables, comme il l'était, de produire des œuvres originales, auraient consenti à se dévouer entièrement à mettre en pleine lumière la gloire éclatante déjà d'un compatriote admiré. La Hollande, heureusement, est riche en savants éminents, en érudits et en hommes dévoués. La Commission se compose aujourd'hui de MM. Van de Sand-Backhuysen, J. Bosscha, Bungersdisch, Griniviss, Lorentz, Korteweg, Oudemans, du Rieu. De tels noms doivent rassurer les admirateurs d'Huygens. Le septième Volume, en voie de publication, sera digne de ceux qui l'ont précédé.

Peu de temps avant la publication du sixième Volume, le 8 juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire de la mort d'Huygens, M. J. Bosscha, l'un des membres les plus dévoués de la Commission, dont les beaux travaux comme physicien, et la haute situation comme secrétaire de la Société hollandaise des Sciences et rédacteur des *Archives néerlandaises*, doivent inspirer une entière confiance, a prononcé sur la vie et sur les travaux de l'illustre mort un beau et savant discours, qui le montre digne à tous égards de mener à bien la grande entreprise. Reprenant dès sa naissance l'histoire du jeune Archimède et montrant les mérites si divers de son admirable famille, M. Bosscha semble inviter les auditeurs qui l'ont applaudi et les nombreux lecteurs des traductions de son discours publiées en Allemagne et en France, à relire la Correspondance dont ses premières pages sont le savant et judicieux commentaire. Son travail et les notes dont il l'a enrichi nous donnent l'occasion de revenir à la correspondance d'Huygens. C'est toujours avec une nouvelle satisfaction et, j'ose le dire, avec un nouveau profit, que les jeunes géomètres reprendront la lecture de cette réunion de documents si variés, si riches d'idées ingénieuses et profondes, produits avec tant de simplicité et de modestie vraie.

L'une des premières questions signalées par M. Bosscha est celle de la chaînette, que Christian Huygens, en 1646, à l'âge de dix-sept ans, abordait en véritable maître. La question, sur laquelle il est revenu à plusieurs reprises, est à la fois très digne

d'intérêt par le progrès important dû au jeune étudiant, et par la forme beaucoup trop longue et un peu embarrassée dont il faut accuser les habitudes de l'école, auxquelles l'Analyse infinitésimale devait apporter un changement dont l'étude de ces pages nous montre la nécessité. On admettait, dit M. Bosscha, qu'un fil librement suspendu par deux points prend la forme d'une parabole. L'assertion est exacte, mais aucun géomètre, en répétant un énoncé sans preuve, donné par Galilée dans le cours d'une énumération des propriétés de la parabole, n'avait proposé de démonstration. Galilée s'était borné à relever la courbe sur une muraille, sans rien alléguer qu'une constatation empirique évidemment trop rapide, à laquelle, cela le prouve, il n'attachait pas d'importance. Il n'a pas étudié la question. Rien n'est plus facile en effet que de tracer la courbe pour constater ensuite que les diamètres ne sont ni rectilignes, ni parallèles. Le moindre écolier peut le faire en quelques minutes. Si l'écolier Christian Huygens s'était borné à cette preuve de fait, il aurait mérité une bonne note de son maître, sans révéler son génie inventif. Si dans cette première rencontre, il a fait mieux que Galilée, on ne pourrait sans injustice le déclarer vainqueur de l'illustre Florentin. Galilée n'a jamais combattu; jamais il n'a tenté l'étude mathématique de la chaînette. Le problème abordé par le jeune élève de l'école de Bréda est très simple : la courbe formée par un fil est-elle une parabole? La réponse, aujourd'hui bien aisée à produire clairement et rigoureusement en quelques lignes, est, très certainement, celle qui s'est présentée à l'esprit d'Huygens, mais que les habitudes de l'école le conduisaient à rendre à la fois moins rigoureuse et moins simple. Les exemples analogues sont nombreux et les œuvres de l'Archimède de Syracuse en fourniraient de plus frappants encore que celles de l'Archimède hollandais.

Le raisonnement d'Huygens repose sur un principe qu'il n'énonce pas : dans un fil pesant en équilibre, les tangentes aux extrémités d'un arc arbitrairement choisi se coupent sur la verticale passant par le centre de gravité de cet arc. Or dans une parabole dont l'axe est vertical, le point d'intersection de deux tangentes est à égale distance des diamètres verticaux qui passent par leur point de contact. Le centre de gravité de l'arc de chaînette devrait donc se projeter sur une perpendiculaire à l'axe, au

point milieu de la projection de l'arc; si donc on projette chaque élément de la corde sur une ligne horizontale en attribuant à cette projection le poids même de l'élément, on obtiendra une ligne droite dont chaque portion aura son centre de gravité en son point milieu et qui, par conséquent, sera homogène. La force qui sollicite chaque élément de la chaînette parabolique est donc proportionnelle à sa projection horizontale.

Le poids d'un fil homogène étant proportionnel à l'arc, et non à la projection, la forme parabolique n'est pas la sienne. Telle est la démonstration élégante et rigoureuse aperçue par Huygens; la forme qu'il lui donne est plus compliquée, on pourrait dire plus embarrassée. La raison en est la substitution, à la courbe, d'un polygone funiculaire dont les côtés ont des longueurs finies; les tensions qui doivent faire équilibre au poids d'une portion du polygone sont dirigées suivant les deux côtés qui la précèdent et la suivent; il ne s'agit plus dès lors d'une parabole dont les propriétés sont très connues et très simples, mais d'un polygone inscrit dans la courbe qui doit passer par tous les sommets. La rigueur de la démonstration devient contestable et les artifices nécessaires pour la plier à ces conditions parasites la compliquent inutilement. Le principe de la démonstration appartient au jeune écolier, les détails qui la gâtent à son école.

Van Schooten, le savant professeur de Christian Huygens à l'Université de Leyde, était un disciple de Descartes. Son admiration pour le maître ne séparait pas la Physique et la Mécanique de la Géométrie. Huygens, moins prévenu, sans s'arrêter aux rêveries sur les principes de la Physique, opposait aux théorèmes de Mécanique, particulièrement à la théorie du choc, des objections sans réplique. Ces lois du mouvement, dit M. Bosscha, dont Descartes se croyait si certain « qu'encore que l'expérience nous semblerait faire voir le contraire, nous serions néanmoins obligés d'ajouter plus de foi à notre raison qu'à nos sens » formaient des articles fondamentaux de la constitution réglant un univers uniquement composé d'espace et de mouvement. Tous les phénomènes de la nature devaient, en effet, trouver leur explication dans l'infinie variété de transmission et de transformation du mouvement. Pour Van Schooten, comme pour une foule de ses contemporains, Descartes était infaillible. Quels doivent avoir été ses sentiments,

demande M. Bosscha, lorsque son élève admiré vint lui montrer ce qu'il venait d'écrire à Gutschoven, savoir que, sauf la première, toutes les lois du mouvement énoncées par Descartes étaient suspectes de fausseté. Huygens embarrasse son maître en lui soumettant un problème dans la solution duquel les principes de Descartes conduisent à une absurdité évidente.

Un corps A se meut vers un corps B qui, en même temps, est en mouvement vers A. B est double de A (nous dirions de masse double), mais la vitesse de A est double de celle de B. Qu'arrivera-t-il après le choc? Chacun des corps devra rétrograder en conservant, dans une direction opposée, la vitesse qu'il possédait avant le choc. Si cette conclusion est admise, comment la concilier avec l'assertion de Descartes que B, supposé en repos, ne sera jamais mis en mouvement par A qui est de masse moindre. Van Schooten cependant ne se laisse pas convaincre; il conjure Huygens de ne pas mettre en péril sa réputation en s'attaquant à une autorité aussi incontestée et en se montrant ingrat envers l'illustre maître. Il lui conseille de s'occuper de Mathématiques. Les historiens de la Science, acceptant la déclaration formelle de Newton, dans le livre des Principes, attribuent à Wrenn et à Wallis l'honneur d'avoir découvert indépendamment de Huygens, et en même temps que lui, les lois du choc des corps parfaitement élastiques. M. Bosscha, avec une grande abondance de preuves empruntées au sixième Volume, a fait justice de cette erreur. Huygens fut le premier auteur de la découverte. Avant que ses émules eussent rien publié, il a lu ses lois du mouvement à l'Académie des Sciences où leur discussion occupa deux séances.

La lecture du Mémoire de Huygens publié dans ses Œuvres posthumes laisse, il faut l'avouer, beaucoup de doutes sur la rigueur des démonstrations; les résultats sont exacts, mais les axiomes sur lesquels Huygens fait reposer les lois du choc semblent fort éloignés de l'évidence.

Après le choc de deux corps (parfaitement élastiques), si l'un d'eux a conservé sa vitesse primitive, l'autre doit aussi conserver la sienne.

Il s'agit des vitesses absolues.

Quelle est l'origine de cet axiome que Huygens nomme une hypothèse? Deux preuves se présentent immédiatement à l'esprit,

mais il semble impossible qu'elles aient été acceptées par Huygens. La première consiste à invoquer le principe de la conservation des forces vives dont l'axiome énoncé est la conséquence immédiate. Huygens, s'il en était ainsi, n'aurait pas présenté le principe comme une hypothèse. La conservation des forces vives, après le choc, est d'ailleurs démontrée très longuement (proposition XI) comme une conséquence de l'hypothèse admise avant la proposition IV. L'hypothèse pourrait également se déduire du principe de Descartes : la quantité du mouvement demeure invariable pendant et après le choc. Mais ce principe est faux; non seulement Huygens ne l'a jamais accepté, sa correspondance le prouve, mais dans l'opuscule même que nous examinons, il déclare que la somme des quantités de mouvement, quand on la calcule sans tenir compte des directions, peut s'accroître ou diminuer par le choc (proposition VI).

Faut-il admettre enfin que l'hypothèse proposée ait paru évidente par elle-même? Ceux qui voudront en relire l'énoncé en tomberont difficilement d'accord. Il paraît impossible cependant d'en accepter une autre. M. Bosscha reproche avec raison à Wrenn d'avoir fait reposer sa théorie du choc sur des propositions en partie inintelligibles, en partie absurdes; il cite un jugement porté par Oldembourg dans une lettre, qui fait partie du sixième volume : « M. Wrenn dit qu'à son avis il n'y a point de démonstration de ce qu'il a advancé dans son écrit du mouvement, sans qu'on suppose un grand nombre d'autres postulata, qui demanderaient, peut estre, d'autres démonstrations. »

Le postulatum d'Huygens ne demande que l'acceptation du principe de la conservation des forces vives, mais il est certain qu'au contraire Huygens, sans admettre le principe général, prétendait l'en déduire dans ce cas particulier. Les démonstrations de Huygens sont bien peu lues aujourd'hui, comme celles d'Archimède, et la raison est la même : il ne fait pas usage de la langue algébrique qui, sans rien ajouter aux idées, apporte tant de simplicité dans leur expression.

Les axiomes étant acceptés, tout repose sur ce dernier postulatum : « Un mouvement commun uniforme imprimé aux masses qui se choquent ne change en rien les vitesses relatives avant, pendant et après le choc. »

En d'autres termes, si les expériences sont faites sur un bateau dont la marche en ligne droite soit uniforme et parfaitement régulière, les phénomènes observés seront exactement les mêmes. Les conséquences de ce postulatum font sortir toute la théorie des résultats admis dans des cas en apparence très particuliers.

Le cas de deux corps de masses égales se rencontrant avec des vitesses égales et contraires devient identique à celui des mêmes corps se rencontrant avec des vitesses quelconques.

Le cas de deux corps se rencontrant de telle sorte que l'un d'eux et par conséquent tous deux reprennent leurs vitesses primitives, comprend également tous les autres; et l'hypothèse sur laquelle nous avons appelé l'attention équivant au théorème suivant :

« Lorsque deux corps élastiques se rencontrent, quelles que soient leurs masses et leurs vitesses, les vitesses relatives, avant et après le choc, sont les mêmes. »

Ce théorème ne saurait suffire à la solution du problème. Huygens, sans en faire une proposition énoncée à part, y adjoint un principe de beaucoup plus grande importance : si les vitesses avant le choc sont acquises par la chute verticale des corps, et que les vitesses après le choc soient employées à procurer l'ascension de chaque corps, le centre de gravité ne pourra s'élever au-dessus de son niveau primitif. C'est l'axiome sur lequel devait plus tard reposer la théorie du pendule composé; Huygens en fait usage comme d'une vérité incontestable sur laquelle il ne juge pas à propos d'appeler l'attention.

La traduction algébrique du principe des mouvements relatifs, qui, dans l'opuscule de Huygens, joue un si grand rôle, met en évidence une conséquence curieuse qui, je le crois, n'a pas été remarquée.

Le principe de la conservation des forces vives étant admis, celui de la conservation du mouvement du centre de gravité en est la conséquence.

La réciproque n'est pas exacte et ne saurait l'être, car le second principe, rigoureusement exact dans tous les cas, s'applique aux corps imparfaitement élastiques; le premier suppose une élasticité parfaite.

Le beau discours prononcé par M. Bosscha devant l'Académie

d'Amsterdam a été complété par quelques notes du savant auteur. Je remarque dans l'une d'elles une assertion à laquelle je ne puis souscrire.

Cavalieri, dit le secrétaire de la Société hollandaise des Sciences, est le premier qui ait clairement formulé la loi de l'inertie et qui ait démontré que, en vertu de sa loi, un corps projeté décrit une parabole.

Cavalieri, disciple respectueux de Galilée, serait le premier à protester contre l'honneur qu'on lui accorde en le plaçant, même comme géomètre, bien au-dessus de son maître. Il accepterait moins encore le jugement qui suit : « La première édition de l'Ouvrage de Cavalieri, *Lo specchio ustorio*, a paru presque en même temps que les *Dialogi* de Galilée qui montrent en plusieurs endroits que celui-ci, à cette époque, avait sur la loi de l'inertie des idées complètement fausses. » *Lo specchio ustorio* de Cavalieri a été imprimé à Bologne en 1632; les dialogues de Galilée ont paru pour la première fois en 1638, imprimés à Leyde par les Elzévir; la priorité appartiendrait donc à Cavalieri, si lui-même n'avait pris soin de rendre justice à son maître. On lit en effet dans l'édition de 1632, antérieure à la publication des *Dialogi :* « Ma quanto vi aggiunga la cognitione delle scienze matematiche, giudicate da quelle famosissime scuole de Pitagorici, e de Platonici, sommamente necessarie per intender le cose fisiche, spero in breve, sarà manifesto, per la nuova doctrina del moto promessaci dall esquisitissimo saggiatore della natura, dico dal signor Galileo Galilei, ne suoi Dialogi, protestando io haver avuto e motivo e lume ancora in parte intorno a quel poco ch'io dirò del moto in questo mio Trattato. »

Cet autre passage n'est pas moins décisif : « Questa cose però sianò da me dette, come per un passaggio, che perciò non me sono spiegato con figura, ne con quella chiarezza, che bisognarebbe, soiche rimetto il Lettore a quello, que la sottighezza del sig. Galileo c'insegnara nellopera del moto, che ci promette ne' suoi Dialogi. »

M. Bosscha, qui paraît peu disposé à admirer Galilée, lui refuse, avec raison, je n'en disconviens pas, l'honneur d'avoir créé la théorie du pendule. Mais jamais Galilée n'y a prétendu, et la lecture des passages relatifs à cette grande question ne doit nul-

lement diminuer l'admiration due au plus illustre des savants italiens. Galilée s'est mépris sur la régularité des oscillations du pendule; cela n'est pas contestable. Mais il y a trois manières de se tromper en Physique : en proposant des démonstrations fausses et déclarant prouvé ce qui ne l'est pas ; en déclarant comme vraisemblable, mais douteux, ce qui est inexact; en donnant comme exactes et précises des expériences imparfaites. Galilée n'a jamais commis la première faute; ce qu'il a affirmé, en le déduisant du raisonnement seul, est rigoureux et exact. Si l'on considère dans un cercle vertical les cordes aboutissant au point le plus bas, elles sont toutes, sous l'influence de la pesanteur, parcourues dans le même temps. Assimilant ensuite, sans ignorer que la conclusion manquait de rigueur, la chute suivant la corde à la chute circulaire, il en a conclu, à titre de conjecture seulement, que les oscillations du pendule sont isochrones, sans distinguer dans cet énoncé, toujours inexact, le cas des petites oscillations, pour lequel l'erreur commise est moindre. La lettre est de 1637; Galilée alors était aveugle; n'est-il pas excusable d'avoir proposé comme exactes des expériences dont la conclusion n'est pas même grossièrement approchée? Je ferai également de grandes réserves sur la note relative à la découverte de l'attraction. La théorie de la force centrifuge, dont Huygens a été l'inventeur incontesté, était nécessaire, je n'en disconviens pas, pour arriver au calcul des forces centripètes, qui sont elles-mêmes le premier pas dans l'œuvre colossale de Newton. Mais quelle perturbation n'apporterait-on pas dans l'histoire de la Science en attribuant, même en partie, l'honneur d'une découverte à ceux qui ont préparé les instruments de l'inventeur. Autant presque voudrait dire que, par ses études sur les lentilles, Huygens a acquis le droit d'être cité comme l'un des inventeurs de la Photographie. Le traité posthume de Huygens sur la force centrifuge marque un grand progrès dans l'histoire de la Mécanique. Newton s'en est servi et l'a reconnu avec une loyauté empressée. Il ne me semble pas qu'on doive rien ajouter à sa déclaration. Je me permettrai cependant d'ajouter que Huygens parle uniquement de la force centrifuge. Le mobile, dont il étudie le mouvement, est attaché à un fil et produit une force qui tend à le rompre. Si nous savons que l'action est égale à la réaction et que, par conséquent, le problème de la force cen-

tripète dans le mouvement circulaire est résolu quand on a calculé la force centrifuge, n'est-ce pas à Newton que nous le devons? La troisième loi de Képler aurait aisément permis, en supposant les orbites circulaires, de trouver l'attraction du Soleil sur les planètes inversement proportionnelle au carré de la distance, mais il aurait fallu chercher cette attraction et y croire; Huygens s'y est toujours refusé.

Huygens, dans sa correspondance la plus intime avec sa famille, parle peu de lui-même et de ses succès cependant très grands dans la bonne compagnie parisienne. En aucune occasion, sa modestie et sa simplicité ne se démentent. La Science ne l'absorbe nullement; sa curiosité embrasse tout, ne veut rien ignorer des histoires et des contes de la Haye :

Vous m'obligerez beaucoup, écrit-il à son frère Lodewygk, à me mander des nouvelles comme vous faites, et je vous prie de continuer toujours de même, car sans vous je n'apprendrais rien, ce qui me fait de la honte quand je vais voir les gens de notre pays, comme Madame de Bunt et autres, qui ont des correspondances très réglées et savent tout ce qui se passe chez nous.

Pourquoi n'ajouterais-je pas ce détail que le grand géomètre n'écrivait pas cependant pour la postérité?

Je me suis enquis des remèdes contre la rudesse de la peau des bras, mais je n'en ai pas trouvé de particulier pour cela, mais seulement pour rendre douce la peau des mains, que l'on dit encore pouvoir servir à ce que Mademoiselle Cabellino demande. Je vous en envoie la recette que m'a donnée une dame qui a les mains fort blanches et belles, et je souhaite que celles de la demoiselle susdite le deviennent autant pour votre satisfaction, car pour moi il y a peu d'apparence que je les touche jamais, et vous en devez estimer d'autant plus le soin que je prends.

Il écrit à son beau-frère Doublet, le 28 octobre 1667 :

Vous devez faire un tour ici vers le printemps et pouvez vous assurer que vous n'en aurez point de regret, quand ce ne serait que pour voir les ouvrages qu'on a faits depuis que vous n'y avez été. Le bâtiment des Tuileries est tout à fait achevé et il n'y a rien de plus beau que de voir cette grande façade, qui est toute neuve, quand on se promène dans le jardin qui est aussi merveilleusement changé et embelli depuis qu'on y a fait de grands parterres et rondeaux du côté des bâtiments, et une allée large tout à travers, que l'on continue maintenant par le jardin de Renard jusque sur la montagne de Chaillot. Vous verriez aussi le Louvre fort

avancé, comme encore le collège des Quatre-Nations et notre somptueux Observatoire, de plus le Val-de-Grâce qui a tout autre mine après que l'on y a bâti les deux ailes et qu'on le voit à découvert du côté de la rue. L'on vous mènerait aux Gobelins voir ces belles manufactures dont M. Le Brun a la conduite et qu'il étala il n'y a guère aux yeux du Roy, où je fus aussi et admirai la quantité de grands vases d'argent et les belles tapisseries et tableaux, dont on avait paré une grande cour. Je ne vous parle pas des beautés vivantes que vous verriez, dont il y en a que vous trouveriez avancées aussi bien que les bâtiments. Enfin, pour un homme curieux comme vous, exempt d'affaires et naturellement voyageur, il me semble qu'il n'y a pas à délibérer.

Dans une lettre antérieure, Huygens, satisfait de Paris et prompt à l'admiration, vante la bonne police de la propreté des rues :

L'ordre pour le nettoiement des rues s'observe avec beaucoup d'exactitude, qui est que chaque maison doit faire balayer à huit heures du matin, jusqu'où elle s'étend dans la rue, et en même temps viennent les charettes pour ôter ce qu'il y a d'amassé. Je prends plaisir maintenant à me promener parfois le matin puisqu'on le peut, sans être obligé de regarder continuellement à ses pieds.

Les soirées sont quelquefois consacrées à l'Opéra. Huygens écrit à son frère :

Je vis avant-hier le ballet de Flore qui est bien beau. Il y avait en même temps pour spectateurs quatre Iroquois qui sont venus ici du Canada pour voir le pays. On dit qu'en étant revenus, ils dirent que le diable fait bien de plus étranges choses ici qu'en leur pays.

Vous ne sauriez croire combien le temps passe vite en cette vie paresseuse, surtout à des gens qui ont peu d'occupations et un peu de paresse comme moi.

La paresse de Huygens ne l'empêchait pas de tracer très heureusement le programme des premiers travaux de l'Académie des Sciences; on y lit entre autres grands projets et plus de vingt ans avant les inventions de Papin, alors son préparateur et son élève :

« Examiner la force de l'eau raréfiée par le feu. »

J. Bertrand.

KRAUSE (M.). — Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. Erster Band. VIII-328 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1895.

L'intéressant Ouvrage dont M. Krause commence la publication marque une tendance, qui s'était déjà manifestée ailleurs, de retour aux fonctions de Jacobi. Personne sans doute ne songe à contester les avantages et les grandes simplifications qu'apportent les fonctions et les notations introduites par M. Weierstrass; on ne songe plus non plus à dire que les travaux qui ont précédé les siens n'ont qu'une valeur historique; il semble, en vérité, que certaines propriétés se groupent en quelque sorte autour de certaines fonctions, d'autres autour d'autres fonctions, et que les divers groupes se pénètrent mutuellement; il faut sans doute en prendre son parti, et se résigner à croire que le progrès scientifique implique parfois un accroissement, non toujours une destruction correspondante.

Après quelques pages d'Introduction, consacrées à quelques points de la théorie des fonctions, qui sont traitées dans le sens de la doctrine de M. Weierstrass, M. Krause montre tout d'abord comment la recherche des fonctions $f(x)$ qui jouissent de la propriété

$$f\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right)=f(x)$$

se ramène à la recherche des fonctions qui jouissent de l'une des propriétés

$$f(x+1)=f(x), \qquad f(px)=f(x),$$

et comment, dans ce dernier cas, on peut se borner au cas où la valeur absolue de p est plus petite que 1. Ces fonctions sont dites *factoriellement périodiques*. Écartant le cas où ces fonctions (supposées univoques) admettraient des points singuliers essentiels autres que 0 et ∞, il montre qu'une telle fonction $f(x)$ admet nécessairement des pôles et des zéros; que, en ne regardant pas comme distincts les points dont les affixes ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance entière de p, une fonction factoriellement périodique $f(x)$ atteint chaque valeur donnée pour un même

nombre de points, nombre qui est certainement plus grand que 1; que, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ d'une part, par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de l'autre, les valeurs distinctes qui font acquérir à $f(x)$ d'une part la valeur A, de l'autre la valeur B, on a, en désignant par s un nombre entier, la relation

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n p^s;$$

que, enfin, $f(x)$ peut être mis sous la forme d'un quotient de deux fonctions formées au moyen du produit d'un même nombre de facteurs de la forme $\varepsilon\left(p, -\frac{x}{a}\right)$ en posant

$$\varepsilon(p, x) = (1+x)(1+px)\ldots(1+p^n x)\ldots \\ \left(1+\frac{p}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{p^n}{x}\right)\ldots$$

On a là, sous une autre forme, une suite de propriétés bien connues des fonctions doublement périodiques qui se trouve ramenée à une origine très simple, permettant une déduction claire et rapide. Le lecteur comprend d'ailleurs immédiatement comment se fait le passage des fonctions factoriellement périodiques aux fonctions doublement périodiques ordinaires, et des fonctions $\varepsilon(p, x)$ aux fonctions $\mathfrak{S}$, comme aussi l'introduction des fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèce.

L'auteur développe ensuite, d'après les principes dus à M. Hermite, la théorie des *fonctions* $\mathfrak{S}$ *du* $n^{ième}$ *ordre*, définies comme des fonctions transcendantes entières qui vérifient les équations fonctionnelles

$$(1) \qquad \begin{cases} f(v+1) = (-1)^g f(v), \\ f(v+\tau) = (-1)^h e^{-ni\pi(2v+\tau)} f(v); \end{cases}$$

n est un entier; g, h sont les nombres 0 ou 1 et leur ensemble (g, h) est la caractéristique de la fonction $\mathfrak{S}$. On sait que M. Hermite a démontré qu'il y avait n fonctions $\mathfrak{S}$ du $n^{ième}$ ordre linéairement indépendantes, et seulement n : cette proposition capitale peut jouer le rôle de principe dans la théorie des fonctions $\mathfrak{S}$ et des fonctions doublement périodiques. S'occupant ensuite des fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre, M. Krause développe successivement les relations entre les carrés, les théorèmes d'addition sous des

formes de plus en plus générales, les relations différentielles, la représentation des fonctions $\mathfrak{S}$ du $n^{\text{ième}}$ ordre au moyen des fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre, qui fait déjà pénétrer dans la théorie de la transformation; il introduit ensuite les fonctions doublement périodiques qui sont les quotients de deux fonctions $\mathfrak{S}$; ayant ensuite déduit, par le théorème de M. Hermite, la relation

$$\frac{d^2 \log \mathfrak{S}_0(v)}{dv^2} = \frac{\mathfrak{S}_0''}{\mathfrak{S}_0} - \frac{\mathfrak{S}_1'^2}{\mathfrak{S}_0^2} \frac{\mathfrak{S}_1^2(v)}{\mathfrak{S}_0^2(v)},$$

de ce que la fonction

$$f(v) = \mathfrak{S}_0^2(v) \frac{d^2 \log \mathfrak{S}_0(v)}{dv^2}$$

vérifie des équations fonctionnelles du type (1), il est en mesure, en supposant $u = \pi \mathfrak{S}_3^2(v)$, d'introduire aussi les fonctions (transcendantes entières)

$$\mathrm{Al}_\alpha(u) = \frac{\mathfrak{S}_\alpha(v)}{\mathfrak{S}_\alpha} e^{-\frac{\mathfrak{S}_0''}{\mathfrak{S}_0}\frac{v^2}{2}} \qquad (\alpha = 0, 2, 3),$$

$$\mathrm{Al}_1(u) = \frac{\mathfrak{S}_3}{\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_0} \mathfrak{S}_1(v) e^{-\frac{\mathfrak{S}_0''}{\mathfrak{S}_0}\frac{v^2}{2}},$$

dont les développements, suivant les puissances entières de u, sont des polynomes en k^2, puis enfin les fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ comme quotients de fonctions Al.

Après avoir posé le problème de la transformation, et montré comment il peut être simplifié, après avoir traité, pour les fonctions $\mathfrak{S}$ et les fonctions sn, cn, dn, des six cas de la transformation linéaire, puis des transformations dites de *Landen* et de *Gauss*, M. Krause traite avec quelques détails, et par diverses méthodes, du développement des fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$; de leurs puissances positives ou négatives, suivant les puissances de u, puis des équations différentielles que vérifient les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(0)$, k, k' en prenant soit τ soit k^2 pour variable indépendante; du calcul de q en fonction de k^2; de la détermination de toutes les valeurs que peuvent prendre K, iK' quand on se donne k^2; de l'équation différentielle linéaire que vérifie E; de la relation de Legendre; des équations aux dérivées partielles, par rapport à u et à k^2, que vérifient les fonctions Al; du développement de ces fonctions sui-

vant les puissances de u. Il passe ensuite à la multiplication : pour les fonctions $\mathfrak{Z}$, le théorème de M. Hermite fournit une première méthode, d'où se déduisent facilement, par exemple dans le cas de n impair, les relations telles que

$$\frac{\mathrm{Al}_0(nu)}{[\mathrm{Al}_0(u)]^{n^2}} = \mathrm{A}(x^2), \qquad \frac{\mathrm{Al}_1(nu)}{[\mathrm{Al}_0(u)]^{n^2}} = x\,\mathrm{B}(x^2),$$

$$\frac{\mathrm{Al}_2(nu)}{[\mathrm{Al}_0(u)]^{n^2}} = y\,\mathrm{C}(x^2), \qquad \frac{\mathrm{Al}_3(nu)}{[\mathrm{Al}_0(u)]^{n^2}} = z\,\mathrm{D}(x^2),$$

où x, y, z sont mis à la place de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, et où $\mathrm{A}(x^2)$, $\mathrm{B}(x^2)$, $\mathrm{C}(x^2)$, $\mathrm{D}(x^2)$ sont des polynomes en x^2. L'équation aux dérivées partielles (Jacobi) que vérifient ces polynomes fournit un moyen de les calculer. Ces mêmes polynomes s'expriment simplement quand on introduit les fonctions elliptiques des $n^{\text{ièmes}}$ parties des périodes; enfin l'élégante méthode de M. Kiepert ne peut être passée sous silence. La plupart des problèmes que nous venons d'énumérer rapidement impliquent la connaissance de la transformation du premier et du second ordre. M. Krause aborde le problème de la transformation d'ordre impair n; après avoir montré que l'on pouvait se borner au cas où la transformation était de l'une des formes

$$\tau' = n\tau, \qquad \tau' = \frac{\tau - 16\xi}{n},$$

où ξ est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, il déduit, toujours du même théorème de M. Hermite, l'expression des $\mathfrak{Z}(v', \tau')$ comme fonctions entières des $\mathfrak{Z}(v, \tau)$; les calculs sont faits explicitement pour le cas de $n = 3$ et de $n = 5$ et l'on obtient ainsi d'intéressantes identités. L'auteur montre ensuite, dans le cas général, comment s'expriment les $\mathfrak{Z}(v', \tau')$ quand on introduit les fonctions $\mathfrak{Z}$ des arguments $\frac{v}{n}$ et $\frac{v(\tau - 16\xi)}{n}$. Les questions analogues sont traitées pour les fonctions sn, cn, dn. On introduit ensuite les fonctions modulaires, et l'auteur traite en particulier des fonctions φ, ψ, χ de M. Hermite pour obtenir les formules relatives à la transformation linéaire de ces fonctions, d'après la méthode que l'on doit à M. Schläfli. Revenant ensuite à la transformation d'ordre impair n, il traite des équations modulaires; en restant au point de vue que nous venons d'indiquer, il lui est facile d'é-

tablir que les $n+1$ quantités

$$\left(\frac{2}{n}\right)\frac{\varphi(n\tau)}{\varphi''(\tau)},\quad \frac{\varphi\left(\frac{\tau-16\xi}{n}\right)}{\varphi''(\tau)}$$

sont racines d'une équation algébrique, à coefficients rationnels en k^2, dont il développe les propriétés essentielles, puis la formation, qui est effectuée pour les premières valeurs de n. Il traite ensuite des équations au multiplicateur, des relations différentielles entre le multiplicateur, le module transformé et le module primitif, et de l'équation différentielle que vérifient le numérateur et le dénominateur dans une formule de transformation. Un important paragraphe est consacré au discriminant de l'équation modulaire et au développement de cette question : trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients P, Q, R de l'équation du second degré en τ

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

afin que pour les valeurs de $\varphi(\tau)$ qui correspondent soit à une solution de cette équation, soit aux deux solutions, deux racines de l'équation modulaire relative à une transformation rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré soient égales; n est un entier impair, sans diviseur carré. Après avoir donné, d'après M. Weber, la notion générale des équations modulaires et des équations au multiplicateur, M. Krause traite divers problèmes spéciaux de la théorie de la transformation; signalons en particulier d'élégantes identités relatives au cas de $n=3$ et de $n=5$.

Pour la théorie de la transformation comme pour celle des fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèce, il est souvent avantageux d'introduire la notation des fonctions $\mathfrak{S}$ à caractéristiques fractionnaires; ces fonctions sont définies par la formule

$$\mathfrak{S}_\alpha\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v) = \mathfrak{S}_\alpha\left(v + \frac{g\tau}{n} + \frac{h}{n}\right) e^{\frac{\pi i g}{n}\left(2v + \frac{2h}{n} + \frac{g\tau}{n}\right)};$$

n, g, h sont des nombres entiers, dont le premier est positif; l'introduction de ces fonctions donne à M. Krause l'occasion d'étudier l'expression au moyen des fonctions elliptiques des quotients de la

forme

$$\frac{\mathfrak{I}_0''\left(v+\frac{1}{n}\right)}{\mathfrak{I}_0''(v)},$$

spécialement dans le cas de $n=3$.

La proposition qui joue le même rôle, dans la théorie de ces fonctions $\mathfrak{I}$ généralisées, que le théorème de M. Hermite dans la théorie des fonctions $\mathfrak{I}$ ordinaires est la suivante : Une fonction transcendante entière, qui vérifie les équations

$$f\left(v+\frac{1}{n}\right)=e^{\frac{2p\pi i}{n}}f(v),$$
$$f(v+\tau)=e^{-ni\pi(2v+\tau)}f(v),$$

est déterminée à un facteur constant près : de là se déduisent, par exemple, d'intéressants théorèmes d'addition qui généralisent une proposition célèbre de Jacobi sur les fonctions $\mathfrak{I}$ ordinaires. Si l'on pose

$$n w_1=(1-n)v_1+v_2+\ldots+v_{2n},$$
$$n w_2=v_1+(1-n)v_2+\ldots+v_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$n w_{2n}=v_1+v_2+\ldots+(1-n)v_{2n},$$

on aura

$$n\prod_{i=n}^{i=2n}\mathfrak{I}_3(v_i)=\sum_{g,h}\prod_{i=1}^{i=n}\mathfrak{I}\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(w_i)\,e^{-\frac{2\pi igh}{n}}$$
$$(g,h=0,1,2,\ldots,n-1).$$

A côté des fonctions $\mathfrak{I}$ à caractéristiques négatives, M. Krause introduit les fonctions

$$X_g^{(\alpha)}=\mathfrak{I}_\alpha(nv+g\tau,n\tau)\,e^{\pi ig\left(2v+\frac{g\tau}{n}\right)}.$$

Remarquons en passant que ces fonctions, dans le cas où $\alpha=3$, ne sont autres que les n solutions distinctes ($g=0,1,2,\ldots,n-1$) des équations fonctionnelles

$$f(v+1)=f(v),$$
$$f(v+\tau)=e^{-ni\pi(2v+\tau)}f(v),$$

avec lesquelles M. Hermite a prouvé que l'on pouvait composer, en les combinant linéairement, toutes les solutions (transcendantes entières).

M. Krause montre comment toute fonction $\mathfrak{I}$ du $n^{\text{ième}}$ ordre est une fonction linéaire de n des quantités

$$e^{\pi i g\left(2v+\frac{g\tau}{n}\right)}\mathfrak{I}_\alpha(nv+g\tau, n\tau).$$

Notons aussi l'égalité

$$X_g^{(3)}+X_{-g}^{(3)}=\frac{1}{n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} e^{-\frac{2i\pi g^2\lambda}{n}}\mathfrak{I}_3\left(v,\frac{\tau+2\lambda}{n}\right),$$

relative au cas où n est impair. Enfin la considération des fonctions $\mathfrak{I}$ à caractéristiques fractionnaires conduit à de beaux théorèmes d'addition concernant les fonctions $\mathfrak{I}$ avec des modules différents. Par exemple, si l'on désigne par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers quelconques et par $a_{\varepsilon r}$ des nombres entiers tels que l'on ait

$$a_{\varepsilon 1}^2+a_{\varepsilon 2}^2+\ldots+a_{\varepsilon n}^2=m_\varepsilon,$$
$$a_{\varepsilon 1}a_{r1}a_{\varepsilon 2}a_{r2}+\ldots+a_{\varepsilon n}a_{rn}=0, \qquad \varepsilon \gtrless r$$
$$(\varepsilon, r=1, 2, \ldots, n),$$

et si l'on pose

$$w_\varepsilon=a_{\varepsilon 1}v_1+a_{\varepsilon 2}v_2+\ldots+a_{\varepsilon n}v_n, \qquad (\varepsilon=1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\Pi\,\mathfrak{I}_3(v_\varepsilon, \tau)=\sum \Pi\,\mathfrak{I}_3\begin{bmatrix} g_\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}(w_\varepsilon, m_\varepsilon, \tau),$$

les produits Π se rapportant aux diverses valeurs de ε, et la sommation Σ à tous les g_ε qui vérifient les congruences

$$g_1\equiv a_{11}s_1+a_{12}s_2+\ldots+a_{1n}s_n \qquad (\operatorname{mod} m_1),$$
$$g_2\equiv a_{21}s_1+a_{22}s_2+\ldots+a_{2n}s_n \qquad (\operatorname{mod} m_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$g_n\equiv a_{n1}s_1+a_{n2}s_2+\ldots+a_{nn}s_n \qquad (\operatorname{mod} m_n),$$

les nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant d'ailleurs des nombres entiers arbitraires.

M. Krause applique ensuite les considérations qui précèdent à la représentation, au moyen des fonctions $\mathfrak{I}$, des fonctions doublement périodiques de première, de seconde et de troisième espèce; il rencontre ainsi la formule de décomposition en éléments simples; le cas des fonctions doublement périodiques l'amène à

introduire la fonction ζu. Il termine en traitant du développement en séries de puissances des fonctions de seconde et de troisième espèce.

La brève analyse qui précède aura sans doute suffit pour montrer au lecteur l'importance du Livre de M. Krause. Le répertoire bibliographique dressé de manière à faciliter les renvois dans le courant du Volume sera consulté avec intérêt. J. T.

MÉLANGES.

RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

DEUXIÈME PARTIE.

(SUITE ET FIN.)

D. — Sur certains groupes de substitutions et sur certaines formes spéciales.

a. — Péninvariants (1).

Si nous nous sommes occupé jusqu'ici des propriétés générales des formes invariantes, nous consacrerons ce dernier Chapitre aux caractères plus spéciaux provenant du fait que l'on impose des restrictions soit au groupe de substitutions à effectuer, soit à la forme primitive, soit enfin, aux deux simultanément.

---

(1) Les péninvariants ont aussi été désignés par certains auteurs sous les noms de *sous-invariant, semi-invariant* ou *seminvariant*.

Parmi les formes invariantes qui appartiennent à des sous-groupes (¹) du groupe général de substitutions linéaires, celles dont l'étude a été la plus approfondie sont les péninvariants (²), c'est-à-dire les sources de covariants, contravariants, concomitants, etc. et leurs généralisations.

Nous nous bornerons ici au domaine binaire. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les C_0, expressions entières et rationnelles des séries de coefficients (a), (b), ... des formes primitives, sont *homogènes* et *isobares*, ou, ce qui revient au même, que pour toutes les substitutions du groupe

$$(A) \qquad x_1 = a x'_1, \qquad x_2 = d x'_2,$$

les C_0 se reproduisent multipliés par une puissance du déterminant de la substitution. En imposant une condition analogue aux substitutions du groupe résultant d'une combinaison avec (A) du groupe

$$(B) \qquad x_1 = x'_1 + b x'_2, \qquad x_2 = x'_2,$$

l'expression C_0 devient un péninvariant et satisfait à l'équation différentielle caractéristique

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Omega = \; & a_0 \frac{\partial C_0}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial C_0}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial C_0}{\partial a_3} + \ldots \\ & + b_0 \frac{\partial C_0}{\partial b_1} + 2 b_1 \frac{\partial C_0}{\partial b_2} + 3 b_2 \frac{\partial C_0}{\partial b_3} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Si C_0 renferme $n+1$ arguments a, $m+1$ arguments b, etc., C_0 sera toujours la source d'un certain covariant des formes f_n, g_m, ... ayant respectivement pour coefficients (a), (b), ...

Sylvester (³) prend comme point de départ de ses recherches

(¹) Dans Lie-Scheffers, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, t. II, on trouve la détermination de tous les sous-groupes continus et finis du groupe projectif à deux et à trois variables; *voir* en particulier, p. 287.

(²) Certaines propriétés des péninvariants ont déjà été prises en considération plus haut, voir *Bulletin*, XVIII, p. 189; t. XIX, p. 99, 100, 104-105, 107, 223-224, 253-254, 256-257.

(³) *Am. J.*, t. V, p. 79-96 (1882), p. 97-137 (1887). Dans la seconde partie du Mémoire, l'auteur recherche les péninvariants irréductibles (ou perpétuants) et établit, pour certains cas particuliers, une fonction génératrice. *Consulter* aussi les Tables de Cayley, *Quart. J.*, XIX, p. 131-138 (1883).

la remarque que, dans ce cas, C_0 correspond à la source d'un covariant des formes

$$f_{n'},\quad g'_{m'},\quad \ldots \qquad (n' > n,\ m' > m,\ \ldots),$$

dans lesquelles les $n+1$, $m+1$, ... premiers coefficients coïncident avec les a, b, ... Les conséquences que l'on en déduit ne sont pas seulement d'une grande importance pour la formation du système fondamental, mais elles apportent, en outre, une grande simplification dans celle des syzygies correspondantes. A cet effet, nous avons déjà eu l'occasion de signaler les travaux de Perrin (¹).

La considération de C_0 comme fonction binaire des variables (non homogènes) a_n a également donné lieu à de nouveaux progrès et a largement facilité une étude approfondie de la structure du système complet de f_n (²).

L'emploi des péninvariants de second et de troisième degré par rapport aux a joue aussi un rôle utile dans la formation des *systèmes associés;* nous avons déjà mentionné cette application (*Bulletin,* XIX_2, p. 99, 100), ainsi que (*l. c.*, p. 109, 222, 224) le problème fondamental qui consiste à déterminer, parmi les péninvariants (d'une degré n illimité), les *perpétuants* (ou péninvariants principaux), c'est-à-dire les péninvariants irréductibles qui ne peuvent pas être représentés comme fonction entière de ceux d'un degré moindre par rapport aux éléments. De plus, il convient de rappeler ici qu'il existe un lien étroit entre les péninvariants et les fonctions symétriques (*l. c.* p. 224).

D'Ocagne (³) est parvenu, d'une manière très simple, à un nouveau système associé de péninvariants pour une forme f_n. Il envisage a_0 comme une fonction fictive de ξ, dont les dérivées

---

(¹) *Bull. Soc. Math.,* XI, p. 88-107; 1888. *Voir* le Rapport, *Bull.*, XIX_2, p. 104 et 105.

(²) Sylvester prend comme exemples les formes f_5 et f_6. *Consulter* aussi les Mémoires de Petersen, *Zeuthen Tidsskr.*, (4), IV, p. 177-190; V, p. 33-40; (5), VI, p. 152-156, de 1880-1888.

(³) *C. R.*, CII, p. 916-917; *Brux. S. Sc.*, X, B., p. 75-78; t. XI, p. 314-319; 1887. Il serait intéressant d'approfondir le lien étroit qui doit exister entre la méthode de d'Ocagne et celles de Bruno (*Bulletin*, XIX_2, p. 253) et Mac Mahon (*l. c.*, p. 224).

successives seraient a_1, a_2, ... Les dérivées successives du logarithme de a_0, depuis la première jusqu'à la $(n-1)^{ième}$, fournissent alors un pareil système de *péninvariants principaux* (¹).

D'Ocagne (²) et Cesáro (³) ont montré comment ce système pouvait être rattaché à celui qu'a fourni Hermite.

Cette différentiation par rapport à ξ peut être considérée comme une simple abréviation symbolique de l'opération

$$\frac{d}{d\xi} = a_1\frac{\partial}{\partial a_0} + a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

et, c'est cette remarque qui a conduit aux symboles opératoires que l'on doit à d'Ocagne (⁴), Perrin (⁵), Deruyts (⁶), et Roberts (⁷).

La théorie des péninvariants a été particulièrement approfondie par Deruyts qui l'a étendue aux formes à plusieurs séries de n variables, et qui, de cette façon, a largement contribué aux progrès de la théorie des invariants de ces formes. Cet éminent géomètre a réuni ses nombreuses recherches (⁸) en une monographie (⁹) publiée en 1891. C'est, comme l'indique le titre de l'Ouvrage, un *Essai d'une théorie générale des formes algébriques*. L'auteur étend aux fonctions péninvariantes la notation symbolique de Clebsch et Aronhold qui, jusque-là, n'avait été employée que pour les formes invariantes, et, à cet effet, il attribue aux expressions symboliques une *forme canonique* (*l. c.*, p. 13, 14) symé-

---

(¹) On doit à d'Ocagne (*C. R.*, CIV, p. 961 et 1364) un symbole opératoire qui permet de calculer très aisément un tel système, et dont l'importance est confirmée par les travaux subséquents de Perrin, Deruyts, Roberts, etc. H. F.

(²) *Bull. Soc. math.*, XVI, p. 183-187; 1888; *Brux. S. Sc.*, XII, p. 185-189.

(³) *Nouv. Ann.* (3) VII, p. 464-467; 1888.

(⁴) *C. R.*, CIV, p. 961-964, 1364-1365; 1887. *Voir* encore, dans le *Quart. J.*, t. XXI, (1885) une Note de Cayley (p. 212-213) et celle de Mac Mahon (p. 362-365); *consulter* aussi le Mémoire que ce dernier a publié dans le *Am. J.*, VIII, p. 1-18; 1885.

(⁵) *C. R.*, CIV, p. 1097-1099, 1258-1260; 1887.

(⁶) *Belg. Bull.*, XIII, p. 226-235; 1887 et tomes suivants.

(⁷) *Lond. M. S. Proc.*, XXI, p. 219-233; 1889.

(⁸) *Belg. Bull.*, (3), XIV, p. 53-79; 1887; t. XV, p. 951-980, t. XVI, p. 207-215, 576-589; 1888; *Liège Mém.*, (2), XV, deux Notes (1888). *Belg. Mém. S. E.*, LI, et LII.

Voir aussi Le Paige, *Belg. Bull.*, (3), II, p. 40-53; 1881.

(⁹) *Essai d'une théorie générale des formes algébriques*. Bruxelles, 1891.

trique par rapport aux éléments. Grâce à la généralité avec laquelle les questions sont abordées dès le début, l'auteur retrouve non seulement une foule de résultats obtenus par Capelli, Sylvester et d'autres, mais il parvient en outre à des propriétés nouvelles qui sont d'une grande portée.

b. — Combinants et apolarité.

Parmi les formes à plusieurs séries de variables sur lesquelles on effectue des transformations linéaires différentes entre elles, nous avons, à plusieurs reprises ([1]), mentionné les *combinants*. Ces formes se rattachent si intimement à la théorie de l'apolarité, qu'il y a lieu de les examiner dans leurs propriétés communes. Cependant, il n'est guère possible de donner ici une idée exacte de cette branche de la théorie des formes, vu que les applications les plus importantes appartiennent à la Géométrie; et nous constatons ici précisément ce fait que certaines propositions, qui en Algèbre semblent évidentes ou qui, du moins, n'offrent souvent qu'un intérêt très particulier, constituent en Géométrie la source de recherches très étendues.

Soient $f_1, f_2 \ldots f_p$ des fonctions homogènes de degré n par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Parmi les invariants simultanés des f, on désigne sous le nom de *combinants* ceux qui ne changent pas (à un facteur constant près) pour une substitution linéaire des f.

Si l'on constitue, à l'aide des nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots u_p$, la forme linéaire

$$F = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \ldots + u_p f_p.$$

([1]) Voir *Bulletin*, XVIII$_2$, p. 185; XIX$_2$, p. 98, 102-103, 217-219, 221. Dans son ouvrage sur l'*Apolarité*, publié en 1883, F. Meyer donne un ensemble de renseignements bibliographiques. Quant aux travaux qui ont contribué à la fondation de la théorie, nous signalerons ceux de Smith et de Clifford, *Proc. L. M. S.*, II, p. 85-100 et p. 116-118; 1868, et de Darboux, *Bulletin*, I, 1870.

Un des combinants les plus importants est le déterminant fonctionnel de n formes à n variables, étudié déjà par Jacobi; *voir* Gordan, *Vorlesungen*, t. I. *Consulter* aussi dans le *Journ. für Math.* : Clebsch, t. LXIX, p. 355-358; t. LXX, p. 175-181; 1869; Rosanes, t. LXXV, p. 166-172 (1872), et Pasch, t. LXXX, p. 177-182 (1875).

on pourra définir les combinants des f, comme étant des fonctions des coefficients et des variables des f, telles que, pour toute transformation linéaire, elles restent invariantes par rapport aux u, comme par rapport aux x; ces fonctions ne contiennent pas les variables u. Cette définition a l'avantage de permettre une généralisation importante; si l'on renonce à la restriction relative aux u, on arrive aux combinants considérés dans un sens plus étendu.

C'est sous cette forme générale que Gordan ([1]) a envisagé les combinants. Ces derniers jouissent encore de la propriété des systèmes finis, puisqu'ils peuvent être déduits d'une seule forme primitive à séries cogrédientes de variables, ainsi que l'a fait voir Hilbert ([2]).

La théorie des combinants prend une forme remarquablement claire, dès que l'on tient compte du *principe de dualité*. A cet effet Stroh ([3]) a introduit un déterminant Q en complétant les p séries de variables à l'aide d'un nombre suffisant de séries (v), (w), ..., contragrédientes par rapport aux premières. Si N est le nombre des coefficients d'une forme générale f, celui des nouvelles séries de variables sera $N - p$. Cela revient à joindre aux p formes f, $N - p$ formes φ dont la classe correspond à l'ordre de f.

C'est ici que la théorie de l'apolarité intervient avec succès. Deux formes telles que f et φ sont dites *conjuguées*, selon Rosanes ([4]), ou *apolaires*, selon Reye ([4]) si leur invariant bilinéaire est identiquement nul.

A un système de p formes f linéairement indépendantes correspond un système de $N - p$ formes φ linéairement indépendantes, et réciproquement; de sorte que chaque forme f est apolaire à chaque forme φ.

Les systèmes apolaires entre eux ont été étudiés par Brill ([5])

([1]) *Math. Ann.*, V, p. 95-122 (1872), en part. p. 116. *Voir* Voss, *Münch. Ber.*, p. 15-19; 1888.

([2]) *Göttinger Nachr.*, p. 232-242; 1891; p. 2-12; 1892.

([3]) *Math. Ann.*, XXII, p. 393-405; 1883 et *Progr. München*, 1894.

([4]) *Voir* le paragraphe que nous avons consacré à la canonisation des formes: *Bullet.*, XIX_2, p. 214-215. *Consulter* aussi l'aperçu qu'en donne Salmon dans son *Algèbre supérieure* (Éd. franç., 1890) p. 496-497. H. F.

([5]) *Math. Ann.*, IV, p. 530; 1870. *Consulter*, Grassmann, *Ausdehnungslehre*, 1862, n° 112.

Ce théorème sert de base aux recherches de Clebsch, *Gott. Abh.*, XVII, p. 1-62;

qui en a déduit le *principe fondamental* des combinants, à savoir que les combinants de deux systèmes apolaires coïncident relativement au nombre et à la forme (¹).

Le cas des combinants des systèmes binaires offre un intérêt tout particulier, parce qu'il sert de base à ceux des systèmes d'ordre supérieur. Il a fait l'objet d'un Mémoire important de Brill (²), qui, dans sa démonstration, examine la question sous un point de vue nouveau. Renonçant à la représentation des invariants sous forme rationnelle, l'auteur substitue à la forme R de Gordan un combinant plus simple W et montre que tout combinant des formes f peut être représenté comme un invariant ou covariant irrationnel de W (³).

C'est la notion des systèmes apolaires qui a d'abord servi de base au principe des combinants. Cette notion trouve sa source dans l'extension aux systèmes de formes de la *représentation canonique,* d'après Sylvester, des formes binaires en somme de puissances.

En 1872, Rosanes fit un premier pas dans cette direction en démontrant (⁴), par voie symbolique, qu'il est nécessaire et suffisant que l'invariant bilinéaire de deux formes binaires de même ordre s'annule, pour que chacune de ces formes puisse être repré-

---

1872; de Gordan, *Math. Ann.*, VII, 433-448; 1874, et de W. Stahl (mentionné plus loin).

(¹) Stéphanos a poursuivi ces recherches; voir *Sav. Étrang.*, 1883; son travail, déposé en 1881, a été analysé par Jordan, déc. 1881. *Voir* en outre, Brill., *Math. Ann.*, XX, p. 335; et les *thèses* de Friedrich, *Giessen,* 1886, Gross, *Tübingen*, 1887, et *Math. Ann.*, XXXI, p. 136-150; et E. Meyer, *Königsberg,* 1888.

(²) *Math. Ann.,* t. IV; 1871.

(³) Les relations entre ce déterminant fonctionnel de f, ou combinant principal, et la forme f ont été approfondies par Jgel dans une série de Mémoires insérés dans les *Wien. Ber. u. Abh.;* l'auteur en déduit des méthodes pour la formation des combinants.

(⁴) *Journal f. Math.,* LXXV, p. 172-176. Quant aux applications, *voir* Meyer, *Apolarität.*

W. Stahl a approfondi l'étude des systèmes apolaires binaires et en a donné d'intéressantes applications à la théorie des surfaces développables; *Journ. f. Math.,* CI, p. 73-98, 300-325, 1887; CIV, p. 38-61, 302-320. Study, *Leipz. Ber.,* p. 3-9; 1886.

Un exposé purement géométrique de l'apolarité binaire a été donné par H. Wiener, *Habil. Schrift.*, Darmstadt, 83 pages; 1885. *Voir* encore Thieme, *Schlöm. Zeit.*, XXIV, p. 221 et 276; *Math. Ann.*, XXIII, p. 597; 1884.

sentée à l'aide d'une somme de puissances de facteurs linéaires de l'autre. Cela revient à dire que si une forme binaire d'ordre n possède le facteur $\lambda - \alpha$, elle est apolaire à la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\lambda - \alpha$, et réciproquement. Il étendit ensuite ce principe au cas plus général des formes d'ordre n à r variables (1).

C'est là-dessus que repose la possibilité (2) de représenter une forme générale à l'aide d'un certain nombre de puissances de formes linéaires; ce problème avait déjà été abordé avec succès par Reye (3), qui en donna une interprétation mécanique.

L'introduction de la notion de polygone polaire (4) (*Pol-n-Eck*) a permis d'envisager la question sous une nouvelle face et d'exprimer ainsi chaque propriété algébrique dans un langage géométrique.

On peut se demander ce que signifie l'apolarité, lorsqu'on se trouve en présence de deux formes irréductibles. Si l'on se borne au cas du second ordre (5) et à ceux qui s'y ramènent, ce problème est, en effet, le plus ancien; quoique très important en Géométrie, il est cependant d'une nature trop spéciale pour avoir une influence féconde dans la théorie des formes.

Hesse (6) avait d'ailleurs déjà démontré que l'apolarité de deux formes du second ordre (ou de seconde classe) est un criterium pour que ces deux formes puissent, par des transformations linéaires (et cela d'une infinité de manières), être ramenées à une forme normale, telle que l'une des formes ne contienne que les carrés, et l'autre seulement les produits des variables (7).

---

(1) *Journ für Math.*, LXXV, p. 312-330; 1873.

(2) Dans sa *Géométrie de direction*, Paris, 1869, P. Serret avait donné un exposé détaillé de l'interprétation géométrique des relations linéaires entre des puissances égales de formes linéaires.

(3) *Journ. für Math.*, LXXII, p. 293-326; 1870.

(4) *Voir* une Note de Grassmann, dans les *Gött. N.*, p. 567-577; décembre 1872.

(5) Le cas du troisième ordre, dans le domaine ternaire, a été abordé par O. Schlesinger, *Math. Ann.*, XXX, p. 453-477; 1887; XXXI, p. 183-219; 1888. — De Paolis, *Acc. L.*, 1886; et London, *Math. Ann.*, XXXVI, p. 535-584.

(6) *Journ. f. Math.*, XLV, p. 82-90; 1853.

(7) Les conséquences et leurs applications aux coniques et aux surfaces du second ordre ont été longuement étudiés par Rosanes et Reye.

Rosanes, *Journ. f. Math.*, t. LXXXVIII, XC, XCV, C; 1880 à 1887.

Reye, *Berl. Ber.*, p. 833-839; 1889; *Journ. f. Math.*, CIV, CVI, CVII, CVIII; 1889 à 1891. *Voir* aussi W. Stahl, *Journ. f. Math.*, p. 179-188; 1890.

Dans les domaines à 3, 4, ... variables, les propriétés de l'apolarité et des combinants se rattachent à la théorie des combinants binaires. Dans son Ouvrage sur l'*Apolarité*, le Rapporteur a bien fait ressortir ces relations à l'aide d'une série de principes de réduction (1).

Le lien qui existe entre les domaines binaires et ternaires se présente d'une façon très simple grâce au principe de translation formulé, pour la première fois, par Schlesinger (2).

Plus récemment, on s'est occupé des combinants prolongés d'un système de formes $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, qui, outre les variables λ, contiennent encore une ou plusieurs séries de variables u contragrédientes par rapport aux f. Nous mentionnons, à cet effet, les recherches de Gross (3), F. Meyer (4), Hilbert (5) et W. Stahl (6).

c. — Résultants et discriminants.

Par leurs nombreuses applications, les résultants et les invariants occupent certainement (7) la première place parmi les cas particuliers des invariants. Malgré le vif intérêt que présentent ces formes, surtout le discriminant dans la théorie des équations différentielles et dans la théorie des quantités algébriques, nous ne les prendrons ici en considération qu'au point de vue de leur représentation sous forme invariante.

En 1853, Salmon (8) a donné une formule générale pour le

(1) Ces principes de translation ont été développés par Study, dans les *Leipz. Ber.*, p. 170 et suivantes; 1890.

(2) *Dissertation*, Breslau, 1882, ou *Math. Ann.*, XXII, p. 520-568. La démonstration s'appuie sur le calcul symbolique. D'autre part, le Rapporteur est parvenu au même principe par une voie non symbolique (*Math. Ann.*, XXI, p. 528-544; 1883) et l'a développé dans son *Traité sur l'Apolarité*.

(3) *Dissertation*, Tübingen, 1887; on en trouve un extrait dans les *Math. Ann.*, XXXII, p. 136-150.

(4) *Math Ann*, XXIX, p. 447-467; XXX, p. 30-74; XXXI, p. 96-133; 1888.

(5) *Gött. Nachr.*, 1889, en partic. p. 30; *Math. Ann.*, XXXVI, p. 516.

(6) *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 561-585, 1891; XL, p. 1-54; 1892. *Consulter* encore Schuhmacher, *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 298-306; 1891; et Jolles, *Habil. Schrift*, Aachen, 1886.

(7) Nous avons signalé ces formes à plusieurs reprises. *Voir*, notamment, *Bull.*, XVIII_2, p. 184, 190; XIX, p. 94, 102, 218.

(8) *Voir*, par exemple, *Salmon-Chemin*, nos 308-310.

résultant d'une forme binaire du deuxième degré et d'une forme f_n du $n^{\text{ième}}$ degré. Ce calcul a été étendu par Clebsch ([1]), à l'aide de la méthode d'Aronhold, au cas d'un système d'un nombre quelconque de formes, une du deuxième degré, une du degré n et le reste du premier degré.

Gordan ([2]) a ensuite abordé la recherche du résultant de deux formes binaires f_m et f_n et il a entièrement développé les calculs dans tous les cas où m et n sont inférieurs à cinq.

Dans le cas où n reste quelconque, m étant égal à 3, Pascal ([3]) a déterminé le résultant sous forme symbolique.

La résolution générale du problème semble impossible ([4]) pour le moment; on a dû se contenter de perfectionner ([5]) les méthodes qui conduisent à la représentation invariante du résultant.

Pour ce qui est de la représentation du discriminant sous forme invariante, les procédés sont encore moins développés. On doit à Gordan ([6]), un exposé systématique conduisant à l'expression du discriminant d'une forme f_n à l'aide des invariants fondamentaux.

([1]) *Journ. f. Math.*, LVIII, p. 273-291; 1861. *Binäre Formen*, p. 91. *Consulter*, en outre, Gordan, *Journ. f. Math.*, LXXI, p. 164-194; 1870, et, pour le cas général, Igel, *Wien. Ber.*, 1880.

([2]) *Math. Ann.*, III, p. 355-414; 1871.

([3]) *Batt. G.*, XXV, p. 257-280; 1887, et *Napoli Rend.* (2), p. 67-72; 1888.

([4]) On ne peut encore donner aucune interprétation, au point de vue de la théorie des invariants, de la méthode symbolique et combinatoire de Schendel (*Schlöm. Z.*, XXXII et XXXIII; 1887-1888) et de celle de Mac Mahon basée sur les fonctions symétriques (*Quart. J.*, XXIII, p. 139-143; 1888.

([5]) *Consulter* Brioschi, *Chelini Coll. M.*, p. 221-223; 1881 ($m=3$, $n=4$).

D'Ovidio, *Atti Tor.*, XV, p. 385-389; 1880 ($m=4$, $n=4$). *Nap. Mem.*, XI; 1883 ($m=5$, $n=2, 3$). *Mem. Soc. It. Sc.*, IV, ou *Rom. Acc. L. Mem.*, (4), IV, p. 607-622; 1888 ($m=5$, $n=2, 3, 4, 5$). *Tor. Atti*, XXVIII, p. 20-23; 1892.

([6]) *Vorlesungen*, II, n° 99.

Antérieurement déjà, on trouve exprimés au moyen des invariants fondamentaux :

Le discriminant de f_4 par Boole (1845), *voir* Cayley, *Papers*, I, p. 94;

Le discriminant de f_5 par Salmon (1850), *voir Cambr. a. Dublin M. J.*, V, p. 32;

Le discriminant de f_6 par Brioschi (1867), *voir Annali di Mat.* (2), I, p. 159.

Pour ce dernier cas, *voir* aussi Maisano, *Math. Ann.*, XXX, p. 442-452; 1885.

La structure des discriminants binaires a été examinée par : Joachimsthal, *Journ. f. Math.*, XXXIII, p. 371-376; 1846; Cayley, même Recueil, XXXIV, p. 30-45; 1847; Pasch, id., LXXIV, p. 1-6; 1872; Bauer, *Münch. Ber.*, p. 183-191; 1886. *Consulter*, en outre, Noether, *Math. Ann.*, XXIII, p. 311-358; 1884, et W. Stahl, *Math. Ann.*, XXXV, p. 395-400; 1889.

Cependant les difficultés du calcul (symbolique) croissent avec l'ordre, et l'on n'est pas encore parvenu à les surmonter, lorsque n est supérieur à 7 (¹).

Quant au domaine ternaire, il suffit de mentionner ici les mémoires de Gundelfinger (²) et de Mertens (²), dans lesquels on trouve le résultant de trois formes quadratiques exprimé en fonction de deux combinants fondamentaux; puis le travail (³) de Gordan sur le discriminant d'une forme ternaire C_n.

d. — Autres formes spéciales.

α. *Formes pour lesquelles le hessien* (⁴) *est identiquement nul.* — Une des questions les plus importantes de la théorie des formes est la recherche d'un critérium permettant de reconnaître : 1° quand une forme proposée F à n variables peut, au moyen de substitutions linéaires, être ramenée à une forme contenant un nombre moindre de variables; 2° quelles sont, dans ce cas, ces substitutions.

C'est à Gordan et Nœther que revient le mérite d'avoir résolu ce problème d'une manière générale. Leur démonstration est basée sur une équation linéaire aux dérivées partielles, à laquelle doivent satisfaire F et ses polaires, et dont les coefficients eux-mêmes dépendent d'un système d'équations aux dérivées partielles.

β. *Formes spéciales dont la nature est caractérisée par des*

(¹) Le cas $n = 7$ est traité dans les *Math. Ann.*, XXXI, p. 566-600; 1888.

Maisano a résolu indirectement le cas $n = 8$; *Pal. Rend.*, III, p. 53-59; IV, p. 1-8; 1890. Il a également résolu le problème pour $n = 6$, lorsque f_n contient des facteurs multiples; *voir Math. Ann.*, XXXI, p. 493-506; 1888, et le Mémoire de d'Ovidio, *Torino Atti*, XXIV, p. 164-176; 1888.

(²) *Journ. f. Math.*, LXXX, p. 73-85; 1875. *Wien. Ber.*, XCIII, p. 62-77; 1886.

(³) *Münch. Ber.*, XVII; 1887.

(⁴) D'autres propriétés du *hessien* ont été signalées par Voss, dans les *Math. Ann.*, XXVII, p. 515-536; 1886. *Voir* aussi un Mémoire de Bauer, *Münch. Abh.*, p. 1-14; 1883, puis par Brill, *Math. Ann.*, XIII, p. 175-182, 1878; Wölffing, *Dissertation*, Tubingue, 1890, ou *Math. Ann.*, XXXVI, p. 97-120, et par Gerbaldi, *Pal. Rend.*, III, p. 60-66; 1889.

équations différentielles algébriques [1]. — Le procédé de la composition (*Ueberschiebung*) peut, comme on sait, être remplacé par un procédé de différentiation et toute forme invariante peut être ramenée à un composé. Au point de vue théorique, il est donc clair que si la nature invariante d'une forme ou d'un système de formes est déterminée par l'évanouissement d'un invariant ou par l'évanouissement identique d'un covariant, la forme elle-même devra satisfaire à une ou à plusieurs équations différentielles algébriques; il est vrai que, dans la pratique, cette marche se butte contre de grandes difficultés de calcul.

Mais, réciproquement, de pareilles équations différentielles étant données, il est encore d'autant plus difficile d'en déduire les caractères de l'invariance.

Le problème ci-dessus donne donc lieu à un théorème important permettant d'effectuer ce passage. Cette proposition a été démontrée en premier lieu pour les formes binaires par Bruno [2], puis, dans le cas général, par Hilbert et Perrin.

Si l'on représente par $f(x) = f_0$ une forme binaire par rapport à la variable non homogène x :

$$f_0 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

et par $f_1, f_2, \ldots,$ les dérivées de f par rapport à x multipliées par un facteur numérique

$$f_1 = \frac{1}{n} f'(x), \qquad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f''(x), \qquad \ldots,$$

tout covariant de f_0 pourra être directement déduit de sa source, en remplaçant les a_i par les f_i. Il en résulte que toute fonction F homogène et isobare des f_i sera un covariant de $f(x)$ et devra

(1) GORDAN, *Erl. Ber.*, p. 89-95, 1876; NŒTHER, *Erl. Ber.*, p. 51-55, 1876; GORDAN et NOETHER, *Math. Ann.*, p. 547-568; 1876.

Ces deux géomètres ont rectifié une proposition énoncée par HESSE, dans le *Journ. für Math.*, XLII, p. 117-124; 1851, et t. LVI, p. 263-269; 1859.

Pour les formes cubiques ternaires et quaternaires, le problème avait déjà été résolu par PASCH, *Journ. f. Math.*, LXXX, p. 169-176; 1875.

(2) *Voir* notre exposé, *Bulletin*, XIX_2, p. 252-253.

satisfaire à l'équation

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3 f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \ldots = 0.$$

C'est en partant de ces considérations, que Hilbert ([1]) étudie, au point de vue de la théorie des invariants, les fonctions sphériques et celles de la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, qui sont entières et rationnelles par rapport à x.

([1]) *Dissertation*, Königsberg, 1885; *Math. Ann.*, XXX, p. 15-29; 1887.

En ce qui concerne d'autres formes spéciales, nous mentionnons encore les travaux de Battaglini sur les formes les plus simples des domaines binaires, ternaires et quaternaires. *Voir* les *Rend. Acc. Napoli*, 1864, 1865, 1866; le *Batt. G.*, depuis 1870; et les *Nap. Rend.*, depuis 1881.

Dans une série de recherches publiées dans le *Journ. de l'Éc. Pol.* (t. L, LI, LVI; 1883-1886), Poincaré a examiné l'équivalence algébrique et arithmétique des formes cubiques ternaires C_3.

Pour ces mêmes formes C_3, *consulter*, entre autres, Gundelfinger, *Math. Ann.*, IV, 561-571; 1872; *Annali di Mat.* (2), II, p. 223-236; Gordan, *Math. Ann.*, III, p. 631-632; Brioschi, *Annali di Mat.* (2), VII, p. 52-60, 189-192; et Thaer, *Math. Ann.*, XIV, p. 545-556; 1875.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.................................... T. XVIII₂, 179-196, 213-220

Première partie. — *Equivalence des formes.*

A. Formes quadratiques et bilinéaires............ 284-294
B. Équivalence des formes non quadratiques...... 294-308

Deuxième partie. — *Affinité des formes.*

A. Systèmes finis.................................. T. XIX₂, 87-110
B. Irrationalité des formes........ 213-219
C. Opérations symboliques et invariantes.......... 219-224, 246-264
D. Sur certains groupes de substitutions et sur certaines formes spéciales...................... T. XX₂, 139-151

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Laisant (C.-A.). — *Recueil de problèmes de Mathématiques* (algèbre, théorie des nombres, probabilités, géométrie de situation). In-8°, x-274 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 6 fr.

Lechalas (G.). — *Étude sur l'espace et le temps.* In-18° jésus, 205 p. Paris, F. Alcan.

Olivier (J. v.) — *Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse?* Was ist die Erscheinungswelt. Gr. in-8°, 59 p. avec fig. München, L. Finsterlin. 1 m. 20 pf.

Vogt (H.). — *Leçons sur la résolution algébrique des équations.* In-8°, viii-201 p. Paris, Nony et Cie.

Wolf (R.). — *Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie.* 6. durch Wohler vollendete Auflage. 5. (Schluss-)Liefg. In-12. Zürich, Schulthess. 1 m. 20 pf.; complet 6 m.; relié 7 m.

Delemer (Jules). — *Sur le mouvement varié de l'eau dans les tubes capillaires cylindriques évasés à leur entrée, et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tubes.* In-4°, 83 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures; publiés par le Directeur du Bureau; t. II, in-4°, cxxxix-395 p. avec fig. et planches. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

Volkmann (P.). — Franz Neumann, geb. 11 Septbr. 1798, † 23. Mai 1895. *Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft.* Gr. in-8°, vii-68 p. avec portrait. Leipzig, Teubner. 2 m. 40 pf.

Bourdon. — *Éléments d'Algèbre.* 18e édit. In-8°, xii-657 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 f.

Coculesco (N.). — *Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice.* In-4°, 89 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BIERMANN (O.). — ELEMENTE DER HÖHEREN MATHEMATIK. 1 vol. in-8°; XII-381 p. Leipzig, Teubner, 1895.

Le Livre que M. Biermann publie sous ce titre est destiné aux élèves des hautes écoles techniques. Il a pour but de les initier aux éléments de l'Algèbre, de la théorie des fonctions et du Calcul différentiel. Sur chaque théorie, l'auteur devait se limiter strictement aux choses les plus essentielles, en raison des besoins du public spécial auquel il s'adressait; mais il a pris soin d'indiquer les *lectures* qui permettront aux étudiants de compléter leurs connaissances.

Voici, rapidement, dans leur ordre, les sujets qu'il traite.

Reprenant, suivant l'habitude allemande, les choses au début, il développe successivement les notions de nombre entier, fractionnaire, positif ou négatif, irrationnel. Les nombres irrationnels sont définis au moyen de suites infinies, dites *élémentaires;* c'est ce que M. Méray appelle des *variantes convergentes;* il introduit ensuite les exponentielles et les logarithmes; puis développe au point de vue de la convergence (conditionnelle, inconditionnelle, absolue) les propriétés élémentaires des séries et des produits infinis.

Il passe ensuite à la notion de fonction d'une variable réelle : fonctions entières, rationnelles, limites supérieure et inférieure, valeurs limites, continuité, maxima et minima, discontinuité, formes indéterminées, limite de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pour x infini, théorème de Cauchy sur la limite pour x infini de $\frac{f(x)}{x}$ quand

$$f(x+1)-f(x)$$

admet une limite, fonctions trigonométriques (définies par la Géométrie); définition de la continuité pour les fonctions de plusieurs variables.

La notion de nombre imaginaire est déduite de la notion générale de nombre complexe à n unités et du principe de perma-

nence. L'auteur introduit d'ailleurs rapidement la représentation géométrique et trigonométrique à propos de laquelle il développe le théorème de Moivre et introduit la notion de racine primitive d'une équation binome. Il traite ensuite, au point de vue de la convergence, des séries à termes imaginaires et introduit la notion de fonction d'une variable imaginaire, dans le sens général du mot, de la pure *dépendance* entre la variable et la fonction.

Passant à l'Algèbre, il traite succinctement des équations du premier degré, des déterminants, puis, avec quelques détails, de la fonction rationnelle entière : la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre est fondée sur la possibilité de diminuer le module d'une fonction entière qui n'est pas nulle, et sur ce qu'une fonction continue atteint sa limite inférieure; la résolution des équations du second, du troisième et du quatrième degré est établie systématiquement au moyen de la transformation linéaire. L'auteur traite ensuite du plus grand commun diviseur, de la décomposition en fractions simples, des fonctions symétriques, des fonctions des racines d'une équation qui prennent une ou plusieurs valeurs quand on permute ses racines, puis il fait une incursion rapide dans le domaine de l'Algèbre supérieure, en démontrant l'impossibilité de résoudre, par radicaux, l'équation générale dont le degré dépasse quatre. Si courte que soit cette incursion, si importants qu'en soient les résultats, elle est singulièrement significative dans un Livre qui s'adresse à de futurs ingénieurs. On rentre dans un domaine plus pratique avec la théorie des équations numériques, les méthodes pour la séparation et l'approximation des racines. Enfin, un Chapitre sur l'élimination termine la partie du Livre consacrée à l'Algèbre.

L'auteur s'occupe ensuite des séries entières (*Potenzreihen*). Après avoir établi les propositions fondamentales relatives au cercle de convergence, et celles qui concernent les calculs effectués sur des séries entières (multiplication, division, etc.), il traite de la série du binome, des séries dérivées, du prolongement, de la définition des fonctions analytiques d'après M. Weierstrass, et donne quelques indications sur les séries entières par rapport à plusieurs variables. Il reprend, de ce nouveau point de vue, le théorème fondamental de l'Algèbre et démontre la proposition fondamentale sur le retour des suites.

Après ces généralités, il traite de quelques fonctions spéciales, en particulier de la fonction exponentielle et des fonctions qui s'y rattachent, logarithmes, fonctions trigonométriques directes et inverses. Un dernier Chapitre est consacré à l'examen de quelques règles de convergence (Gauss, etc.) et à l'étude de la convergence de quelques séries sur le cercle de convergence; l'auteur termine en montrant comment les produits infinis peuvent donner naissance à des fonctions analytiques. J. T.

KRONECKER (L.). — WERKE. Herausgegeben auf Veranlassung der K. P. Akademie der Wissenschaften, von *K. Hensel*. Erster Band. IX-483 p. in-4°. Leipzig, Teubner, 1895.

L'Académie des Sciences de Berlin continue, par la publication des Œuvres de Kronecker, la série où figurent déjà les Œuvres de Jacobi, de Dirichlet, de Steiner et de Borchardt. Il est inutile d'insister sur les services que rendent de pareilles publications, et il faut se borner à souhaiter que l'exemple donné par l'Académie de Berlin soit suivi ailleurs. La présente publication, qui ne peut manquer de faire grand honneur à M. Hensel, à qui elle est confiée, est faite d'après l'excellent système adopté en Allemagne pour les éditions analogues, c'est-à-dire que les fautes d'impression ou même d'inattention que comportent les anciens textes sont purement et simplement corrigées, et que des *Notes* sont ajoutées là où elles paraissent nécessaires. Le premier Volume, d'ailleurs, ne contient pas de telles Notes; elles seront réunies après la première série des Œuvres.

M. Hensel a, en effet, divisé les Mémoires de Kronecker en trois séries : la première se rapporte à ce que Kronecker appelait l'*Arithmétique générale*, c'est-à-dire à la Théorie des nombres (bornée à ses méthodes propres), à la théorie des fonctions rationnelles de variables indépendantes, en particulier des formes linéaires, des déterminants, des formes bilinéaires et quadratiques, et enfin à cette théorie générale des systèmes de nombres et de fonctions algébriques qu'il a développée dans le célèbre Mémoire dédié à Kummer (*Festschrift*).

La seconde série comportera deux Parties : la première contiendra les recherches d'Algèbre qui se rapportent à la résolution des équations, et en particulier à la classification des équations d'après leur *affect ;* la seconde Partie contiendra les applications de l'*Analyse* à la théorie des nombres.

La dernière série contiendra les recherches d'Analyse proprement dite, celles qui concernent la théorie du potentiel, divers points de Physique mathématique, etc.

Dans chaque série, les Mémoires se suivront dans l'ordre chronologique ; à la fin figureront les travaux inédits ; les papiers laissés par Kronecker contiennent, en effet, de nombreux Mémoires entièrement ou presque entièrement terminés. D'autres papiers demanderont une étude plus difficile.

Nous relevons, dans la Préface, les noms de MM. Landsberg et Vahlen qui ont prêté leur concours à M. Hensel, et celui de M. Hermite, qui a voulu revoir les Mémoires écrits en français.

Le présent Volume contient les Mémoires de la première série, publiés depuis 1845 jusqu'en avril 1874. Il est orné d'un beau portrait de Kronecker. J. T.

MÉLANGES.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DÉPENDANT D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE BINOME;

Par M. J. DOLBNIA.

1. On connaît plusieurs exemples de réduction des intégrales abéliennes de la forme

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda}}$$

aux intégrales elliptiques. Mais ces exemples sont isolés, n'étant liés par aucune idée générale, et la réduction même est basée sur

des substitutions accidentelles, n'ayant d'autre raison d'être qu'un simple hasard. Comme sur un exemple d'une résolution imparfaite de cette question, citons l'intégrale

$$v = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^6+1}},$$

proposée par Serret dans le *Cours de Calcul intégral*, 1868, p. 65. Cette intégrale est réduite aux elliptiques moyennant une substitution irrationnelle, tandis que l'intégrale

$$w = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x^3+a)(x^3+b)}},$$

presque tout à fait pareille à v ne peut être réduite aux elliptiques par aucune substitution possible. Les autres cas connus de la réduction des intégrales du type J ne sont pas importants à cause de leur simplicité et par le caractère accidentel des méthodes de réduction. En outre, pas une des méthodes ordinaires n'offre les moyens pour découvrir de nouvelles intégrales réductibles. Enfin, la classification admise des intégrales abéliennes J nous semble imparfaite.

A la suite de cette imperfection les intégrales, appartenant, sans aucun doute, au même genre, sont traitées comme différentes. Nous nous convaincrons bientôt de la vérité de cette remarque. Pour donner un critère possible de la réductibilité des intégrales J, ainsi que les conditions par lesquelles on pourrait juger que plusieurs intégrales différentes appartiennent au même genre, il faudrait faire une nouvelle définition concrète du genre de l'intégrale J, définition entièrement indépendante de la théorie générale de Riemann.

Après l'intégrale donnée

$$\mathrm{J} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda}},$$

composons l'intégrale

$$\mathrm{A} = \int \frac{x^p \mathrm{F} x \, \partial x}{\sqrt[m]{[(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda]^q}},$$

où

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=jm,$$

$$q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1,$$

$$p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ j-2;$$

Fx est une fonction entière de la forme

$$Fx=(x-a)^{a_1}(x-b)^{b_1}\ldots(x-l)^{l_1},$$

prise de façon que l'intégrale A n'ait pas de points critiques logarithmiques à une distance finie. Nous nommerons *genre de l'intégrale* J le nombre des intégrales du type A conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère. Par exemple, définissons le genre de l'intégrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}},$$

dont nous aurons besoin dans la suite. Formons la formule

$$A^q=\int\frac{x^p\,F(x)\,\partial x}{\sqrt[6]{[(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2]^q}}.$$

Après cette formule, nous aurons :

1° Pour $q=1$

$$Fx=1,\qquad p=0,$$

$$A_1=\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}};$$

2° Pour $q=2$

$$Fx=1,\qquad p=0,$$

$$A_2=\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}};$$

3° Pour $q=3$

$$Fx=(x-c)(x-d),\qquad p=0,$$

$$A_3=\int\frac{\partial x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}};$$

4° Pour $q = 4$

$$Fx = (x - c)(x - d), \qquad p = 0,$$

$$A_4 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)(x-d)}};$$

5° Pour $q = 5$

$$Fx = (x - c)(x - d), \qquad p = 0, \qquad 1,$$

$$A'_5 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^5(x-c)^4(x-d)^4}};$$

$$A'_6 = \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^5(x-c)^4(x-d)^4}}.$$

Les résultats obtenus se trouvent dans le Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x - a$.	L'exposant de $x - b$.	L'exposant de $x - c$.	L'exposant de $x - d$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1...	6	1	1	2	2	0
2...	3	1	1	2	2	1
3...	2	1	1	0	0	0
4...	3	2	2	1	1	1
5...	6	5	5	4	4	2

Le genre de l'intégrale est défini par le nombre 4 et se caractérise par quatre intégrales de la première espèce. Nous nommerons les intégrales de la première espèce, appartenant au même genre, *intégrales conjuguées*. En outre, l'intégrale de la troisième espèce

$$A_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^2}}$$

appartient au même genre. Parmi les six intégrales obtenues

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_4, \quad A_5, \quad A_6,$$

il y en a trois

$$A_1, \quad A_5, \quad A_6,$$

qui dépendent du radical du sixième degré. Nous nommerons ces intégrales *caractéristiques*. Deux intégrales

$$A_2, \quad A_4$$

dépendent de l'exposant trois; nous les désignerons comme *non caractéristiques*.

Il est facile de prouver que les intégrales non caractéristiques forment un groupe complet du genre deux. Le lien entre les intégrales caractéristiques et non caractéristiques n'est fondé que sur la combinaison donnée des exposants sur

$$(x-a), \quad (x-b), \quad (x-c), \quad (x-d).$$

On peut s'attendre que ce lien pourra être détruit à la suite de quelques substitutions, et alors le genre des intégrales caractéristiques sera diminué de deux unités. Nous verrons dans la suite que les intégrales caractéristiques sont toutes réduites aux elliptiques au moyen d'une seule et même substitution. Pour éclaircir la question très importante de l'influence des substitutions rationnelles sur l'altération du genre de l'intégrale abélienne, considérons un exemple assez compliqué et typique. Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{(x-a)^7(x-b)^7(x-c)^{10}}},$$

ou plus simplement

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{10}(x-a)^7(x-b)^7}}.$$

Le genre de cette intégrale, d'après la formule générale de Riemann, est égal à onze. En appliquant à l'intégrale donnée notre méthode de la détermination du genre, formons le Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de x.	L'exposant de $x - a$.	L'exposant de $x - b$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1....	24	10	7	7	0
2....	12	10	7	7	1
3....	8	2	7	7	1
4....	6	4	1	1	0
5....	24	2	11	11	0
6....	4	2	3	3	1
7....	24	22	1	1	0
8....	3	1	1	1	0
9....	8	6	5	5	1
10....	12	2	11	11	1
11....	24	14	5	5	0
12....	2	0	1	1	0
13....	24	10	19	19	1
14....	12	10	1	1	0
15....	8	2	3	3	0
16....	3	2	2	2	1
17....	24	2	23	23	1
18....	4	2	1	1	0
19....	24	22	13	13	1
20....	6	2	5	5	1
21....	8	6	1	1	0
22....	12	2	5	5	1
23....	24	14	17	17	1

Nous avons obtenu onze intégrales de la première espèce dont quatre seulement

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{10}(x+a)^{19}(x+b)^{19}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{2}(x+a)^{23}(x+b)^{23}}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{22}(x+a)^{13}(x+b)^{13}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{14}(x+a)^{17}(x+b)^{17}}}$$

sont caractéristiques. Les intégrales non caractéristiques consistent dans deux groupes.

I. *Groupe du genre cinq.* — Consiste dans cinq intégrales conjuguées :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{x^{10}(x+a)^{7}(x+b)^{7}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{x^{2}(x+a)^{11}(x+b)^{11}}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{x^{2}(x+a)^{5}(x+b)^{5}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^{2}(x+a)^{2}(x+b)^{2}}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^{2}(x+a)^{3}(x+b)^{3}}}.$$

II. *Groupe du genre trois.* — Consiste dans trois intégrales conjuguées :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{x^2(x+a)^7(x+b)^7}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{x^6(x+a)^5(x+b)^5}},$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^2(x+a)^3(x+b)^3}}.$$

Les deux groupes non caractéristiques ont une intégrale conjuguée commune

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^2(x+a)^3(x+b)^3}}.$$

On peut s'attendre qu'à la suite d'une substitution simplement rationnelle le lien entre les intégrales caractéristiques et le groupe du genre cinq sera détruit; dans ce cas le genre de l'intégrale donnée diminuera de cinq unités. On peut s'attendre de même qu'à la suite d'une substitution simplement rationnelle le lien entre les intégrales caractéristiques et le groupe du genre trois se détruira aussi; dans ce cas le genre de l'intégrale donnée diminuera de trois unités.

En ayant, au lieu de l'intégrale donnée, une autre du même genre

$$\mathrm{A} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{(x+a)^{19}(x+b)^{19}}},$$

cette intégrale ne diffère de l'intégrale donnée qu'en ce que pour l'intégrale nouvelle l'infini est un point de ramification et zéro un point ordinaire. Il est évident que

$$\mathrm{A} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^{19}}}.$$

En posant

$$\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 = t,$$

nous aurons

$$\mathrm{A} = \int \frac{\partial t}{\sqrt[24]{t^{12}\left[t-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^{19}}}.$$

Moyennant une substitution linéaire cette intégrale peut être remplacée par une nouvelle intégrale

$$B = \int \frac{\partial x}{\sqrt[24]{x^{12}(x+a)^{19}(x+b)^{17}}},$$

pour laquelle l'infini n'est pas un point de ramification. Le genre de cette intégrale est égal à six. A la suite de cette même substitution le genre de toutes les intégrales caractéristiques est diminué jusqu'à six. Cet exemple explique suffisamment le rôle de la substitution simplement rationnelle dans l'altération du genre des intégrales abéliennes du type donné. Comme application nous présenterons la théorie presque complète de la réduction des intégrales abéliennes du type

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}}},$$

$$\alpha+\beta+\gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } m),$$

pour trois cas bien simples :

$$m = 6, \qquad m = 12, \qquad m = 8.$$

3. Considérons d'abord le cas où $m = 6$. Dans ce cas deux suppositions sont seules possibles :

$$\alpha+\beta+\gamma = 6,$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 12.$$

Ces équations n'ont que six solutions entières et positives

$$(1) \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3,$$
$$(2) \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2,$$
$$(3) \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 4,$$
$$(4) \qquad \alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 5,$$
$$(5) \qquad \alpha = 4, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 4,$$
$$(6) \qquad \alpha = 2, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 5.$$

Les combinaisons (1), (2), (4), (5) amènent aux intégrales elliptiques. Les intégrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

appartiennent au même genre; de même les intégrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)}}$$

appartiennent au même genre. Par conséquent, nous devons nous occuper des intégrales

$$J_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}},$$

$$J_2 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}.$$

La détermination du genre de ces intégrales amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1.....	6	2	5	5	1
2.....	3	2	2	2	1
3.....	2	0	1	1	0
4.....	3	1	1	1	0
5.....	6	4	1	1	0

L'intégrale mentionnée appartient au genre deux. A ce genre appartiennent deux intégrales caractéristiques. Conjuguée à l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}},$$

se trouve l'intégrale non caractéristique

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

du genre un et de première espèce. Il est naturel, par conséquent, de chercher une substitution simplement rationnelle sous l'influence de laquelle le lien entre les intégrales

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

sera détruit. Comme suite de cette altération nous aurons la réduction de l'intégrale J_1 au genre un, c'est-à-dire aux intégrales elliptiques.

Posons

$$x - a = \frac{1}{z},$$

alors

$$J_1 = -\int \frac{\partial z}{\sqrt[6]{[(a-b)z+1]^5[(a-c)z+1]^5}},$$

ou

$$J_1 = -\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}\int \frac{\partial z}{\sqrt[6]{\left[\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^5}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \qquad \beta = \frac{1}{a-c}.$$

En posant

$$\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous avons

$$J_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}}{2}\int \frac{\partial t}{\sqrt[6]{t^3\left[t-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^5}}.$$

L'intégrale obtenue, comme on sait, appartient à la catégorie des elliptiques. La réduction de l'intégrale J_1 aux elliptiques peut être obtenue encore par un procédé qui s'emploie souvent avec succès. Nous avons

$$J_1 = -\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{(z+\alpha)^2(z+\beta)^2}}\,\frac{1}{\sqrt[6]{(z+\alpha)(z+\beta)}}.$$

En posant

$$\frac{\partial z}{\sqrt[3]{(z+\alpha)^2(z+\beta)^2}} = d\xi,$$

nous obtiendrons

$$\sqrt[3]{(z+\alpha)(z+\beta)} = 9\,p(\xi)\ (^1),$$

où $p(\xi)$ est une fonction de Weierstrass avec les invariants

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\left(\frac{\alpha-\beta}{27}\right)^2.$$

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, mai 1893.

Par conséquent

$$J_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}}{3}\int\frac{\partial\xi}{\sqrt{p(\xi)}}.$$

En posant

$$p(\xi) = t,$$

nous aurons

$$J_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha^5\beta^5}}{3}\int\frac{\partial t}{\sqrt{4t^4+\left(\frac{\alpha-\beta}{27}\right)^2 t}}.$$

A la catégorie mentionnée, appartient l'intégrale citée dans l'Ouvrage de Serret ([1]), et sa réduction aux intégrales elliptiques ne présente aucune difficulté. Soit donnée

$$V = \int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^6+1}}.$$

Posons

$$x^6 = z;$$

alors

$$V = \frac{1}{6}\int\frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^5(z+1)^2}}.$$

Posons encore

$$z+1 = \frac{1}{t},$$

alors

$$V = -\frac{1}{6}\int\frac{\partial t}{\sqrt[6]{t^5(1-t)^5}},$$

et cette intégrale, comme nous venons de le prouver, peut se réduire à la forme

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^5}},$$

ou à la forme

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^4-ax}}.$$

A cette dernière forme, l'intégrale ci-dessus se réduit dans l'Ouvrage de Serret.

([1]) P. 65.

4. La réduction de l'intégrale

$$J_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}},$$

aux elliptiques peut être adaptée à la résolution du problème suivant :

Problème. — *Trouver les conditions pour que l'intégrale*

$$J_3 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Posons d'abord

$$x - a = \frac{1}{z},$$

alors

$$J_3 = -\sqrt[6]{\alpha\beta} \int \frac{\partial z}{z\sqrt[6]{(z+\alpha)(z+\beta)}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \qquad \beta = \frac{1}{a-b}.$$

En posant maintenant

$$\left(z + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous aurons

$$J_3 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha\beta}}{2} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\sqrt[6]{t - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}}$$
$$+ \frac{\alpha+\beta}{4}\sqrt[6]{\alpha\beta} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\sqrt[6]{t^3\left[t - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]}}.$$

La première des intégrales obtenues

$$N_1 = -\frac{\sqrt[6]{\alpha\beta}}{2} \int \frac{\partial t}{\left[t - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\sqrt[6]{t - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}}$$

se réduit immédiatement aux logarithmes, et la seconde

$$N_2 = \frac{\alpha+\beta}{4}\sqrt{\alpha\beta}\int\frac{\partial t}{\left[t-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\sqrt[6]{t^3\left[t-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]}}.$$

est elliptique. Si

$$\alpha+\beta = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = \frac{b+c}{2},$$

l'intégrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}$$

se réduit aux logarithmes. Ce résultat ne donne rien de nouveau, car dans le cas donné J_3 se réduit à la forme

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{x^4(x^2-a)}}$$

et cette intégrale s'exprime facilement par des logarithmes par la substitution ordinaire

$$x^2 = z.$$

Pour trouver les conditions générales d'exprimabilité par des logarithmes l'intégrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}},$$

il faut exprimer

$$N_2 = \int\frac{\partial t}{\left[t-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\sqrt[6]{t^3\left[t-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]}},$$

par les fonctions elliptiques de Weierstrass.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = r, \qquad \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = q;$$

nous avons

$$N_2 = \int\frac{\partial x}{(x-r)\sqrt[6]{x^3(x-q)}}.$$

En posant

$$x-q = \frac{1}{z},$$

nous avons

$$N_2 = -\frac{1}{\sqrt{q}} \int \frac{\sqrt[3]{z}\, dz}{[(q-r)z+1]\sqrt[6]{\left(z+\frac{1}{q}\right)^3 z^4}}.$$

En posant ici

$$\frac{dz}{\sqrt[6]{\frac{2^3 . 3^5}{5}\left(z+\frac{1}{q}\right)^3 z^4}} = dt,$$

et en exprimant z par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^6 = \frac{2^3 . 3^5}{5}\left(z+\frac{1}{q}\right)^3 z^4,$$

ainsi que par la condition que z a son infini pour $t = 0$, nous obtiendrons (1)

$$z = 120\,\mathrm{p}^3(t),$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\frac{1}{30q},$$

$$\mathrm{p}'(t) = \sqrt{4\,\mathrm{p}^3(t) + \frac{1}{30q}};$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{6}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)\sqrt{5}} \int \frac{\mathrm{p}t\, dt}{\mathrm{p}^3 t - \frac{1}{120\alpha\beta}}.$$

En posant ici

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{15\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(a-b)(a-c)}{15}} = \mathrm{p}(t_0)$$

et en répétant les raisonnements que nous avons déjà employés plusieurs fois, on peut formuler le théorème suivant :

Soient donnés

$$\mathrm{p}(t_0) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{(a-b)(a-c)}{15}},$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\frac{2}{15}\,\frac{(a-b)^2(a-c)^2}{(b-c)^2}.$$

Si $t_0 = \frac{2\bar{\omega}}{m}$ *est une partie commensurable d'une période,*

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. XVII, p. 137.

l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}}$$

se réduit aux logarithmes.

Exemple. — Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^4(x-b)(x-c)}},$$

où

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = -7 \pm 4\sqrt{3}.$$

Nous avons

$$p(t_0) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{c}{15}}, \qquad g_3 = -\frac{2}{15}\left(\frac{c}{1-c}\right)^2,$$

$$p'(t_0) = \sqrt{\frac{c}{30}\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2}.$$

Après la formule de la duplication de l'argument, nous avons

$$p(2t_0) = -2p(t_0) + \frac{1}{4}\left(\frac{6p^2 t_0}{p' t_0}\right)^2,$$

ou

$$p(2t_0) = -\sqrt[3]{\frac{c}{15}} + \frac{9}{8}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2\sqrt[3]{\frac{c}{15}},$$

ou

$$p(2t_0) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{c}{15}},$$

c'est-à-dire

$$p(2t_0) = p(t_0);$$

par conséquent

$$t_0 = \frac{2\varpi}{3};$$

par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{x^4(x-1)(x+7\pm 4\sqrt{3})}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes.

5. Étudions maintenant en détail les intégrales de la forme

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma}},$$

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 12).$$

Deux suppositions seules sont possibles

$$\alpha + \beta + \gamma = 12,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 24.$$

Ces deux suppositions amènent évidemment à une seule relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 24;$$

car les intégrales satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 12$$

sont des intégrales de la troisième espèce avec le point critique logarithmique à l'infini.

Toutes ces intégrales dépendent, comme nous le verrons, des arguments de la première espèce satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 24.$$

Ne désirant pas entrer ici dans des détails concernant peu la question et ne présentant point d'intérêt, disons simplement que le type des intégrales mentionnées se réduit aux cinq suppositions suivantes :

(1)	$\alpha = 10,$	$\beta = 7,$	$\gamma = 7,$
(2)	$\alpha = 6,$	$\beta = 7,$	$\gamma = 11,$
(3)	$\alpha = 7,$	$\beta = 8,$	$\gamma = 9,$
(4)	$\alpha = 5,$	$\beta = 8,$	$\gamma = 11,$
(5)	$\alpha = 5,$	$\beta = 9,$	$\gamma = 10.$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^{7}(x-c)^{7}}}$$

amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1....	12	10	7	7	1
2....	6	4	1	1	0
3....	4	2	3	3	1
4....	3	1	1	1	0
5....	12	2	11	11	1
6....	2	0	1	1	0
7....	12	10	1	1	0
8....	3	2	2	2	1
9....	4	2	1	1	0
10....	6	2	5	5	1
11....	12	2	5	5	0

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale appartient au genre cinq. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques de la première espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^7(x-c)^7}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^2(x-b)^{11}(x-c)^{11}}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)(x-c)}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}}.$$

La réduction de toutes ces quatre intégrales sera faite en même temps et au moyen des mêmes substitutions simplement rationnelles.

Pour se rendre compte quelle influence doivent avoir les substitutions simplement rationnelles pour diminuer le genre des intégrales caractéristiques, revenons au Tableau. On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve le groupe des intégrales du genre deux :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^2(x-b)^5(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

La substitution rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué de deux unités. On

peut évidemment donner à l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{10}(x-b)^7(x-c)^7}}$$

la forme suivante

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x+\alpha)^7(x+\beta)^7}};$$

maintenant l'infini est un point de ramification. Nous avons

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{\left[\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^7}}.$$

En posant

$$\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = t,$$

nous obtiendrons

$$J_1 = \int \frac{dt}{\sqrt[12]{t^6\left[t-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^7}}.$$

En faisant l'infini un point ordinaire, nous amenons l'intégrale donnée à la forme

$$J_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}.$$

Les autres intégrales caractéristiques sont réduites conformément à la forme suivante :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)(x-c)^5}}.$$

6. Analysons l'intégrale

$$J_1 = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}.$$

L'analyse de cette intégrale amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x - a$.	L'exposant de $x - b$.	L'exposant de $x - c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1....	12	6	7	11	1
2....	6	0	1	5	0
3....	4	2	3	3	1
4....	3	0	1	2	0
5....	12	6	11	7	1
6....	2	0	1	1	0
7....	12	6	1	5	0
8....	3	0	2	2	0
9....	4	2	1	1	0
10....	6	0	5	1	0
11....	12	6	5	1	0

Ainsi, l'intégrale donnée du genre cinq est réduite à l'intégrale du genre trois, comme il fallait le prévoir. Ce nouveau genre se distingue par deux intégrales caractéristiques de la première espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^7(x-c)^{11}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^{11}(x-c)^7}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^6(x-b)^5(x-c)}}.$$

En conjonction avec ces intégrales se trouvent les intégrales du genre un

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)(x-c)}}.$$

Si nous trouvons une substitution simplement rationnelle qui va détruire cette conjonction, nous amènerons l'intégrale étudiée ou au genre deux, ou au genre un. On peut évidemment réduire l'intégrale donnée à la forme

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x+a)^6 x^7}}.$$

En posant

$$x = t^3,$$

nous aurons

$$J = 3\int \frac{t\,dt}{\sqrt[12]{(t^3+a)^6 t^9}},$$

$$J = 3\int \frac{t\,dt}{\sqrt[4]{(t^3+a)^2 t^3}},$$

$$J = 3\int \frac{t\,dt}{\sqrt[4]{(t^3+a)^2 t^3}}.$$

Il suffit de se borner à l'intégrale

$$J = \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[4]{(x^3-1)^2 x^3}}$$

ou

$$J = \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[4]{(x-1)^2(x^2+x+1)^2 x^3}}.$$

Supposons maintenant

$$x - 1 = \frac{1}{z},$$

alors

$$J = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{(1+z)\,\partial z}{\sqrt[4]{(z^2+z+\frac{1}{3})^2(z^2+z)^3}},$$

ou

$$J = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{(1+z)\,\partial z}{\sqrt[4]{[(z+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}]^2[(z+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]^3}}.$$

En posant

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \zeta,$$

nous avons

$$J = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[4]{\zeta^2(\zeta+\frac{1}{12})^2(\zeta-\frac{1}{4})^3}}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[4]{(\zeta+\frac{1}{12})^2(\zeta-\frac{1}{4})^3}}.$$

Le problème est réduit aux deux intégrales de la première espèce

$$M_1 = \int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[4]{\zeta^2(\zeta+\frac{1}{12})^2(\zeta-\frac{1}{4})^3}},$$

$$M_2 = \int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[4]{(\zeta+\frac{1}{12})^2(\zeta-\frac{1}{4})^3}},$$

L'intégrale M_2 est elliptique et M_1 est une intégrale du genre

deux. Ainsi, toutes les intégrales caractéristiques pour la combinaison

$$\alpha = 10, \qquad \beta = 7, \qquad \gamma = 7$$

sont réduites finalement au genre deux.

Les intégrales caractéristiques pour la combinaison

$$\alpha = 6, \qquad \beta = 7, \qquad \gamma = 11$$

sont aussi réduites au genre deux.

7. Considérons maintenant la combinaison

$$\alpha = 7, \qquad \beta = 8, \qquad \gamma = 9.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^7(x-b)^8(x-c)^9}},$$

amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1....	12	7	8	9	1
2....	6	1	2	3	0
3....	4	3	0	1	0
4....	3	1	2	0	0
5....	12	11	4	9	1
6....	2	1	0	1	0
7....	12	1	8	3	0
8....	3	2	1	0	0
9....	4	1	0	3	0
10....	6	5	4	3	1
11....	12	5	4	3	0

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale appartient au genre trois. Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques de la première espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^7(x-b)^8(x-c)^9}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{11}(x-b)^4(x-c)^9}},$$

et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)(x-b)^8(x-c)^3}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5(x-b)^4(x-c)^3}}.$$

On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^4(x-c)^3}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué.

Il suffit de se borner à l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-1)^9 x^7}}.$$

Posons

$$x = t^3;$$

alors

$$S = 3 \int \frac{t\,dt}{\sqrt[4]{(t^3-1)^3 t^3}},$$

ou

$$S = 3 \int \frac{t\,dt}{\sqrt[4]{(t^2+t+1)^3(t^2-t)^3}}.$$

Posons

$$t = \frac{m\xi + n}{1+\xi},$$

où m, n satisfont aux conditions

$$2mn + (m+n) + 2 = 0,$$

$$2mn - (m+n) = 0.$$

Nous aurons

$$S = 3(m+n) \int \frac{(m\xi+n)\,\partial\xi}{\sqrt[4]{[(m^2+m+1)\xi^2+n^2+n+1]^3[(m^2-m)\xi^2+n^2-n]^3}}.$$

En posant enfin

$$\xi^2 = z,$$

nous réduirons S aux deux intégrales elliptiques

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{(z+\alpha)^3(z+\beta)^3}}, \qquad \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^2(z+\alpha)^3(z+\beta)^3}},$$

8. Considérons maintenant la combinaison

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 8, \qquad \gamma = 11.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5(x-b)^8(x-c)^{11}}}$$

amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1....	12	5	8	11	1
2....	6	5	2	5	1
3....	4	1	0	3	0
4....	3	2	2	2	1
5....	12	1	4	7	0
6....	2	1	0	1	0
7....	12	11	8	5	1
8....	3	1	1	1	0
9....	4	3	0	1	0
10....	6	1	4	1	0
11....	12	7	4	1	0

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5(x-b)^8(x-c)^{11}}}$$

appartient au genre quatre, Le genre mentionné se distingue par deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5(x-b)^8(x-c)^{11}}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^{11}(x-b)^8(x-c)^5}},$$

de la première espèce et par deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)(x-b)^4(x-c)^7}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^7(x-b)^4(x-c)}}.$$

On voit qu'en conjonction avec les intégrales données, se trouve le groupe complet du genre deux

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^5(x-b)^2(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette con-

jonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué de deux unités.

Il suffit de considérer l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[12]{(x-a)^8 x^5}}.$$

Supposons

$$x = t^2;$$

alors

$$s = 2\int \frac{t\,dt}{\sqrt[6]{(t^2-a)^4 t^5}}.$$

En posant

$$t = \frac{1+y}{y},$$

nous aurons

$$S = -2\int \frac{(1+y)\,\partial y}{\sqrt[6]{[(1-a)y^2+2y+1]^4 (y^2+y)^5}}.$$

Ainsi, pour résoudre le problème, nous aurons l'intégrale

$$J = \int \frac{(x+a)\,\partial x}{\sqrt[6]{(x^2+px+q)^4 (x^2+rx+s)^5}}.$$

En employant la substitution

$$x = \frac{\alpha z+\beta}{1+z},$$

où α, β satisfont aux conditions

$$2\alpha\beta + p(\alpha+\beta) + 2q = 0,$$
$$2\alpha\beta + r(\alpha+\beta) + 2s = 0,$$

nous réduirons l'intégrale donnée à la forme

$$J = \int \frac{(Az+B)\,\partial z}{\sqrt[6]{(z^2+m)^4 (z^2+n)^3}}.$$

En posant, enfin

$$z^2 = \zeta,$$

nous aurons définitivement

$$J = \frac{A}{2}\int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[6]{(\zeta+m)^4(\zeta+n)^5}} + \frac{B}{2}\int \frac{\partial\zeta}{\sqrt[6]{\zeta^3(\zeta+m)^4(\zeta+n)^5}}.$$

Ainsi, l'intégrale donnée est réduite aux elliptiques.

9. Considérons, enfin, l'intégrale abélienne de la forme

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}},$$
$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } 8).$$

Deux suppositions seules sont possibles

$$\alpha + \beta + \gamma = 16,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 8.$$

Ces deux suppositions amènent évidemment à une seule relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 8,$$

et nous aurons les trois suppositions suivantes :

(1) $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 6,$

(2) $\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 5,$

(3) $\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 4.$

La recherche du genre de l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}$$

amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1.....	8	1	2	5	0
2.....	4	1	2	1	0
3.....	8	3	6	7	1
4.....	2	1	0	1	0
5.....	8	5	2	1	0
6.....	4	3	2	3	1
7.....	8	7	6	3	1

On voit, d'après le Tableau, que l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}$$

appartient au genre trois. Le genre mentionné se distingue par

deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^3(x-b)^6(x-c)^7}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^7(x-b)^6(x-c)^3}}$$

de la première espèce et par deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^5}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^5(x-b)^2(x-c)}}$$

de la troisième espèce. On voit qu'en conjonction avec les intégrales données se trouve l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)^3}}.$$

La substitution simplement rationnelle doit détruire cette conjonction, et le genre de l'intégrale donnée sera diminué d'une unité au moins.

Il suffit de considérer l'intégrale

$$S = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^3(x-b)^6}}.$$

En posant

$$x - a = t^2,$$

nous aurons

$$S = 2\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{t^3\left[t+\sqrt{b-a}\right]^3\left[t-\sqrt{b-a}\right]^3}}.$$

Par conséquent, nous aurons l'intégrale de la forme

$$A = \int \frac{t\,dt}{\sqrt[4]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

En employant la substitution

$$x = m + \frac{1}{y},$$

nous réduirons l'intégrale donnée à la forme

$$A = \int \frac{(y+h)\,dy}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}}.$$

Il est facile de prouver que cette intégrale appartient au troisième genre et se caractérise par les trois intégrales con-

juguées de la première espèce

$$u_1 = \int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}},$$
$$u_2 = \int \frac{y\,\partial y}{\sqrt[4]{(y-k)^3(y-l)^3(y-m)^3(y-n)^3}},$$
$$u_3 = \int \frac{\partial y}{\sqrt{(y-k)(y-l)(y-m)(y-n)}},$$

dont la troisième est elliptique. Présentons la fonction sous le radical dans la forme

$$(y-k)(y-l)(y-m)(y-n) = (y^2+py+q)(y^2+ry+s),$$

et employons la substitution ordinaire

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{1+z},$$

où α, β satisfont aux conditions

$$2\alpha\beta + p(\alpha+\beta) + 2q = 0,$$
$$2\alpha\beta + r(\alpha+\beta) + 2s = 0.$$

Par cette raison, nous aurons

$$u_1 = (\alpha - \beta)\int \frac{(1+z)\,\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2+B)(A'z^2+B')]^3}},$$
$$u_2 = (\alpha - \beta)\int \frac{(\alpha z+\beta)\,\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2+B)(A'z^2+B')]^3}}.$$

Ces intégrales se réduiront aux deux suivantes :

$$M = \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2+B)(A'z^2+B')]^3}},$$
$$N = \int \frac{\partial z}{\sqrt[4]{[(Az^2+B)(A'z^2+B'^2)]^3}}.$$

En posant

$$z^2 = t,$$

nous aurons définitivement

$$M = \frac{1}{2}\int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{(At+B)^3(A't+B')^3}},$$
$$N = \frac{1}{2}\int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{t^2(At+B)^3(A't+B')^3}}.$$

Il est clair que M et N sont elliptiques.

10. Considérons la combinaison

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 7, \qquad \gamma = 7.$$

La recherche du genre de l'intégrale

$$V = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2(x-b)^7(x-c)^7}}$$

amène au Tableau suivant :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1.....	8	2	7	7	1
2.....	4	2	3	3	1
3.....	8	6	5	5	1
4. ...	2	0	1	1	0
5.....	8	2	3	3	0
6.....	4	2	1	1	0
7.....	8	6	1	1	0

Ce Tableau prouve que l'intégrale donnée appartient au genre trois. A ce genre appartiennent deux intégrales caractéristiques

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2(x-b)^7(x-c)^7}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^6(x-b)^5(x-c)^5}}$$

de la première et deux intégrales caractéristiques de la troisième espèce :

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}, \qquad \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^6(x-b)(x-c)}}.$$

En conjonction avec les intégrales caractéristiques de la première espèce se trouve l'intégrale elliptique

$$u = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}.$$

Cette circonstance donne lieu de prévoir que la substitution simplement rationnelle, en détruisant cette conjonction, diminuera le genre de l'intégrale d'une unité. Prenons l'intégrale

$$v = \int \frac{\partial x}{\sqrt[8]{(x-a)^2(x-b)^7(x-c)^7}}.$$

En posant

$$x - a = \frac{1}{z},$$

nous aurons

$$V = -\sqrt[8]{\alpha^7\beta^7}\int\frac{\partial z}{\sqrt[8]{\left[\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]^7}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-b}, \qquad \beta = \frac{1}{a-c}.$$

En posant encore

$$\left(z+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = t, \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = \gamma,$$

nous aurons

$$V = -\frac{1}{2}\sqrt[8]{\alpha^7\beta^7}\int\frac{\partial t}{\sqrt[8]{t^4(t-\gamma)^7}}.$$

L'intégrale obtenue est équivalente à l'intégrale

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt[8]{(y-\alpha)^4(y-\beta)^5(y-\gamma)^7}},$$

qui appartient au genre deux et se caractérise par deux intégrales caractéristiques de la première espèce, comme le prouve le Tableau ci-dessous :

q.	L'exposant du radical.	L'exposant de $x-a$.	L'exposant de $x-b$.	L'exposant de $x-c$.	Le nombre des intégrales de la première espèce.
1.....	8	4	5	7	1
2.....	4	0	1	3	0
3.....	8	4	7	5	1
4.....	2	0	1	1	0
5.....	8	4	1	3	0
6.....	4	0	3	1	0
7.....	8	4	3	1	0

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J. TANNERY et J. MOLK. — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome II : *Calcul différentiel* (IIe Partie). 1 vol. in-8°, VI-300 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Rappelons tout d'abord que le premier Volume du bel Ouvrage que sont en train de publier MM. Tannery et Molk est consacré à l'exposition des propriétés essentielles de la fonction σu et des fonctions qui en dérivent, ainsi qu'à la théorie de la transformation des fonctions σ ; il contient, en outre, une Introduction où se trouvent réunis les éléments de la théorie des séries et des produits infinis, et aussi de la théorie des fonctions transcendantes entières.

Le présent Volume termine la partie de l'Ouvrage qui se rapporte au *Calcul différentiel;* il contient, en deux Chapitres, les Chapitres III et IV du *Calcul différentiel*, une magistrale exposition des propriétés des fonctions $\mathfrak{S}$ et des fonctions que l'on obtient en prenant les quotients des fonctions σ ou des fonctions $\mathfrak{S}$ deux à deux ; c'est d'ailleurs la théorie de la transformation de toutes ces fonctions qui occupe naturellement la plus large place dans cette exposition.

Ajoutons tout de suite que les auteurs ont eu l'idée singulièrement heureuse de réunir les nombreuses formules obtenues successivement au cours de leur exposition dans un Tableau placé à la fin du Volume, et qui n'occupe pas moins de soixante-huit pages. Ce Tableau, qui correspond au texte par un système particulier de numérotage, d'ailleurs très facile, constitue un véritable résumé de la théorie et rend l'Ouvrage d'un emploi particulièrement commode pour les applications.

Le Chapitre III, intitulé *Les fonctions* $\mathfrak{S}$, contient neuf paragraphes ; le Chapitre IV, intitulé *Les quotients des fonctions* σ *et des fonctions* $\mathfrak{S}$, contient cinq paragraphes. Tous ces paragraphes sont, en réalité, autant de Chapitres que nous allons analyser successivement, nous estimant heureux si nous réussissons à donner, par une analyse aussi succincte, une idée exacte de la richesse des matières contenues dans ce Volume, et surtout des

qualités toutes particulières d'exposition qui distinguent les auteurs.

CHAPITRE III. — Les fonctions $\mathfrak{S}$.

1. *Développement des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$.* — Dans les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ telles qu'on les a considérées jusqu'à présent, les périodes jouent le même rôle : cette symétrie, avantageuse par certains côtés, présente aussi des inconvénients, car elle laisse confondues certaines propriétés de ces fonctions, peut-être les plus importantes. Détruisant cette symétrie afin d'obtenir les fonctions de Jacobi, MM. Tannery et Molk font tout d'abord l'hypothèse essentielle suivante :

Le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ est positif; par suite, on a

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

En outre, si l'on remplace le couple primitif $(2\omega_1, 2\omega_3)$ par un couple équivalent $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$, on supposera toujours ces deux couples *proprement* équivalents.

Les notations des auteurs sont en gros celles de M. Schwarz, sauf les différences qui résultent de la supposition $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Si l'on fait

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad z = e^{v\pi i},$$

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \qquad q = e^{\tau\pi i},$$

la valeur absolue de q est inférieure à 1, et l'on peut poser

$$q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n}), \qquad q_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n}),$$

$$q_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + q^{2n-1}), \qquad q_3 = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1 - q^{2n-1}),$$

les produits infinis qui figurent dans les seconds membres étant

absolument convergents ; on a, d'ailleurs,

$$q_1 q_2 q_3 = 1.$$

En transformant, à l'aide des nouvelles notations, une formule déjà obtenue, qui donne l'expression de la fonction σu sous forme de produit infini à simple entrée, on obtient

$$\sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - q^{2n} z^{-2}}{1 - q^{2n}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - q^{2n} z^2}{1 - q^{2n}}$$

$$= e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{2\omega_1}{\pi} \sin v\pi \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - 2q^{2n}\cos 2v\pi + q^{4n}}{(1 - q^{2n})^2}.$$

Des formules analogues existent pour les fonctions $\sigma_\alpha u$.

La plupart des résultats obtenus au Chapitre II peuvent se transformer de la même façon.

Les développements nouveaux que l'on vient d'obtenir pour les fonctions σ et σ_α fournissent aisément les valeurs de $\sigma\omega_\alpha$ et $\sigma_\beta\omega_\alpha$; on a, par exemple,

$$\sigma\omega_1 = e^{\frac{\eta_1\omega_1}{2}} \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{q_1^2}{q_0^2},$$

$$\sigma\omega_2 = e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{2}} \sqrt{i} \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{q_2^2}{2q_0^2 q^{\frac{1}{4}}},$$

$$\sigma\omega_3 = e^{\frac{\eta_3\omega_3}{2}} i \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{q_3^2}{2q_0^2 q^{\frac{1}{4}}};$$

dans ces formules, comme partout dans la suite, les symboles $q^{\frac{m}{n}}$ ou $\sqrt[n]{q^m}$, $i^{\frac{m}{n}}$ ou $\sqrt[n]{i^m}$ ont une signification précise définie par les égalités

$$q^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{q^m} = e^{\frac{m\tau\pi i}{n}}, \qquad i^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{i^m} = e^{\frac{m\pi i}{2n}}.$$

On a encore, comme conséquence,

$$\sqrt{e_2 - e_3} = -\frac{\pi}{2\omega_1} 4 q_0^2 q_1^4 q^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1} q_0^2 q_2^4,$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega_1} q_0^2 q_3^4,$$

et l'on en déduit cette nouvelle relation entre q, q_1, q_2 et q_3

$$16 q q_1^8 = q_2^8 - q_3^8.$$

On définit sans ambiguïté les racines quatrièmes des différences $e_\alpha - e_\beta$ et la racine huitième du discriminant $\mathcal{G}$, par les formules

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} = i \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, 2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}},$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_2^2,$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, q_0 q_3^2,$$

$$\sqrt[8]{\mathcal{G}} = \sqrt[8]{\tfrac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2)} = \sqrt[4]{e_2 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2} = i \frac{\pi}{2\omega_1} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}\, 2 q_0^3 q^{\frac{1}{4}},$$

dans lesquelles la signification de $\sqrt{\frac{\pi}{2\omega_1}}$ est la même, arbitraire d'ailleurs.

Un procédé de transformation dont le principe est dû à Cauchy, et qui a été développé par M. Biehler, permet de développer les produits infinis qui figurent dans les expressions des $\sigma_\alpha u$ en séries convergentes, et les résultats obtenus, indiqués plus bas, amènent tout naturellement l'introduction des fonctions $\mathfrak{S}$.

2. *Relations entre les fonctions σ et les fonctions $\mathfrak{S}$.* — MM. Tannery et Molk posent

$$\mathfrak{S}_1(v) = \frac{1}{i} \sum_n (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n 2 q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi v,$$

$$\mathfrak{S}_2(v) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i} = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2 q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\pi v,$$

$$\mathfrak{S}_3(v) = \sum_n q^{n^2} e^{2nv\pi i} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} 2 q^{n^2} \cos 2n\pi v,$$

$$\mathfrak{S}_4(v) = \sum_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n 2 q^{n^2} \cos 2n\pi v.$$

Les fonctions $\mathfrak{S}$ de l'unique variable $v = \frac{u}{2\omega_1}$, ainsi définies,

sont des fonctions transcendantes entières ; les séries des seconds membres peuvent être différentiées terme à terme, par rapport à v, q ou τ.

S'il est nécessaire de mettre en évidence le rapport τ ou le nombre q à l'aide desquels sont formées les fonctions ϑ, on écrira $\vartheta_\alpha(v \mid \tau)$ ou $\vartheta_\alpha(v, q)$ au lieu de $\vartheta_\alpha(v)$.

A l'aide des fonctions ϑ, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\omega_1} q_0^3 q^{\frac{1}{4}} \sigma u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_1(v), \\
2 q_0 q_1^2 q^{\frac{1}{4}} \sigma_1 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_2(v), \\
q_0 q_2^2 \sigma_2 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_3(v), \\
q_0 q_3^2 \sigma_3 u &= e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \vartheta_4(v),
\end{aligned}$$

ou encore

$$\sigma u = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}, \qquad \sigma_\alpha u = \frac{\vartheta_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} e^{2\eta_1\omega_1 v^2}.$$

Les formules données précédemment permettent alors de mettre les $\vartheta_\alpha(v)$ sous forme de produits infinis ; on peut aussi conserver au lieu de v la variable z et introduire quatre fonctions $\rho_\alpha(z)$ respectivement égales aux fonctions $\vartheta_\alpha(v)$.

Signalons encore les expressions suivantes des fonctions ϑ, souvent utiles,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_1(v) &= \frac{1}{i} \sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left(n + \frac{1}{2} + \frac{v}{\tau}\right)^2}, \\
e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_2(v) &= \sum_n e^{\tau\pi i\left(n + \frac{1}{2} + \frac{v}{\tau}\right)^2}, \\
e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_3(v) &= \sum_n e^{\tau\pi i\left(n + \frac{v}{\tau}\right)^2}, \\
e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_4(v) &= \sum_n (-1)^n e^{\tau\pi i\left(n + \frac{v}{\tau}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Les zéros des fonctions ϑ se déterminent aisément ; d'ailleurs $\vartheta_1(v)$ est impaire, tandis que les trois autres fonctions sont paires.

Quand on change u en $u + 2\omega_1$, ou $u + 2\omega_3$, ou $u + \omega_1$, ou $u + \omega_3$, ceci revient à changer v en $v + 1$, ou $v + \tau$, ou $v + \frac{1}{2}$,

ou $v + \frac{\tau}{2}$; il est facile alors de voir les effets de ces changements sur les fonctions $\mathfrak{J}$, et l'on constate que ces fonctions ne font que se reproduire ou s'échanger les unes les autres, à des facteurs près, de sorte qu'en particulier leurs quotients sont des fonctions doublement périodiques, aux périodes 2 et 2τ.

Enfin, on remarque que les fonctions $\mathfrak{J}$ vérifient toutes les quatre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{J}(v \mid \tau)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \mathfrak{J}(v \mid \tau)}{\partial \tau}.$$

3. *Sur quelques fonctions du rapport des périodes. Formules diverses.* — Les valeurs des dérivées des fonctions $\mathfrak{J}$, lorsque l'on donne à v les valeurs $1, \frac{1}{2}, \tau, \frac{\tau}{2}, m + n\tau, \frac{1+\tau}{2}$, s'expriment aisément à l'aide des quatre constantes $\mathfrak{J}'_1(0)$, $\mathfrak{J}_2(0)$, $\mathfrak{J}_3(0)$, $\mathfrak{J}_4(0)$, qui peuvent remplacer q_0, q_1, q_2, q_3, et qui sont liées par les deux relations

$$\mathfrak{J}'_1(0) = \pi \mathfrak{J}_2(0)\mathfrak{J}_3(0)\mathfrak{J}_4(0),$$
$$\mathfrak{J}_3^4(0) = \mathfrak{J}_2^4(0) + \mathfrak{J}_4^4(0).$$

A l'aide des mêmes quantités et de $\frac{\pi}{2\omega_1}$ s'expriment sans difficulté $\sqrt[8]{\Delta}$ et les $\sqrt[4]{e_\alpha - e_\beta}$, ainsi que les e_α, g_2 et g_3.

MM. Tannery et Molk posent avec Jacobi

$$\sqrt{k} = \frac{\mathfrak{J}_2(0)}{\mathfrak{J}_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\mathfrak{J}_4(0)}{\mathfrak{J}_3(0)},$$

d'où

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

et avec M. Hermite

$$\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{q_1}{q_2}, \qquad \psi(\tau) = \sqrt[4]{k'} = \frac{q_3}{q_2}, \qquad \chi(\tau) = \sqrt[6]{2}\, q^{\frac{1}{24}} \frac{1}{q_2};$$

dans ces formules $\sqrt{2}$ et $\sqrt[6]{2}$ sont des quantités positives, et $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ sont des fonctions univoques de τ.

On a d'ailleurs les relations

$$\varphi^8(\tau) + \psi^8(\tau) = 1, \qquad \varphi(\tau)\psi(\tau) = \chi^3(\tau).$$

Enfin, à ces fonctions, MM. Tannery et Molk joignent celle que M. Dedekind a désignée par $\eta(\tau)$ et qu'ils représentent par $\mathfrak{h}(\tau)$,

$$\mathfrak{h}(\tau) = q^{\frac{1}{12}} q_0;$$

ils signalent aussi les fonctions $f(\tau)$, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ de M. Weber.

Toutes ces fonctions ne sont définies que pour des valeurs de τ représentées par des points situés au-dessus de l'axe des quantités réelles.

On peut aussi introduire les dérivées d'ordre supérieur des fonctions $\mathfrak{J}$ pour $v = 0$, et obtenir des résultats intéressants. En groupant convenablement les termes dans $\mathfrak{J}_3(v)$ et $\mathfrak{J}_4(v)$, on obtient tout de suite

$$2\mathfrak{J}_3(2v \mid 4\tau) = \mathfrak{J}_3(v \mid \tau) + \mathfrak{J}_4(v \mid \tau),$$
$$2\mathfrak{J}_2(2v \mid 4\tau) = \mathfrak{J}_3(v \mid \tau) - \mathfrak{J}_4(v \mid \tau),$$

et en posant

$$b = \sqrt{k(4\tau)},$$

on a, par suite,

$$b = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}.$$

Le paragraphe se termine par l'étude de la variation des fonctions $\mathfrak{J}$ pour les valeurs réelles de v, lorsque ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont des quantités réelles et positives.

4. *Transformation linéaire des fonctions* $\mathfrak{J}$. — MM. Tannery et Molk remplacent le couple primitif $2\omega_1$, $2\omega_3$ par le couple proprement équivalent $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, tel que

$$\Omega_1 = a\omega_1 - b\omega_3, \qquad \Omega_3 = c\omega_1 + d\omega_3,$$

a, b, c, d étant des entiers vérifiant la condition $ad - bc = 1$. On emploie de petites capitales pour désigner les quantités relatives aux nouvelles périodes (et l'on fera de même dans chaque problème de transformation), de sorte qu'en particulier

$$\text{V} = \frac{v}{a + b\tau}, \qquad \text{T} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad \text{Q} = e^{i\pi\text{T}}, \qquad \ldots.$$

En désignant par ε, ε', ε'', ε''' des racines huitièmes de l'unité,

dont les valeurs dépendent de a, b, c, d, on a les formules

$$\begin{aligned}
\varepsilon\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu v\pi i}\mathfrak{S}_1\ \ (v\mid\tau) &= \mathfrak{S}_1(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}),\\
\varepsilon'\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu v\pi i}\mathfrak{S}_{\lambda+1}(v\mid\tau) &= \mathfrak{S}_2(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}),\\
\varepsilon''\ \sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu v\pi i}\mathfrak{S}_{\mu+1}(v\mid\tau) &= \mathfrak{S}_3(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}),\\
\varepsilon'''\sqrt{a+b\tau}\, e^{b\nu v\pi i}\mathfrak{S}_{\nu+1}(v\mid\tau) &= \mathfrak{S}_4(\mathrm{v}\mid\mathrm{T}),
\end{aligned}$$

les nombres λ, μ, ν étant les nombres 1, 2, 3 rangés dans un certain ordre déterminé suivant les valeurs paires ou impaires de a, b, c, d, comme quand il s'agit de la transformation linéaire des fonctions σ; le radical $\sqrt{a+b\tau}$ a d'ailleurs une valeur arbitraire, une fois fixée.

En réalité, il ne s'agit vraiment que de la détermination du signe d'une racine carrée, car, dans chaque cas, les valeurs des radicaux $\sqrt{\mathrm{E}_\alpha - \mathrm{E}_\beta}$ sont déterminées sans ambiguïté, et les ε, ε', ε'', ε''' sont connus en même temps que les radicaux $\sqrt[4]{\mathrm{E}_\alpha - \mathrm{E}_\beta}$; enfin il suffit de déterminer ε, car ε', ε'', ε''' se déduisent sans difficulté de la connaissance de ε.

Le problème difficile de la détermination de ε en fonction explicite de a, b, c, d a été résolu pour la première fois par M. Hermite. Avant d'en donner la solution, les auteurs indiquent le moyen de déterminer effectivement ε, toutes les fois que les nombres a, b, c, d sont donnés, et, dans ce but, ils donnent les formules de transformation, faciles à obtenir directement, pour les deux substitutions propres

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui, par répétition et combinaison, engendrent toutes les autres : on exprime ainsi, à l'aide des $\mathfrak{S}_\alpha(v\mid\tau)$, les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(v\mid\tau+1)$ et les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$.

Ces formules permettent d'obtenir de nouveaux développements pour les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(v\mid\tau)$. Appliquées aussi à la valeur 0 de la variable, elles conduisent immédiatement aux formules de transformation pour les fonctions $h(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ lorsqu'on remplace τ par $\tau+1$ ou $-\frac{1}{\tau}$.

En posant

$$\varphi^2(\mathrm{T}) = \sqrt{k(\mathrm{T})} = \sqrt{l}, \qquad \psi^2(\mathrm{T}) = \sqrt{k'(\mathrm{T})} = \sqrt{l'},$$

les formules générales de transformation pour $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ s'obtiennent encore sans difficulté.

Les formules établies montrent que le quotient de deux fonctions symétriques entières, de même degré, des quantités $\mathfrak{I}_2^8(o\,|\,\tau)$, $\mathfrak{I}_3^8(o\,|\,\tau)$, $\mathfrak{I}_4^8(o\,|\,\tau)$ ne change pas quand on effectue sur τ une transformation linéaire quelconque ; un tel quotient s'exprime, par suite, en fonction rationnelle de l'invariant absolu $\mathrm{J}(\tau)$, pour lequel on a

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(\tau) &= \frac{1}{8}\,\frac{[\mathfrak{I}_2^8(o\,|\,\tau)+\mathfrak{I}_3^8(o\,|\,\tau)+\mathfrak{I}_4^8(o\,|\,\tau)]^3}{\mathfrak{I}_2^8(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{I}_3^8(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{I}_4^8(o\,|\,\tau)}\\ &= \frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2} = \frac{27\,g_2^3}{4(g_2^3-27\,g_3^2)}.\end{aligned}$$

5. *Généralités sur les transformations linéaires. Transformation linéaire des fonctions* $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$. — Remplacer τ par $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$, a, b, c, d étant définis comme précédemment, c'est effectuer une transformation linéaire, représentée par le symbole $\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$.

MM. Tannery et Molk établissent la notion de composition des transformations linéaires, en partant de l'équivalence des symboles

$$\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau},\ \frac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{c+d\,\dfrac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}}{a+b\,\dfrac{c'+d'\tau}{a'+b'\tau}}\right),$$

et généralisant.

Toute transformation linéaire peut être représentée par un symbole de la forme

$$\left(\ldots,\ \tau+n_1,\ -\frac{1}{\tau},\ \tau+n_2,\ -\frac{1}{\tau},\ \tau+n_3,\ -\frac{1}{\tau},\ \ldots\right),$$

n_1, n_2, n_3, ... étant des entiers positifs ou négatifs.

Les notions de groupe et de sous-groupes s'étendent d'elles-mêmes aux transformations linéaires.

Une fonction modulaire est une fonction univoque de τ appar-

tenant à un groupe ; il en est ainsi de toute fonction univoque de τ, qui ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs, quand on fait subir à τ une transformation linéaire quelconque.

Les auteurs déterminent d'abord les groupes auxquels appartiennent les fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ et $\chi(\tau)$; puis, en suivant l'analyse de M. Schläfli, les formules de transformation linéaire pour ces trois fonctions, dans chacun des six cas distincts qui peuvent se présenter, en fonction explicite des entiers a, b, c, d. On sait que ces formules sont dues à M. Hermite [1].

6. *Détermination, en fonction des coefficients de la transformation linéaire des fonctions* $\mathfrak{Z}$, *des racines huitièmes de l'unité qui figurent dans ces formules de transformation.* — Dans ce paragraphe, MM. Tannery et Molk résolvent le problème, posé précédemment, de la détermination de ε en fonction explicite des coefficients de la transformation. Ils se placent, avec M. Dedekind, au point de vue de la fonction $\mathfrak{h}(\tau)$, pour laquelle on a tout de suite

$$\mathfrak{h}(\mathrm{T}) = \varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{a+b\tau}\,\mathfrak{h}(\tau).$$

Si b est nul, on a $\mathrm{T} = \tau + c$, et, par suite,

$$\mathfrak{h}(\tau + c) = i^{\frac{c}{6}}\mathfrak{h}(\tau).$$

Supposant donc b non nul, $a + b\tau$ n'est jamais réel, et l'on peut définir $\sqrt{a+b\tau}$ comme une fonction univoque de τ ; il est préférable de donner cette définition pour $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$, en choisissant l'argument de $-(a+b\tau)^2$ entre $-\pi$ et π, et, par suite, celui de $\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}$ entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$; on a alors

$$\sqrt[4]{-(a+b\tau)^2} = \varepsilon^{\mp\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a+b\tau},$$

suivant que b est positif ou négatif.

---

(1) Il s'est glissé dans le n° 213, p. 87, une erreur de transcription qui se trouve reproduite dans le Tableau de formules, p. 266. Dans les formules $(\mathrm{XLVI})_2$, cas 2° et 3°, les lettres φ et ψ doivent être interverties dans les seconds membres ; ces formules, pour les mêmes cas, sont correctement établies et écrites dans le texte des n°s 211 et 212.

On arrive finalement, par une analyse assez longue, à la formule suivante,

$$\mathrm{h}(\mathrm{T}) = \left[\frac{a}{b}\right] e^{-\frac{\pi i}{12}[3(b-\operatorname{sgn} b)+ac(b^2-1)-b(a+d)]} \sqrt[4]{-(a+b\tau)^2}\, \mathrm{h}(\tau),$$

où sgn A désigne ± 1, suivant que A est positif ou négatif, et où le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$, généralisation du symbole arithmétique $\left(\frac{a}{b}\right)$ de Legendre et Jacobi, est défini par les propriétés suivantes :

a et b étant premiers entre eux, on a,

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{a}{-b}\right] = 1, \qquad \left[\frac{a+b}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] e^{\frac{\pi i}{12} b(b^2-1)(2c+d)},$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right] = e^{-\frac{\pi i}{4}[(a-1)(b-1)-(\operatorname{sgn} a-1)(\operatorname{sgn} b-1)]},$$

$$\left[\frac{1}{a}\right] = 1, \qquad \left[-\frac{1}{a}\right] = e^{\frac{\pi i}{2}(a-\operatorname{sgn} a)}, \qquad \left[\frac{2}{a}\right] = e^{\frac{\pi i}{8}(a^2-1)};$$

dans la dernière de ces formules, a est impair ; dans la seconde, c et d ne figurent qu'en apparence. Le symbole $\left[\frac{a}{b}\right]$ est toujours égal à l'un des quatre nombres ± 1, $\pm i$.

La formule obtenue pour $\mathrm{h}(\mathrm{T})$ donne immédiatement

$$\varepsilon = \left[\frac{a}{b}\right]^3 i^{\frac{ab+ac+bd+acb^2-3b}{2}},$$

et la question est résolue.

Les formules obtenues peuvent encore s'écrire de façon à ne contenir que le symbole de Legendre-Jacobi.

7. *Transformation quadratique des fonctions* $\mathfrak{Z}$. — En général, une transformation où les entiers a, b, c, d sont tels que le déterminant $ad - bc$ soit égal à un entier positif n est dite d'ordre n.

Pour obtenir tout ce qui concerne les transformations dont l'ordre est 2 ou une puissance de 2, il suffit d'étudier les transformations de Landen et de Gauss. Dans la première, on change v en $2v$, et τ en 2τ ; dans la seconde, on change simplement τ en $\frac{\tau}{2}$.

Les formules s'obtiennent aisément ; appliquées aux fonctions

modulaires, elles montrent le rôle prépondérant de la fonction $h(\tau)$; enfin, la combinaison des deux transformations conduit à l'expression des fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(2v)$ à l'aide des fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(v)$.

8. *Transformation d'ordre impair des fonctions* $\mathfrak{S}$. — Tout se ramène à changer soit v en nv et τ en $n\tau$, soit simplement à changer τ en $\frac{\tau}{n}$, n désignant l'ordre impair de la transformation. Tous les cas possibles résultent ensuite de la combinaison de l'ensemble des formules obtenues pour les transformations linéaires et quadratiques.

En partant, soit des formules relatives à la transformation des fonctions σ, soit des formules qui donnent les fonctions $\mathfrak{S}$ décomposées en facteurs, on obtient des expressions telles que celles-ci :

$$\mathfrak{S}_1(nv \mid n\tau) = (-1)^{\frac{n-1}{2}-\sum\limits_{(r)} r}\,\frac{Q_0}{q_0^n}\,\mathfrak{S}_1(v)\prod_{(r)}\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{r}{n}\right)$$

$$= \frac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{A_1}\mathfrak{S}_1(v)\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}(v) - \frac{\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],$$

$$\mathfrak{S}_1\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{n}\right) = b_1^{2v\pi i\sum\limits_{(r)}\frac{r}{n}}\,\mathfrak{S}_1(v)\prod_{(r)}\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{r\tau}{n}\right)$$

$$= \frac{a_1 a_{\alpha+1}^{n-1}}{A'_1}\mathfrak{S}_1(v)\prod_{(r)}\left[\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}(v) - \frac{\mathfrak{S}^2_{\alpha+1}\left(\frac{r\tau}{n}\right)}{\mathfrak{S}^2_1\left(\frac{r\tau}{n}\right)}\mathfrak{S}^2_1(v)\right],$$

les quantités $a_{\alpha+1}$, a_1, b_1, A_1, A'_1 désignant des constantes convenablement choisies, et r parcourant, suivant les cas, $n-1$ ou $\frac{n-1}{2}$ valeurs assujetties à de certaines conditions.

Les fonctions modulaires se transforment aussi aisément. Enfin, la combinaison des deux systèmes de formules permet d'exprimer les fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(nv)$ à l'aide des fonctions $\mathfrak{S}_\alpha(v)$, par des formules telles que celle-ci :

$$A\,\mathfrak{S}_1(nv) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\mu,\nu}\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{\mu}{n}+\frac{\nu\tau}{n}\right).$$

où $\mathcal{A}$ désigne une constante, et où μ, ν parcourent n valeurs convenablement choisies.

Finalement, on voit que les fonctions $\mathfrak{S}(v \mid \tau)$, à part un facteur exponentiel facile à calculer, sont des polynomes homogènes de degré $ad - bc$ par rapport aux fonctions $\mathfrak{S}(v, \tau)$. Les expressions de ces polynomes dépendent des nombres λ et μ tels que $ad - bc = \lambda\mu$, ayant même plus grand commun diviseur que les nombres a, b, c, d.

9. *Sur un théorème de M. Hermite. Relations entre les fonctions $\mathfrak{S}$. Théorèmes d'addition.* — M. Hermite a fait voir que la fonction $\Phi(u)$ définie par l'égalité

$$\Phi(u) = \sum_n \mathrm{A}_n q^{\frac{n^2}{h}} e^{2ni\pi v},$$

où les A_n sont des constantes se reproduisant périodiquement de h en h, est la fonction transcendante entière la plus générale jouissant des deux propriétés

$$\Phi(u + 2\omega_1) = \Phi(u), \qquad \Phi(u + 2\omega_3) = e^{-\frac{h\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}\Phi(u).$$

Si l'on écrit

$$\Phi(u) = \mathrm{A}_0\Phi_0 + \mathrm{A}_1\Phi_1 + \ldots + \mathrm{A}_{h-1}\Phi_{h-1},$$

on voit que l'on a

$$\Phi_0(u) = \mathfrak{S}_3(hv \mid h\tau),$$
$$\Phi_r(u) = q^{\frac{r^2}{h}} e^{2rv\pi i}\,\mathfrak{S}_3(hv + r\tau \mid h\tau).$$

Les carrés des fonctions $\mathfrak{S}\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$ sont des fonctions $\Phi(u)$ pour $h = 2$; ce sont donc des fonctions linéaires de $\Phi_0(u)$ et $\Phi_1(u)$, et, par suite, on trouve aisément les relations

$$\mathfrak{S}_2^2(v) = -k'\,\mathfrak{S}_1^2(v) + k\,\mathfrak{S}_3^2(v),$$
$$\mathfrak{S}_4^2(v) = k\,\mathfrak{S}_1^2(v) - k'\,\mathfrak{S}_3^2(v),$$

qui ne sont pas distinctes, au fond, des relations connues

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u = (e_\beta - e_\alpha)\sigma^2 u.$$

De même, on exprime les produits $\mathfrak{S}_\alpha(v + c)\,\mathfrak{S}_\alpha(v - c)$, où c

est une constante, à l'aide des carrés de deux fonctions $\mathfrak{S}$; une voie analogue conduit sans peine aux expressions des produits $\mathfrak{S}_\alpha(v+c)\mathfrak{S}_\beta(v-c)$ en fonction des produits $\mathfrak{S}_\lambda(c)\mathfrak{S}_\mu(v)$. Plus généralement, on a l'identité

$$\sum \mathfrak{S}_1(v+a)\mathfrak{S}_1(v-a)\mathfrak{S}_1(b+c)\mathfrak{S}_1(b-c)=0,$$

la sommation étant étendue aux permutations circulaires des lettres a, b, c, et l'on en déduit les identités de Jacobi, que les auteurs établissent encore en partant d'une belle formule de Schröter.

CHAPITRE IV. — Les quotients des fonctions σ et des fonctions $\mathfrak{S}$.

1. *Les fonctions* ξ. — MM. Tannery et Molk posent

$$\xi_{\alpha 0}\, u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_\alpha},$$

$$\xi_{0\alpha}\, u = \frac{\sigma u}{\sigma_\alpha u} = \frac{1}{\sqrt{pu - e_\alpha}},$$

$$\xi_{\beta\gamma}\, u = \frac{\sigma_\beta u}{\sigma_\gamma u} = \frac{\sqrt{pu - e_\beta}}{\sqrt{pu - e_\gamma}}.$$

Les douze fonctions ξ sont des fonctions univoques de u, les unes paires, les autres impaires, n'ayant d'autres singularités que des pôles : leurs zéros et leurs pôles, tous simples, sont en évidence.

Les fonctions ξ, fonctions algébriques de pu, sont liées par des relations algébriques faciles à déterminer ; on voit de même, sans difficulté, ce qu'elles deviennent quand l'argument u augmente de $2\omega_\alpha$ ou de ω_α : en particulier, on constate que leurs carrés sont des fonctions doublement périodiques admettant $2\omega_1$, $2\omega_3$ comme couple de périodes primitives.

Les fonctions ξ vérifient des équations différentielles que l'on obtient aisément en partant de la relation qui lie pu et $p'u$; de ces équations résultent d'intéressantes formules.

Les fonctions ξ de $u+a$ s'expriment rationnellement au moyen des fonctions ξ de u et de a ; on arrive ainsi aux formules fondamentales d'addition pour les fonctions ξ.

En terminant ce paragraphe, MM. Tannery et Molk étudient le cas spécial où ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont des quantités réelles et positives, puis montrent qu'en désignant par φ une fonction homogène de ω_1 et ω_3, de degré -1, les fonctions

$$\varphi\,\xi_{0\alpha}\left(\frac{u}{\varphi}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right), \quad \xi_{\beta\gamma}\left(\frac{u}{\varphi}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right)$$

ne dépendent que de l'argument u et du rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$.

2. *Les fonctions* sn, cn, dn. — En supposant positive la partie réelle du rapport $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$, les auteurs posent

$$\operatorname{sn}(u,k) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\xi_{03}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

$$\operatorname{cn}(u,k) = \xi_{13}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right),$$

$$\operatorname{dn}(u,k) = \xi_{23}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,\middle|\,\omega_1, \omega_3\right);$$

les fonctions $\operatorname{sn}(u,k)$, $\operatorname{cn}(u,k)$, $\operatorname{dn}(u,k)$ ou simplement $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ ne dépendent que de u et de τ, ou si l'on veut de u et de k.

On a, entre autres formules,

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad \operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \qquad \operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sn}'^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right)},$$

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \qquad \operatorname{cn} 0 = 1, \qquad \operatorname{dn} 0 = 1,$$

$$\operatorname{sn}' 0 = 1, \qquad \operatorname{cn}' 0 = 0, \qquad \operatorname{dn}' 0 = 0.$$

Avec Jacobi, on a encore

$$K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau),$$

$$K' = \frac{\omega_3}{i}\sqrt{e_1 - e_3} = -\frac{\tau\pi i}{2}\,\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau),$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

et si ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont réels et positifs, de sorte que k^2 est positif et inférieur à l'unité, il vient

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

les radicaux étant positifs.

Les fonctions sn u, cn u, dn u s'expriment aisément, à l'aide des fonctions $\mathfrak{I}$, par les formules

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathfrak{I}_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{I}_4\left(\frac{u}{2K}\right)}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\mathfrak{I}_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{I}_4\left(\frac{u}{2K}\right)}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\mathfrak{I}_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\mathfrak{I}_4\left(\frac{u}{2K}\right)}.$$

Ces formules mettent en évidence les zéros et les pôles des nouvelles fonctions, et montrent ce qu'elles deviennent quand l'argument augmente d'une somme de multiples de K et iK' ; en particulier, on voit que les fonctions sn u, cn u, dn u sont des fonctions doublement périodiques admettant respectivement comme périodes primitives les nombres $4K$, $2iK'$; $4K$, $2K+2iK'$; $2K$, $4iK'$.

Les formules d'addition bien connues pour les fonctions sn, cn, dn résultent immédiatement des formules établies pour les fonctions ξ ; on en déduit aisément la résolution des équations $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} \alpha$, $\operatorname{cn} x = \operatorname{cn} \alpha$, $\operatorname{dn} x = \operatorname{dn} \alpha$.

Après avoir étudié la variation des nouvelles fonctions lorsque k^2 est positif et inférieur à l'unité, MM. Tannery et Molk définissent encore d'autres fonctions analogues et signalent leurs propriétés principales : c'est d'abord la fonction elliptique El des deux variables v et τ,

$$\operatorname{El}(v, \tau) = \frac{\mathfrak{I}_1(2v \mid 2\tau)}{\mathfrak{I}_4(2v \mid 2\tau)},$$

considérée par Kronecker ; puis ce sont les fonctions de Jacobi et de M. Hermite :

$$H(x) = \mathfrak{I}_1\left(\frac{x}{2K}\right), \qquad \Theta(x) = \mathfrak{I}_4\left(\frac{x}{2K}\right), \qquad H_1(x) = \mathfrak{I}_2\left(\frac{x}{2K}\right),$$

$$\Theta_1(x) = \mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2K}\right), \qquad Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Les fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ de M. Hermite sont celles que les auteurs désignent par $\operatorname{sn}(x\sqrt{e_1-e_3})$, $\operatorname{cn}(x\sqrt{e_1-e_3})$, $\operatorname{dn}(x\sqrt{e_1-e_3})$; les fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ de Briot et Bouquet ont la même signification.

3. *Transformation linéaire des fonctions elliptiques.* — Si l'on remplace le couple $2\omega_1$, $2\omega_3$ par un nouveau couple proprement équivalent, $2\Omega_1$ $2\Omega_3$, les douze fonctions ξ ne font que s'échanger les unes les autres ou même se conserver.

Si k et k', K et K' deviennent respectivement l, l', L, L', les formules de transformation relatives à ces quantités et aux fonctions sn, cn, dn s'obtiennent aisément dans chacun des six cas possibles ; on a, par exemple, pour $a\equiv b\equiv c\equiv 1$, $d\equiv 0 \pmod 2$,

$$\operatorname{sn}(u,l)=ik'\frac{\operatorname{sn}\dfrac{u}{ik'}}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{ik'}},\qquad \operatorname{cn}(u,l)=\frac{\operatorname{dn}\dfrac{u}{ik'}}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{ik'}},\qquad \operatorname{dn}(u,l)=\frac{1}{\operatorname{cn}\dfrac{u}{ik'}};$$

$$l=(-1)^{\frac{cd}{2}}\frac{1}{k'},\qquad l'=(-1)^{\frac{ab}{2}}\frac{k}{k'},\qquad \ldots.$$

4. *Transformation quadratique des fonctions elliptiques.* — Tout revient aux transformations de Landen et de Gauss, dans lesquelles on remplace ω_1 ou ω_3 par $\frac{\omega_1}{2}$ ou $\frac{\omega_3}{2}$.

Pour la transformation de Landen, on a, entre autres formules,

$$\sqrt{l}=\frac{k}{1+k'},\qquad \operatorname{sn}(u,l)=(1+k')\frac{\operatorname{sn}\dfrac{u}{1+k'}\operatorname{cn}\dfrac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}},$$

$$\operatorname{cn}(u,l)=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}},\qquad \operatorname{dn}(u,l)=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k'}}{\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k'}},$$

l désignant ce que devient k.

Pour la transformation de Gauss, on a de même, en appelant λ

ce que devient k,

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{2}\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}},$$

$$\operatorname{sn}(u,\lambda) = (1+k)\frac{\operatorname{sn}\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}},$$

$$\operatorname{cn}(u,\lambda) = \frac{\operatorname{cn}\dfrac{u}{1+k}\operatorname{dn}\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}},$$

$$\operatorname{dn}(u,\lambda) = \frac{1-k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}{1+k\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{1+k}}.$$

Les formules de transformation quadratique des fonctions $\mathfrak{S}$, d'où résultent les formules précédentes, permettent aussi, comme l'a montré M. Hermite, d'obtenir d'importants développements pour les fonctions sn, cn, dn ; on a, par exemple,

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\varphi(\tau)}\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\frac{\sum\limits_{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu(2\nu+1)}\sin(4\nu+1)\dfrac{\pi u}{2K}}{\sum\limits_{\nu}(-1)^{\nu}q^{2\nu^2}\cos 2\nu\dfrac{\pi u}{2K}}$$

$$= \frac{1}{\varphi^3(\tau)}\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{8}}\frac{\sum\limits_{\nu}q^{4\nu(2\nu+1)}\sin(4\nu+1)\dfrac{\pi u}{K}}{\sum\limits_{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu(2\nu+1)}\cos(4\nu+1)\dfrac{\pi u}{2K}};$$

les formules analogues pour $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ permettent de déduire, en particulier, de nouveaux développements pour les fonctions modulaires $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{k^3}$, $\sqrt[4]{k'^3}$.

La combinaison des transformations de Landen et de Gauss donne les formules relatives à $\operatorname{sn}(2u)$, $\operatorname{cn}(2u)$, $\operatorname{dn}(2u)$; on en déduit aussi les expressions de $\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}$, $\operatorname{cn}^2\frac{u}{2}$, $\operatorname{dn}^2\frac{u}{2}$, et pour $u = K$, $u = iK'$, $u = K + iK'$, on a des résultats intéressants.

5. *Transformation d'ordre n des fonctions elliptiques.* — Tout revient, comme précédemment, à diviser l'une des demi-périodes par un nombre impair n. Pour abréger, on pose

$$a_{r,r'} = \frac{2rK + 2r'K'i}{n},$$

r et r' étant deux entiers quelconques.

Quand on remplace ω_1 par $\frac{\omega_1}{n}$, on a

$$l = k^n \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}}, \qquad l' = k'^n \prod_{(r)} \frac{1}{\mathrm{dn}^2 a_{r,0}},$$

r parcourant $n-1$ valeurs convenablement choisies; puis

$$\mathrm{M} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_3}} = \prod_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{cn}^2 a_{r,0}}{\mathrm{sn}^2 a_{r,0}\,\mathrm{dn}^2 a_{r,0}},$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{1}{\mathrm{M}}\,\mathrm{sn}\,u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{sn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{sn}\,a_{r,0}},$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{cn}\,u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{cn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{cn}\,a_{r,0}},$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{\mathrm{M}}, l\right) = \mathrm{dn}\,u \prod_{(r)} \frac{\mathrm{dn}(u + a_{r,0})}{\mathrm{dn}\,a_{r,0}}.$$

Ces formules peuvent ensuite se transformer de bien des façons.

Des formules analogues ont lieu pour la division de ω_3 par n. La combinaison des deux systèmes de formules conduit sans peine à la solution du problème de la multiplication de l'argument par n.

Si l'on admet que la quantité $p\left(r\frac{\omega_1}{n}\right)$, où r est un entier, est une fonction algébrique de e_1, e_2, e_3, on voit tout de suite qu'il existe une équation algébrique entre l et k, et aussi une équation algébrique entre M et k ; ces équations sont respectivement l'équation modulaire et l'équation au multiplicateur. Les mêmes faits subsistent quand il s'agit de la division de ω_3 par n.

En terminant, MM. Tannery et Molk montrent que les formules obtenues permettent de former $n+1$ solutions rationnelles de

l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

l et M étant des fonctions algébriques convenables de k.

H. Andoyer.

RITTER (Frédéric). — François Viète, Notice sur sa vie et son œuvre. 102 pages in-8°. Paris, Dépôt de la *Revue occidentale*, 1895.

Frédéric Ritter, mort en 1893, avait consacré les loisirs de sa carrière d'ingénieur des Ponts et Chaussées à traduire Viète, à le commenter, et à recueillir des documents sur la vie du créateur de l'Algèbre moderne. Il a pu achever le travail qu'il avait entrepris, mais il n'en a publié que la traduction de l'*Isagoge* et des *Notæ priores,* dans le *Bulletin Boncompagni*, en 1868. C'est au même recueil qu'il avait destiné la *Notice* insérée, deux ans après sa mort, dans la *Revue occidentale,* par les soins de son beau-frère, M. Ch. Ritter (1).

Résumé succinct des résultats obtenus à la suite de longues et patientes recherches, cette Notice ne donne pas seulement une sérieuse analyse de toutes les œuvres de Viète réunies dans l'édition de Schooten (Elzévirs, 1646); elle a une grande importance par les détails qu'elle présente sur la vie du célèbre mathématicien, sur la bibliographie de ses œuvres et surtout sur le *Canon mathematicus,* ouvrage assez rare pour qu'aucun des historiens qui en ont parlé ne semble l'avoir fait *de visu.*

La vie de Viète était en réalité très mal connue, lorsque Ritter a commencé à s'en occuper. Dans son *Dictionnaire des Mathé-*

---

(1) La date de la rédaction (1888) explique les dernières lignes (page 98), dans lesquelles l'auteur déclare n'avoir pu obtenir aucun renseignement sur les pièces inédites de Viète volées par Libri à l'Institut (?) et aujourd'hui rentrées à la Bibliothèque Nationale. Ces pièces sont réunies dans le manuscrit latin nouv. acq. 1643 et j'espère pouvoir les publier; je ferai toutefois remarquer que, contrairement aux assertions de Libri, elles ne sont nullement autographes; je doute même qu'elles soient réellement de Viète et non d'un de ses continuateurs.

matiques, Montferrier, en 1845, déclarait avec raison qu'on n'en savait pour ainsi dire rien. Les autres historiens ne se sont pas fait faute, en général, d'accueillir des légendes sans contrôle ou des hypothèses gratuitement forgées pour combler les lacunes entre les rares documents que l'on possédait. Le travail de M. Ritter permet de faire justice de toutes ces erreurs, et il est parvenu à constituer une biographie complète et appuyée sur des preuves irrécusables.

Je voudrais seulement, sans reprendre le récit qu'on trouvera dans la Notice de M. Ritter, insister sur quelques points essentiels. Viète a été, presque toute sa vie, extrêmement occupé d'affaires publiques et privées; il prenait sur ses nuits pour ses recherches mathématiques et, en fait, il s'est tué de travail. Il n'a eu que deux périodes de loisirs relatifs, l'une de 1564 à 1568, pendant laquelle, ayant quitté à vingt-quatre ans le barreau de Fontenay pour le service de la maison de Soubise, dans l'intervalle d'autres travaux de toute sorte (1), il dirige l'éducation de l'héritière, Catherine de Parthenay, à laquelle il devait plus tard, en 1591, dédier son *Ars analytica;* la seconde période correspond à une disgrâce, de la fin de 1584 au mois d'avril 1589, pendant laquelle, sous l'influence des Guise, il fut suspendu de ses fonctions de maître des requêtes de l'Hôtel et membre du conseil privé, auxquelles il avait été appelé en 1580.

C'est pendant la première de ces périodes qu'il conçoit le plan de son *Harmonicon cœleste* et commence à composer son *Canon mathematicus;* c'est pendant la seconde qu'il arrête les grandes lignes de son *Ars analytica*. L'impression du *Canon* commença en 1571, mais ne fut terminée qu'en 1579; il est d'ailleurs faux que dès 1571 Viète ait commencé à faire imprimer à ses frais et

(1) Il eut tout d'abord, pour défendre le chef de la maison, Jean de Parthenay, sieur de Soubise, à rédiger un *Discours des choses advenues à Lyon pendant que M. de Soubise y commandait,* c'est-à-dire lors du siège de 1562-1563. Ce *Discours* a été inséré par Théodore de Bèze dans son *Histoire ecclésiastique des Églises réformées*. Viète écrivit également alors des *Mémoires de la vie de Jean de Parthenay* (édités en 1879 dans le *Bulletin de la Société de l'histoire du protestantisme français*) et une *Généalogie de la maison de Parthenay-Lusignan,* restée manuscrite. Des cahiers de leçons qu'il avait rédigés pour son élève, il subsiste des *Principes de cosmographie*, imprimés en 1637 et réédités en 1643, 1647 et 1661.

à répandre des écrits mathématiques qui se seraient perdus. Tout ce qu'il a publié de son vivant subsiste; ce sont les manuscrits qu'il a laissés qui ont été perdus en partie, quoique des copies aient dû en circuler dès son vivant, en particulier pour les livres de *Réponses variées à des questions mathématiques,* qui ont évidemment été formés de pièces réellement adressées à diverses personnes. Viète a publié en 1593 le huitième de ces livres; les sept premiers sont perdus et on ignore même de fait à quelle époque remontaient les premières pièces. Mais il est clair que ce n'est qu'à partir du commencement de 1571 que Viète, établi momentanément à Paris comme avocat au parlement, se trouva pour la première fois dans un milieu où il put essayer de se poser comme mathématicien (¹).

Sa fortune, qui ne fut jamais considérable, quoi qu'on en ait dit, ne lui aurait guère permis au reste les dépenses d'impressions que l'on a supposées. Le bruit, rapporté par Pierre de l'Estoile, qu'il serait mort avec 20000 écus au chevet de son lit, s'explique très simplement parce que Henri IV, lorsque Viète demanda à quitter ses fonctions, voulut lui donner une gratification qui fut apportée au lit de mort du mathématicien; mais il n'a jamais été un thésauriseur.

Un des traits remarquables de la vie de Viète, c'est l'affection que lui ont témoignée deux grandes dames; l'une est son ancienne élève, qui, mariée en 1568 à un baron de Quellenec tué à la Saint-Barthélemy, épousa en secondes noces René de Rohan et le perdit en 1585; elle s'était retirée avec ses enfants au parc de Soubise, dans le bocage vendéen. La seconde, des domaines de laquelle Viète date sa dédicace de 1591 à Catherine de Parthenay, était la sœur de René de Rohan, la duchesse Françoise, qui, après avoir épousé clandestinement en 1557 le duc de Nemours, soutint un long procès contre lui pour le forcer à reconnaître la légitimité de

(¹) De 1568 à 1571, Viète avait suivi comme secrétaire à la Rochelle Mme de Soubise qui, devenue veuve en 1567, s'y retira après le mariage de sa fille. Il se trouva ainsi en relations avec les sommités du parti protestant, mais il n'est nullement prouvé qu'il ait jamais abjuré le catholicisme pour y revenir ensuite. La vérité est qu'il resta toujours indifférent en matière religieuse et que ses rares capacités de légiste furent employées par les Soubise et les Rohan.

ce mariage. L'affaire se termina en 1580 par une transaction, à la suite de laquelle le mariage fut considéré comme rompu par divorce; le roi Henri III créa en même temps le duché de Loudunois en faveur de Françoise de Rohan ([1]) et récompensa la part que Viète avait prise aux négociations en se l'attachant officiellement. Mais, dès 1576, quoique le grand mathématicien fût, depuis 1573, conseiller au parlement de Rennes, Henri III l'avait à plusieurs reprises dispensé de service, pour le charger de missions spéciales ou de travaux auprès de lui. Ce ne furent donc nullement des difficultés tenant aux questions religieuses qui empêchèrent Viète de siéger régulièrement à Rennes, ni la recommandation du chef protestant René de Rohan qui le fit nommer maître des requêtes. Viète n'était pas homme à se rendre impossible quelque part pour des motifs d'ordre religieux, et Henri III avait su le distinguer de lui-même pour ses capacités administratives ([2]).

C'est tantôt auprès de Catherine de Parthenay, tantôt auprès de Françoise de Rohan, tantôt dans sa propriété de la Bigotière à Mervent, près de Fontenay-le-Comte, que Viète passa le temps de sa disgrâce, comme il y passait auparavant les moments de vacance qu'il pouvait prendre. S'il devait sans doute rendre, comme conseil, des services sérieux à ses deux amies, l'affection qu'elles lui témoignèrent prouve au moins qu'il était personnellement homme de relations agréables.

J'arrive au *Canon mathematicus,* qui est en réalité une table des six lignes trigonométriques, calculées de minute en minute pour le rayon 100 000 (parfois avec une ou deux décimales en sus de la partie entière). Ce fut la première Table complète de ce genre; elle était d'autre part accompagnée de formules pour la résolution des triangles plans ou sphériques.

La rareté de cet ouvrage s'explique suffisamment par le succès des Tables postérieures de l'*Opus palatinum* de 1596, et du *The-*

([1]) Celle-ci, qui possédait de son chef la presque totalité du marais vendéen en face de Noirmoutier, y maintenait la neutralité religieuse et était dans les meilleurs termes avec le roi.

([2]) L'hostilité du parti ligueur, qui amena la disgrâce de Viète, visait le conseiller politique. Henri III le reprit auprès de lui dès qu'il rompit avec les Guise, et Henri IV le maintint dans les mêmes fonctions. Viète ne semble nullement, au contraire, avoir fait partie du parlement royaliste réuni à Tours.

saurus mathematicus de Pitiscus (1613), puis par l'introduction des logarithmes. La légende veut qu'elle ait été amenée par la destruction systématique de tous les exemplaires qu'aurait pu recouvrer Viète, mécontent de fautes d'impression qui auraient déparé son travail. D'après M. Ritter, l'impression serait au contraire très correcte, et la légende ne reposerait que sur le dire de l'éditeur de 1646, qui, pour se dispenser d'une réimpression, alors inutile de fait, a allégué qu'il y aurait eu à refaire tous les calculs. Si Viète parle d'ailleurs en 1595 du *Canon* comme *infeliciter editus,* il fait probablement allusion surtout, à mon sens, à un insuccès de librairie; M. Ritter remarque aussi, à juste titre, que l'auteur devait regretter les dénominations incommodes qu'il avait autrefois adoptées pour les lignes trigonométriques, peut-être aussi la multiplicité des formules, qu'il réduisit dans son *Liber octavus* de 1593, où intervient pour la première fois la considération du triangle polaire (*inversum per enallagen,* πλευρογωνικήν), et où il introduit sa nouvelle nomenclature.

Dans le *Canon*, il disait, comme Rhœticus, *fécond de l'angle aigu* au lieu de tangente (¹), *hypoténuse du fécond* au lieu de sécante, *hypoténuse du reste* et *fécond du reste* pour cotangente et cosécante. Il a dit plus tard *prosinus* pour tangente, *transsinuosa* pour sécante; les lignes des angles complémentaires n'ont pas d'ailleurs chez lui de nom particulier; seulement, dans les notations, la lettre désignant l'angle est marquée d'une barre.

Je crois inutile de m'étendre sur les autres écrits imprimés de Viète, qui ont été suffisamment étudiés par les divers historiens. Quant à l'*Harmonicon cœleste,* M. Ritter ne nous apprend rien de nouveau; son assertion qu'il aurait certainement existé deux manuscrits complets de cet ouvrage me semble même assez douteuse; car, celui qui a appartenu à Pierre Dupuis est passé entre les mains de Boulliau, qui le céda au prince Léopold de Médicis; il existe toujours à la Magliabecchiana de Florence, en même temps qu'une copie au net (le second manuscrit auquel fait allusion M. Ritter

(¹) Les termes de *tangente* et de *sécante* apparaissent pour la première fois dans la *Geometria rotundi* de Thomas Finck (1583); c'est la table de Pitiscus qui les mit en vogue; les termes de cosinus, etc. sont dus à Gunter, le calculateur des premières tables logarithmiques (1620).

et qui n'est pas perdu davantage). Mais s'il faut s'en fier à Libri, les manuscrits de Florence seraient incomplets; rien ne prouve donc que Viète ait jamais achevé son œuvre. Quant au fragment concernant le même ouvrage, et dont Elzévir fait mention dans sa préface de 1646, ce doit être très probablement celui qui existe à la Nationale, latin 7274 (ancien *Colbertinus*).

L'Algèbre de Viète fut propagée, en dehors de ses écrits, par les disciples qu'il forma directement et aussi par d'assez nombreuses traductions ou paraphrases qui parurent en français dans la première moitié du dix-septième siècle (Vasset, 1636; Vaulezard, 1630; Jacques Hume, 1636; Duret, 1644). Aujourd'hui son œuvre latine est malheureusement illisible pour un mathématicien; la terminologie, très compliquée, exige un travail d'assimilation excessivement pénible; on ne comprend guère, à première vue, que les formules, relativement faciles à transcrire avec les notations modernes; mais l'enchaînement des idées et leur portée véritable échappent presque complètement. La publication complète du travail de Ritter sur Viète peut donc offrir de l'intérêt, au moins pour ceux qui désirent approfondir les débuts historiques de l'Algèbre. Je remarquerai toutefois qu'il pourrait y avoir besoin de revoir attentivement ce travail, car je ne m'explique pas, par exemple, que dans la Notice, on ait imprimé couramment *synchrèse* comme traduction du terme *syncrisis*.

En tout cas Ritter a travaillé, ce qui était important, sur les éditions originales et non sur celle de 1646. Cependant en ce qui concerne les notations réelles de Viète, on aurait tort de se fier à une édition quelconque, car les imprimeurs, pour ménager la place, ont singulièrement modifié la forme des équations, si l'on en juge par les manuscrits qui subsistent.

Ainsi l'équation

$$e^3 - 3be^2 + (3b^2 - d^2)e = b^3 - bd^2 - z^3,$$

qu'Elzévir (p. 98) a imprimée sous la forme :

« E cubus — B in E quad. 3 + $\overline{\text{B quad. 3 — D plano}}$ in E
æquabitur B cubo — D plano in E — Z solido. »

apparaît page 13 v. du MS. lat. nouv, acq. 1644 (copie ancienne)

sous la forme

$$\left.\begin{array}{l}\text{« E cubus}\\ -\text{ B in E quadratum ter}\\ \left.\begin{array}{l}+\text{ B quadrato ter}\\ -\text{ D plano}\end{array}\right\}\text{ in E}\end{array}\right\}\text{ æquabitur }\left\{\begin{array}{l}\text{B cubo}\\ -\text{ D plano in E}\\ -\text{ Z solido. »}\end{array}\right.$$

Dans les notes marginales, la même forme apparaît, mais les mots indiquant les puissances sont réduits à leurs initiales; l'égalité n'est marquée que par une barre verticale séparant les deux membres de l'équation.

Avec ce système, on comprend que, dans le manuscrit, il faille une page pour l'équation de la dernière proposition du traité *De emendatione,* qui donne la composition des coefficients de l'équation du cinquième degré en fonction des racines; mais on ne peut nier qu'en thèse générale les équations ne soient plus claires qu'avec la mise de tous les termes sur une même ligne.

Je note encore, pour la formule dite *de Cardan,* sur l'équation

$$a^3 - 3b^2a = 2z^3,$$

$$\begin{array}{l}\text{« LV}c\text{Z solidi} + \text{L}\left\{\begin{array}{l}\text{Z solido solidi}\\ -\text{ B plano plano plano}\end{array}\right.\\ +\text{ LV}c\text{Z solidi} - \text{L}\left\{\begin{array}{l}\text{Z solido solidi}\\ -\text{ B plano plano plano}\end{array}\right.\\ \qquad\text{est A de qua quæritur. »}\end{array}$$

On voit que le signe pour racine est L (*latus*). LV s'interprète *latus universale,* et marque que l'extraction porte sur l'ensemble de ce qui suit sur la même ligne. Le *c* après le V signifie que la racine est cubique. La lettre L est d'ailleurs figurée comme un angle aigu, de même que le signe V; mais la branche inférieure est nettement horizontale.

J'ajoute un dernier mot. Nous avons pris l'habitude d'écrire Viète; il peut être utile de remarquer qu'au seizième siècle et au dix-septième, l'acent phonétique dans le corps des mots n'était nullement en usage; l'on écrivait Viete ou Viette. La première forme est celle qu'avait adoptée le grand mathématicien, mais c'est une forme savante (comme *diete* de *diæta*); l'orthographe conforme au bon usage du temps est sans contredit Viette, nom

assez fréquent encore aujourd'hui en France et que conservent au reste des descendants d'un frère du mathématicien.

PAUL TANNERY.

OVIDIO (E. D'). — GEOMETRIA ANALITICA. Un vol. in-8°, XVI-443 p. Torino, Bocca frères, 1896.

Tant qu'il y aura des gens qui s'intéresseront à la meilleure manière d'enseigner, on discutera pour savoir s'il vaut mieux s'élever du particulier au général, ou s'il vaut mieux introduire, dès qu'on le peut, des vérités générales pour en tirer la foule des propositions particulières qu'elles contiennent. Cela dépend du maître et des élèves, et la première méthode est bonne si le maître sait vraiment montrer le général dans le particulier, comme aussi la seconde, si le maître sait faire descendre à temps les idées générales et les incarner pour ainsi dire dans le concret ; mais, à coup sûr, les vérités particulières sont stériles quand elles sont bornées à elles-mêmes, quand on n'en voit ni le lien, ni l'unité et aussi les idées générales, quand on s'y complaît uniquement, comme dans une sorte de rêve philosophique, et qu'on est incapable de les préciser dans les applications particulières qu'elles contiennent en puissance.

Ce dernier danger n'est pas à craindre pour ceux qui voudront étudier la *Géométrie analytique* de M. d'Ovidio, tant l'auteur a eu soin de multiplier, aux bons endroits, les exemples et les exercices, de montrer à quoi servent les méthodes et comment on les applique. On serait mal venu, dès lors, à lui reprocher d'avoir voulu mettre un peu plus d'ordre que n'ont fait ses devanciers dans un livre qui entend rester élémentaire et où il est vrai qu'en peut apprendre la Géométrie analytique.

C'est la notion des *formes fondamentales*, d'après Steiner, qui a fourni à l'auteur ses divisions essentielles ; il étudiera d'abord les *formes de première espèce :* droite comme lieu de points, faisceau de droites dans un plan, faisceau de plans. Pour toutes ces formes, un élément est fixé par une seule coordonnée. Le premier Chapitre lui donne l'occasion de traiter du rapport anharmonique, des ponctuelles homographiques, de l'involution ; dans

le second Chapitre, il résumera en quelques pages ce qu'il y a d'essentiel dans la Géométrie plane, et il n'introduira les coordonnées proprement dites que lorsqu'il sera parvenu aux formes de seconde espèce et, en particulier, au plan comme lieu de points. Ce sont les coordonnées trilinéaires qu'il définit d'abord, au moyen du rapport anharmonique, mais il se garde bien de laisser dans l'ombre les coordonnées de Descartes et de ne pas en recommander l'usage là où il est commode de les employer ; peut-être, à ce propos, me permettra-t-on de faire observer que le rôle primordial donné aux coordonnées trilinéaires est légitime et naturel dans un livre où l'on se propose essentiellement de familiariser le lecteur avec la Géométrie projective, où l'on entend ne pas dépasser cette Géométrie et même à peine la théorie des coniques et des quadriques ; mais, si l'on se place à un autre point de vue, le concept de coordonnées est si général et la notion de coordonnées trilinéaires si spéciale, qu'on peut bien n'encourir aucun reproche pour dédaigner cette petite généralisation des coordonnées de Descartes ; il va sans dire que cette observation n'a rien à faire avec le livre de M. d'Ovidio, qui suit bien un plan logique, parfaitement ordonné, mais il serait possible d'en trouver ailleurs des applications. Quoi qu'il en soit, l'auteur, après avoir traité du plan comme lieu de points, traite du plan comme lieu de droites, puis des *étoiles* de droites et de plans. Il passe ensuite à l'espace comme lieu de points, ou de plans, puis à l'espace réglé ; dans ce dernier Chapitre, il donne quelques notions sur les complexes et les congruences de droites, puis sur les surfaces réglées, et c'est maintenant seulement qu'il va s'occuper des coniques et des quadriques. Est-il utile de dire qu'il en développera d'abord les propriétés projectives, puis les propriétés plus spéciales, mais sans sacrifier ces dernières ?

J'ai signalé, en commençant, les nombreux exercices de ce livre ; je dois signaler aussi les précieux renseignements historiques qu'il renferme. Il y a là, pour les livres d'enseignement, un excellent exemple à suivre et qui vaut mieux que l'habitude d'accoler à chaque proposition, comme on le fait quelquefois, le nom d'un mathématicien parfaitement inconnu et qui, le plus souvent, mérite de l'être. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. MAURICE HAMY.

L'équation de Lagrange

$$F(\zeta) = \zeta - a - \alpha f(\zeta) = 0$$

n'a qu'une racine, ζ, à l'intérieur d'un contour fermé S, décrit autour du point a, lorsque l'on a tout le long de ce contour

$$(1) \qquad \left| \frac{\alpha f(z)}{z - a} \right| < 1.$$

J'ai été conduit à former le développement, suivant les puissances ascendantes de α, d'une fonction de ζ, uniforme à l'intérieur de S, admettant comme pôle le point $z = a$.

La question peut se résoudre en étendant la méthode que M. Hermite expose, dans son cours à la Sorbonne, pour calculer les coefficients du développement d'une fonction holomorphe de cette racine.

Soit $\Pi(z)$ une fonction telle que le produit $(z - a)^p \Pi(z)$ soit holomorphe, à l'intérieur de S, et non nul pour $z = a$.

Décrivons, autour du point a, une circonférence Σ de rayon assez petit pour que la racine ζ soit extérieure à cette circonférence ainsi que les racines de $f(z)$.

La fonction $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ est uniforme à l'intérieur de l'aire comprise entre S et Σ; elle y est finie et continue sauf pour la valeur $z = \zeta$ qui est racine simple de $F(z)$. Le résidu relatif à ce pôle ayant pour valeur $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$, il en résulte

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\Pi(z)}{F(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_\Sigma \frac{\Pi(z)}{F(z)} dz.$$

L'inégalité (1) étant satisfaite, le long du chemin S, on sait que

la première intégrale peut se développer comme il suit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Pi(z)}{F(z)}dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^n J_n,$$

en posant

$$J_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f^n(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Or on peut écrire

$$J_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f^n(z)(z-a)^p\,\Pi(z)}{(z-a)^{n+p+1}}dz,$$

et comme la fonction $(z-a)^p\,\Pi(z)$ est holomorphe, à l'intérieur de S, on a manifestement

$$J_n = \frac{1}{(n+p)!}\left[D_z^{n+p} f^n(z)(z-a)^p\,\Pi(z)\right]_{z=a}.$$

La seconde intégrale se calcule en partant de l'identité

$$-\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{\alpha f(z)} + \frac{z-a}{\alpha^2 f^2(z)} + \ldots + \frac{(z-a)^{p-1}}{\alpha^p f^p(z)} - \frac{(z-a)^p}{\alpha^p f^p(z)\,F(z)}.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{1}{2i\pi}\Pi(z)\,dz$ et intégrant le long de Σ, on trouve, en observant que la fonction $\frac{(z-a)^p\,\Pi(z)}{f^p(z)\,F(z)}$ est holomorphe à l'intérieur de ce contour

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\Sigma \frac{\Pi(z)}{F(z)}dz = \sum_{q=-p}^{q=-1} H_q \alpha^q,$$

en posant

$$H_q = \frac{1}{2i\pi}\int_\Sigma \frac{f^q(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^{q+1}}dz.$$

$(z-a)^p\,\Pi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur de Σ ainsi que $f^q(z)$, on trouve, en raisonnant comme précédemment,

$$H_q = \frac{1}{(q+p)!}\left[D_z^{q+p} f^q(z)(z-a)^p\,\Pi(z)\right]_{z=a}.$$

En résumé, on peut écrire

$$\frac{H(\zeta)}{1-\alpha f'(\zeta)} = \frac{1}{\alpha^p}\sum_{n+p=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n+p}}{(n+p)!}\left[D_z^{n+p} f^{n+p}(z)\frac{(z-a)^p H(z)}{f^p(z)}\right]_{z=a},$$

ou, plus simplement,

$$\frac{H(\zeta)}{1-\alpha f'(\zeta)} = \frac{1}{\alpha^p}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n}}{n!}\left[D_z^{n} f^{n}\frac{(z-a)^p H(z)}{f^p(z)}\right]_{z=a}.$$

Si l'on pose maintenant

$$H(z) = [1-\alpha f'(z)]\,\Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant une nouvelle fonction admettant le pôle $z=a$, d'ordre p, il vient,

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\alpha^p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{n!}\left\{D_z^n f^n(z)\,\Psi(z)[1-\alpha f'(z)]\right\}_{z=a},$$

en faisant

$$\Psi(z) = \frac{(z-a)^p\,\Phi(z)}{f^p(z)},$$

ce qui peut s'écrire

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\alpha^p}\Psi(a) + \frac{1}{\alpha^p}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{n+1!}\left[D_z^n \Psi'(z) f^{n+1}(z)\right]_{z=a}.$$

En particulier, pour $p=0$, la fonction $\Psi(z)$ se réduit à $\Phi(z)$ et l'on retrouve la formule relative au cas où $\Phi(z)$ est holomorphe.

Remarque. — On parvient directement à cette expression de $\Phi(\zeta)$ en appliquant à la fonction $\frac{1}{\alpha^p}\Psi(z)$, qui est uniforme finie et continue pour $z=a$, la formule ordinaire établie pour une fonction holomorphe de ζ. Il suffit de remarquer que l'on a

$$\frac{1}{\alpha^p}\Psi(\zeta) = \Phi(\zeta),$$

à cause de l'identité

$$\frac{(\zeta-a)^p}{\alpha^p f^p(\zeta)} = 1,$$

qui est une conséquence de l'équation de Lagrange.

Mais ce raisonnement implique la supposition que la fonction $\Psi(z)$ est holomorphe, à l'intérieur du contour S, et, par suite, que $f(z)$ n'a pas de racine à l'intérieur de ce contour.

La méthode que nous avons suivie montre l'inutilité de cette restriction.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Delassus (E.). — *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.* In-4°, 75 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Francoeur (J.-B.). — *Géodésie, ou Traité de la figure de la Terre et de ses parties.* 8e édit. In-8°, xvii-564 p. et planches. Paris, Gauthier-Villars et fils. 12 fr.

Houel (J.). — *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, etc.* Nouv. édit. In-8°, xlvii-118 p. Paris. Gauthier-Villars et fils. 2 fr.

Koenigs (G.). — *La Géométrie réglée et ses applications.* In-4°, 152 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Sauvage (L.). — *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires.* In-4°, 184 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Stieltjes (T.-J.). — *Essai sur la théorie des nombres. Premiers éléments.* In-4°, 109 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Sturm (Ch.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* 10e édit. 2 vol. in-8°, avec fig., t. I, xxxii-563 p.; t. II, x-567 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

Tannery (J.) et Molk (J.). — *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* T. II, in-8°, vi-299 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ELLIOT (E.-B.). — AN INTRODUCTION TO THE ALGEBRA OF QUANTICS. Un vol. in-8°, XIII-423 p. Oxford, 1895.

Ce livre, relativement élémentaire, est le développement d'un cours fait par l'auteur aux élèves du Queen's College, à Oxford ; il nous en prévient dans sa Préface, et cela était presque inutile, tant on sent le soin qu'a pris M. Elliot pour rendre les théories qu'il expose pleinement accessibles à des étudiants. Des exemples, des *illustrations*, comme on dit en Angleterre, très nombreux dans tous les Chapitres, montrent bien aussi que c'est à de vrais étudiants qu'il s'adresse et qu'il a l'habitude de s'adresser. Il faut lui savoir gré d'avoir pris la peine de rédiger et de développer ses leçons, car ce livre est bien fait pour introduire le lecteur dans la théorie des formes binaires, et plus d'un, sans doute, quoique ce ne soit certainement pas l'intention de M. Elliot, pourra s'en contenter. Quant au terme anglais « quantic » qu'il a adopté, on sait assez que c'est le terme qu'employait Cayley, qui est, à coup sûr, un des principaux créateurs de la théorie, et cela, à nos yeux, suffit à le justifier.

On trouvera, dans les cinq premiers Chapitres, avec les définitions et les propriétés les plus immédiates des invariants et covariants, leur interprétation géométrique, la notation symbolique de Cayley, la constitution des invariants et covariants d'une forme binaire au moyen des racines, l'application aux formes du second, du troisième et du quatrième degré. Deux importants Chapitres sont ensuite consacrés aux équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les invariants, covariants, semi-invariants ; au théorème de Cayley sur le nombre de semi-invariants de type donné, à la loi de réciprocité de M. Hermite. L'auteur passe ensuite à la théorie des fonctions génératrices, puis à la belle démonstration du théorème de M. Gordan, que l'on doit à M. Hilbert ; il poursuit la théorie des semi-invariants et développe leurs divers modes de formation. Un chapitre est consacré aux formes canoniques pour les premiers degrés (jusqu'au huitième) ; on y traite naturellement de la résolution des équations du troisième

et du quatrième degré. Quelques paragraphes se rapportent aux formes ternaires et quaternaires. Les formes binaires du cinquième et du sixième ordre sont l'objet d'une étude spéciale que méritent assurément les beaux travaux dont elles ont été l'objet. M. Elliot s'occupe ensuite des formes binaires simultanées ; la théorie du changement de coordonnées cartésiennes fournit d'intéressantes applications. Enfin, un dernier Chapitre se rapporte aux formes ternaires du second et du troisième degré. J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE FORMULE DE M. G. FONTENÉ;

PAR M. CH. HERMITE.

En désignant par $f(x)$ une fonction doublement périodique, ayant deux pôles simples p et p', et par R le résidu qui correspond à p, M. Fontené a donné dans les *Comptes rendus*, t. CXXII, p. 172, la formule suivante

$$2f(x+y) = f(p-y) + f(p'-y) + \mathrm{R}(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y)\log\frac{f(x)-f(p-y)}{f(x)-f(p'-y)}.$$

Ce résultat intéressant, dont l'auteur tire comme conséquence immédiate les expressions des quantités $\operatorname{sn}(x+y)$, $\operatorname{cn}(x+y)$ et $\operatorname{dn}(x+y)$ peut s'obtenir par une autre voie qu'il ne me paraît pas inutile d'indiquer.

Si l'on désigne par $\xi = \varphi(x)$, la fonction inverse de l'intégrale $\displaystyle\int\frac{d\xi}{\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}} = x$, où $\mathrm{R}(\xi)$ est un polynome quelconque du quatrième degré en ξ, on établit, au moyen de la seule définition de cette fonction, cette égalité (¹)

$$\begin{aligned}\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y)-\varphi(a)} = {} & \frac{\varphi'(a+y)+\varphi'(a)}{\varphi(a+y)-\varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(a)}{\varphi(a-y)-\varphi(a)}, \\ & - \frac{\varphi'(a+y)-\varphi'(x)}{\varphi(a+y)-\varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(x)}{\varphi(a-y)-\varphi(x)},\end{aligned}$$

(¹) Note ajoutée au *Cours de Calcul différentiel et intégral* de J.-R. Serret, t. II, p. 844.

que nous pourrons encore écrire sous une autre forme, en changeant les deux membres de signe, à savoir :

$$\begin{aligned}2\,D_a \log[\varphi(a)-\varphi(x+y)] = {} & (D_a - 2\,D_y)\log[\varphi(a)-\varphi(a+y)] \\ & + (D_a + 2\,D_y)\log[\varphi(a)-\varphi(a-y)] \\ & + (D_x + \;\; D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(a+y)}{\varphi(x)-\varphi(a-y)}.\end{aligned}$$

Cela étant, soit $a = p + \varepsilon$, p désignant un pôle simple de $\varphi(x)$ et ε une quantité infiniment petite. Nous développerons suivant les puissances croissantes de ε, et nous remarquerons que si l'on néglige les termes en ε, ε^2, ..., on a simplement $\varphi(a) = \frac{R}{\varepsilon} + C$, R étant le résidu, C une constante, puis $\varphi(a+y) = \varphi(p+y)$. De là résulte pour le premier membre d'abord

$$\begin{aligned}\log[\varphi(a)-\varphi(x+y)] &= \log\left[\frac{R}{\varepsilon} + C - \varphi(x+y)\right], \\ &= \log\frac{R}{\varepsilon} + \frac{C-\varphi(x+y)}{R}\,\varepsilon,\end{aligned}$$

et, en prenant la dérivée par rapport à ε qui est la même que par rapport à a,

$$D_a \log[\varphi(a)-\varphi(x+y)] = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{C-\varphi(x+y)}{R}.$$

On trouve ensuite dans le second membre

$$\begin{aligned}\log[\varphi(a)-\varphi(x+y)] &= \log\left[\frac{R}{\varepsilon} + C - \varphi(p+y)\right], \\ &= \log\frac{R}{\varepsilon} + \frac{C-\varphi(p+y)}{R}\,\varepsilon.\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à y donnant un terme en ε peut être négligée, de sorte qu'il vient immédiatement

$$(D_a - 2\,D_y)\log[\varphi(a)-\varphi(a+y)] = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{C-\varphi(p+y)}{R},$$

puis par le même calcul

$$(D_a + 2\,D_y)\log[\varphi(a)-\varphi(a-y)] = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{C-\varphi(p-y)}{R}.$$

Si l'on substitue maintenant dans la relation considérée, on voit

que les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$ disparaissent ainsi que la constante C, et l'on parvient à cette égalité

$$2\varphi(x+y) = \varphi(p+y) + \varphi(p-y) - R(D_x + D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p+y)}{\varphi(x)-\varphi(p-y)}.$$

Cela étant, j'observe que si l'on fait $x = p' + \varepsilon$, en désignant par p' le second pôle de $\varphi(x)$ et R' le résidu correspondant, on a pour ε infiniment petit, d'après ce qui précède,

$$(D_x + D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p+y)}{\varphi(x)-\varphi(p-y)} = \frac{\varphi(p-y)-\varphi(p+y)}{R'},$$

mais $R' = -R$; cette relation devient donc

$$2\varphi(p'+y) = \varphi(p+y) + \varphi(p-y) - \varphi(p+y) + \varphi(p-y),$$

ou bien

$$\varphi(p'+y) = \varphi(p-y).$$

Nous pouvons, par conséquent, écrire sous une forme plus symétrique, en introduisant le pôle p',

$$2\varphi(x+y) = \varphi(p+y) + \varphi(p'+y) - R(D_x + D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p+y)}{\varphi(x)-\varphi(p'+y)},$$

ce qui donne le résultat obtenu par M. Fontené en remplaçant $\varphi(p+y)$ et $\varphi(p'+y)$ par $\varphi(p'-y)$ et $\varphi(p-y)$. J'ajouterai encore une remarque : on en tire, si l'on change y en $-y$,

$$2\varphi(x-y) = \varphi(p-y) + \varphi(p'-y) - R(D_x - D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p-y)}{\varphi(x)-\varphi(p'-y)},$$

ou bien

$$2\varphi(x-y) = \varphi(p+y) + \varphi(p'+y) - R(D_x - D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p'+y)}{\varphi(x)-\varphi(p+y)}.$$

En retranchant membre à membre avec l'égalité précédente, nous aurons donc la relation fort simple

$$\varphi(x+y) - \varphi(x-y) = RD_x\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p'+y)}{\varphi(x)-\varphi(p+y)},$$

et l'on en conclut cette intégrale définie

$$\int_p^x [\varphi(x+y) - \varphi(x-y)]\,dx = R\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p'+y)}{\varphi(x)-\varphi(p+y)}.$$

CALCUL DE MONS. DES CARTES

OU

INTRODUCTION A SA GÉOMÉTRIE, 1638,

PAR M. HENRI ADAM.

La Bibliothèque royale de Hanovre possède, parmi les papiers de Leibniz, un cahier manuscrit intitulé : *Calcul de Mons. Des Cartes*. Il est catalogué n° 381, au tome IV du Catalogue imprimé par le Bibliothécaire en chef M. Eduard Bodemann. Ce n'est pas l'écriture de Descartes, et ce n'est pas non plus celle de Leibniz; et il ne porte point de nom d'auteur, ni de date. Mais on y trouve plusieurs renvois à une Géométrie; et, vérification faite, les pages citées ainsi sont celles de la Géométrie de Descartes, dans la publication de 1637 : *Discours de la Méthode, etc. plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des Essais de cette Méthode* (Leyde, Jan Maire, CIↃ IↃC XXXVII achevé d'imprimer le 8 juin 1637). Cette *Géométrie* (p. 295-413 inclus) est en français, comme tout le reste, et le *Calcul de Mons. Des Cartes* est aussi en français. Ne serait-ce point le travail dont Descartes parle à plusieurs reprises dans sa Correspondance de 1638, et qu'il envoya à Mersenne, en l'appelant *Introduction à sa Géométrie* (¹)? Ce second titre n'est pas celui du manuscrit qui donne seulement : *Calcul de Mons. Des Cartes*. Mais les deux choses n'en font qu'une, comme le prouve la simple lecture des textes suivants :

Descartes à Mydorge, 24 février 1638 : « *Au reste, permettez-moy que je vous demande comment vous gouvernez ma Geometrie. Je crains bien que la difficulté des calculs ne vous en dégoûte d'abord; mais il ne faut que peu de jours pour la surmonter, et par après on les trouve beaucoup plus courts et*

(¹) LEIBNIZ, *Remarques sur l'abrégé de la Vie de Mons. des Cartes* : « J'ay vû le petit écrit qui devoit servir d'introduction à la *Geométrie* de M. des Cartes. Feu Mons. Thevenot me le communiqua. Il est assez court, mais je n'y remarque rien de cette excellence que M. Baillet dit qu'on luy attribuoit et qui faisoit croire que M. des Cartes en estoit l'auteur luy mesme. » (Édit. Gerhardt, t. IV, p. 319.)

plus commodes que ceux de Viète. On doit aussi lire le troisième Livre avant le second, à cause qu'il est beaucoup plus aisé. Si vous désirez que je vous envoie quelques adresses particulières touchant le calcul, j'ay ici un ami qui s'offre de les écrire; et je m'y offrirois bien aussi, mais j'en suis moins capable que lui, à cause que je ne sais pas si bien remarquer en quoy on peut trouuer de la difficulté. » (Lettres de M. Descartes, édit. Clerselier, t. III, 1667, p. 197 : 8.)

A Mersenne, 31 mars 1638 : « *Je suis extremement aise de ce que Mr Des Argues veut prendre la peine de lire ma Geometrie; et tant s'en faut qu'il me faille prier pour luy enuoyer, ou à vous, ce que ie croy estre utile pour en faciliter l'intelligence, je voudrois, au contraire, vous prier de l'accepter. Celuy qui m'avoit promis d'en écrire quelque chose n'est plus ici, et a des affaires qui me font craindre qu'il ne le puisse faire de cinq ou six semaines; toutefois, je le hâteray le plus que je pourrai. Et je tâcherois de le faire moi-même sans m'attendre à un autre; mais mon calcul m'est si commun, que je ne puis imaginer en quoi les autres y peuvent trouuer de la difficulté.* » (*Ib.*, t. III, p. 399.)

A Mersenne, 17 mai 1638 : « *Vous aurez à ce voyage ou au prochain l'Ecrit que je vous avois promis pour l'intelligence de ma Geometrie; car il est presque achevé et c'est un Gentilhomme d'icy de très bon lieu qui le compose.* » (*Ib.*, t. III, 390.)

Et à la fin de la même lettre : « *Je vous envoie une partie de l'Ecrit que je vous avois promis pour l'intelligence de ma Geometrie. Le reste n'a pu être transcrit; c'est pourquoi je le garde pour un autre voyage. Il a principalement été fait pour Mr Des Argues; mais je ne serai pas marri que tous les autres qui auront envie de s'en servir en aient des copies, au moins ceux qui ne se vantent point d'avoir une méthode meilleure que la mienne; car pour ceux-ci, ils n'en ont que faire, et je me suis expressément rendu un peu obscur en quelques endroits afin que telles gens ne se pussent vanter d'avoir su sans moi les mêmes choses que j'ai écrites.* » (*Ib.*, t. III, p. 394.)

A Mersenne, 13 juillet 1638 : « *Je vous prie d'abord de m'excuser de ce que le paquet est un peu gros.... Vous y trouverez le reste de l'Introduction à ma Géométrie, que je vous avois envoyé ci-devant; ce reste ne contient que cinq ou six exemples, l'un desquels est ce lieu plan dont M. Fermat a tant fait de bruit; et le dernier est, ayant quatre globes donnés, en trouver un cinquième, qui les touche, duquel je ne crois pas que vos Analystes de Paris puissent venir à bout. Et vous leur pourrez proposer, si bon vous semble, mais non pas comme de moi; car je me contente de parer; et je ne veux point me mettre en posture pour les combattre.* » (*Ib.*, t. II, p. 385.)

Ce dernier problème avait déjà été envoyé à Mersenne par Descartes, le 15 avril 1630, en ces termes : « *J'en mettray ici trois* (*problèmes*) *que j'ai autrefois trouvés sans aide que de la Géométrie simple, c'est-à-dire avec la règle et le compas :*

Invenire Diametrum Spheræ tangentis alias quatuor, positione et magnitudine datas, etc. (*Ib.*, t. II, p. 474).

A Mersenne, 27 juillet 1638 « : *Que si on trouve que l'Introduction que j'ai dernièrement envoyée y puisse aider* (*à comprendre ma Géométrie*), *je ne serai pas marri que les Jesuites la voient aussi; car je voudrais bien que plusieurs la pussent entendre.* » (Paris, Bibl. Nat., MS., FR, n. a., 5160, fol. 14, verso.)

A Mersenne, 23 août 1638 : « *Pour l'Introduction à ma Géométrie, je vous assure qu'elle n'est nullement de moi, et je l'ai seulement à peine ouï lire un peu devant que l'enfermasse en mon paquet; et j'ai honte de ce que vous avez écrit à M. Fermat, que j'y ai résolu son lieu plan; car il est si facile par ma Géométrie que c'est tout de même que si vous lui aviez mandé que j'ai pu inscrire un triangle dans un cercle.* » (*Ib.*, fol. 20, recto.)

A Mersenne, 11 octobre 1638 : « *Pour l'Introduction à ma Géométrie, j'en ai parlé à celui qui l'a composée, qui est un Gentilhomme de ce pays, de tres bon lieu; mais il ne desire point aussi qu'elle soit imprimée; si ce n'est qu'on en voulût*

seulement faire tirer une douzaine ou deux d'Exemplaires pour ceux à qui vous en voulez donner des Copies, ce qui seroit peut-être plus commode que de la faire transcrire. Et pour les caractères, vos Libraires les auront tous; ou s'il en manque quelques-uns, ils les peuvent faire fondre à fort peu de frais. Mais pour en faire une impression publique, il dit qu'il aimeroit mieux la faire faire luy-même en ce pays, et qu'en ce cas il y voudroit encore ajouter beaucoup de choses; ce qu'il offre de faire avec le temps.... Pour la question des quatre globes, je crois bien que M. Fermat peut voir de loin le moyen d'y parvenir; mais la difficulté est à en démêler le calcul, ce que j'ai peine à croire qu'il puisse faire par l'Analyse de Viète. Et pour preuve de cela, vous pouvez le convier à vous en envoyer le fait : à savoir, posant les quatre rayons des sphères données être par exemple a, b, c, d, *lui demander quel est le rayon de la plus petite sphère concave, dans laquelle elles puissent être enfermées; car vous verrez bien s'il s'accorde avec le fait que vous avez.* » (Lettres de M. Descartes, édit. Clerselier, t. II, p. 400.)

A Mersenne, 15 novembre 1638 : « *S'il se trouve encore en cecy quelque chose qui ne semble pas assez clair, je ne doute point que celui qui corrige les copies de l'Introduction ne le puisse facilement éclaircir.* » (*Ib.*, t. II, p. 409.)

A Mersenne, déc. 1638 (parlant de M. de Beaune) : « *Il a raison de trouver l'Introduction trop brève pour lui, à cause qu'il sait déjà ce qu'elle contient; mais aussi n'est-elle faite que pour ceux qui en savent moins, et ce n'est pas un Commentaire, mais seulement une Introduction.* » (*Ib.*, t. II, p. 429.)

L'introduction circulait donc et voyageait. On en entendit parler en Angleterre, et le 14 février 1640, Digby écrivait de Londres à Mersenne : « *Je n'ai pas vu encore le Discours de M. Des Cartes sur les Méchaniques, ni son Introduction à la Géométrie. Vous m'obligerez beaucoup de me le faire voir, et je vous le renvoyerai.* » Mersenne l'envoya donc, et Digby la lut aussitôt, car, le 15 mars 1640, il parle à Mersenne d'une lettre envoyée par lui il y a quinze jours « *accompagnée de l'Introduc-*

tion de M. Des Cartes à l'Algèbre. » (Paris, Bibl. nat., FR, n. a., 6204, p. 312.)

Dans tous ces textes, à vrai dire, Descartes ne parle que d'une *Introduction à sa Géométrie*. Mais déjà dans le premier, du 24 février 1638, il parle d'envoyer « *quelques adresses particulières touchant le calcul* », ce qui répond bien au contenu de ce *Calcul de Mons. Des Cartes;* et l'on voit, par tous les textes qui suivent, que c'est bien la même chose que cette *Introduction*. Il y a plus : celle-ci se termine par « *cinq ou six exemples* », dit Descartes (13 juillet 1638); or le *Calcul* se termine aussi par des exemples, non pas *cinq ou six,* il est vrai, mais seulement *quatre;* encore le quatrième reste-t-il inachevé; toute la fin de ce travail manque. Il y a plus encore : Descartes donne, dans ses lettres, deux de ses exemples. L'un, qui est le dernier, n'est autre que le problème d'une sphère tangente à quatre sphères; on ne le trouve pas dans le *Calcul*, puisqu'il est le dernier et que justement le manuscrit est incomplet. Mais l'autre exemple est *ce lieu plan dont M. Fermat a tant fait de bruit* » (13 juillet 1638); il se trouvait donc dans la dernière partie de l'*Introduction à la Géométrie;* or il se trouve aussi à la fin du *Calcul de Mons. Des Cartes :* c'est le troisième exemple, tout à fait semblable, on s'en convaincra en le lisant, au contenu d'une lettre de Fermat à Roberval, de février 1637 (*Œuvres de Fermat,* édit. Tannery et Henry, t. II, p. 100). Cette preuve est décisive : le *Calcul* et l'*Introduction* sont bien un seul et même opuscule, et l'on est en droit de l'intituler comme nous avons fait : *Calcul de Mons. Des Cartes,* ou *Introduction à sa Géométrie*.

Quel en est maintenant l'auteur? A plusieurs reprises, Descartes déclare expressément que ce n'est pas lui. Cependant, il a dû donner au moins des indications et des conseils. Il désigne comme l'auteur *un gentilhomme d'ici, de très bon lieu.* Quel peut bien être ce gentilhomme? Si l'on prend *d'ici* au sens strict, comme Descartes demeura toute l'année 1638 à Utrecht, ce serait donc un gentilhomme d'Utrecht. Au sens large, *d'ici* peut vouloir dire tout simplement *de Hollande :* ce serait donc un gentilhomme hollandais. A un sens plus large encore, *d'ici* peut signifier établi (comme Descartes lui-même) en Hollande, sans être pour cela originaire du pays. Examinons ces trois hypothèses :

1° Baillet, dans sa *Vie de M. Descartes,* t. II, p. 35, parle d'un « sieur *Godefroy de Haestrecht,* Gentilhomme du pays de Liége, qui étoit venu s'habituer à Utrecht, et qui demeuroit actuellement au château de Renoude, village à la distance d'une demi-lieue de la ville, où il cultivoit la Philosophie de M. Descartes au milieu du repos et des commodités de la vie ». Ailleurs, il l'appelle M. le

La Table suivante donnera une idée de l'opuscule et de son importance. Le numérotage des alinéas manque dans le manuscrit; on l'a établi pour plus de commodité, en le mettant entre crochets [ ], comme tout ce qui est ajouté.

[I].

[CALCUL DES POLYNOMES].

[§ 1]. [*Addition et Soustraction*].
[§ 2]. *Multiplication.*
[§ 3]. *Division.*

[II].

FRACTIONS.

[§ 1]. [*Simplification*].
[§ 2]. *Réduction au même dénominateur.*
[§ 3]. *Addition et Soustraction.*
[§ 4]. *Multiplication.*
[§ 5]. *Division.*

Baron de Haestrecht, p. 216, et il le nomme en compagnie d'autres amis du philosophe. Descartes parle aussi de ce *Monsieur Haestrech* (lettre à Schooten, septembre 1639; édit. Clerselier, t. III, p. 471). On voit, par ce passage, qu'il annotait la *Géométrie* de concert avec Schooten. Seulement, tous deux l'annotaient *en latin*, et notre *Calcul de Mons. Des Cartes* est *en français*. Est-ce là une difficulté? Ce M. de Haestrecht, qui d'ailleurs était du pays de Liége, savait certainement le français, et pouvait fort bien travailler à une introduction *française* de la Géométrie pour les curieux comme lui, et à une annotation *latine* en vue d'une édition nouvelle pour les savants

2° Baillet nomme aussi, parmi les amis de Descartes à Utrecht ou dans le voisinage, *Waessenaer* (t. II, p. 35). Ils étaient deux, le père et le fils, et justement en 1639-1640 Descartes soutiendra le fils de ses conseils et de ses écrits, dans une querelle mathématique de celui-ci avec Stampioen. Bien plus, dans cette querelle, Waessenaer reprendra, ou Descartes avec lui et pour lui, une question qui fait la suite d'un certain passage de cette *Introduction à la Géométrie* : c'est là un indice. Mais il y a une grosse difficulté : Waessenaer ne répond guère à ce signalement d'un *gentilhomme d'ici, de très bon lieu.* Une lettre de Descartes, dont l'autographe est au British Museum de Londres donne cette simple adresse : *A Monsieur J. A. Waessenaer, Arpenteur demeurant à Claerenbergh près d'Utrecht.* Et le père, que Descartes avait connu d'abord à Amsterdam avec Henry Renery en 1629-1630, était médecin. Il est vrai que Baillet ajoute ce renseignement : « M. de Waessnaer, Gentilhomme de l'une des plus anciennes maisons de la province, étoit réduit à professer la médecine. » (T. I, p. 189.)

3° Enfin, Descartes venait de faire connaissance avec un autre étranger, *Alphonse de Pollot*, d'une famille protestante de Droniera (marquisat de Saluces), réfugiée à Genève pour fuir les persécutions du duc de Savoie : deux frères, les deux cadets, Jean-Baptiste et Alphonse, étaient venus en Hollande se mettre au service du prince d'Orange et Descartes les connut tous deux. Alphonse s'intéressait fort aux travaux du philosophe : il arracha presque de force des mains

[III].

Extraction de la racine carrée.

[IV].

Quantités sourdes.

[§ 1]. [*Définition*].
[§ 2]. *Réduction des quantités sourdes.*
[§ 3]. *Addition et Soustraction.*
[§ 4]. *Multiplication.*
[§ 5]. *Division.*
[§ 6]. *Extraction de la racine des binomes.*

[V]. Des æquations.

[§ 1]. *Premier exemple.*
[§ 2]. *Second exemple.*
[§ 3]. *Troisième exemple.*
[§ 4]. *Quatrième exemple.*

CALCUL DE M^r DES CARTES.

[I].

[Calcul des polynomes].

Cette nouvelle arithmétique consiste ès lettres a, b, c, ..., aussi ès chiffres 1, 2, 3, ... S'il y a des chiffres devant les lettres, comme $2a$, $3b$, $\frac{1}{4}c$, cela veut dire que la quantité a est double, celle de b triple, et celle de c est un quart. Mais s'il s'en trouve après les lettres, comme a^3, b^4, c^5, cela veut dire que la quantité a est multipliée 3 fois, celle de b, 4 fois, et celle de c, 5 fois.

---

de Constantin Huygens le petit écrit des *Mechaniques* ou de l'*Explication des Engins,* que celui-ci avait reçu de Descartes en octobre 1637; plus tard, en 16.., il s'entremit entre Descartes et la princesse Élisabeth; ce fut lui qui porta la solution qu'elle avait donnée du problème des trois cercles, et peut-être l'avait-il aidée lui-même à la trouver. Or, ce problème est analogue à celui d'une sphère tangente à quatre autres sphères, qui était le dernier exemple de l'*Introduction à la Géométrie.* Est-ce là une coïncidence fortuite? ou Pollot s'était-il déjà occupé de cette même question en 1638? Mais, d'autre part, ses occupations comme capitaine au service du prince d'Orange, et bientôt gentilhomme de la chambre lui laissaient-elles le temps de rédiger cette Introduction? Et enfin, cette année 1638, se trouvait-il à Utrecht?

[§ I. *Addition et Soustraction*].

1° L'addition se fait par le signe +. Comme, pour ajouter a et b, j'écris $a + b$; *item*, pour ajouter $a + b$ et $d + f$, j'écris $a + b + d + f \ldots$

La soustraction se fait par le signe —. Comme, pour soustraire a de b, j'écris $b - a$.

S'il y a plusieurs parties dans la somme à soustraire, elles y changent seulement de signes.

Exemple. Voulant soustraire $a - b + c$ de d, restera

$$d - a + b - c.$$

De même ôtant $a - b$ de $c - d$, restera

$$c - d - a + b.$$

Mais s'il y a des chiffres adjoints et des termes de même espèce, il les faut écrire l'un sous l'autre et en faire l'addition ou soustraction comme en l'arithmétique vulgaire.

Exemple. Si l'on veut ajouter

$$3ab + 2cd + 5ac + 4d^2 - ad$$

avec

$$4ac + 13ab + 2ad + 4d^2.$$

Addition :

$$\begin{array}{l} 3ab + 2cd + 5ac - ad + 4d^2 \\ 13ab + 4ac + 2ad + 4d^2 \\ \hline 16ab + 2cd + 9ac + ad + 8d^2. \end{array}$$

De même pour soustraire

$$13ad - 2d^2 + c^2 + 4ac$$

de

$$5d^2 + 12ad - 3c^2 + 2a^2 + 4ac,$$

je dispose les termes comme dit est, et fais un second examen ayant changé les signes

$$\begin{array}{rl} & +5d^2 + 12ad - 3c^2 + 2a^2 + 4ac \\ & +2d^2 - 13ad - c^2 - 4ac \\ \hline \text{Reste}\ldots\ldots & 7d^2 - ad - 4c^2 + 2a^2 \end{array}$$

[§ 2]. *Multiplication.*

S'il est question de multiplier des lettres l'une par l'autre, il les faut seulement joindre ensemble; mais s'il y a des nombres adjoints, ils suivent les lois de l'arithmétique vulgaire. Et pour les signes on sait que + par + donne produit +, et que — multiplié par — donne aussi produit +. Mais + par —, ou — multiplié par +, donne produit —. Et l'on doit mettre les quantités de même espèce l'une sous l'autre pour les réduire plus aisément par addition ou soustraction. Comme, pour multiplier a par b, j'écris ab. Mais pour multiplier $2a + 3b$ par $3c - 2b$, le produit sera $6ac + 9bc - 4ab - 6b^2$.

$$\begin{array}{lc} & 2a + 3b \\ & 3c - 2b \\ \hline \text{Produit............} & 6ac + 9bc - 4ab - 6b^2. \end{array}$$

Autre exemple :

$$\begin{array}{l} ab + cd - bc \\ ab + bc - cd \\ \hline a^2b^2 + abcd - ab^2c + bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 \\ \quad - abcd + ab^2c + bc^2d \\ \hline a^2b^2 + 2bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 \end{array}$$

Nota qu'il se faut donner de garde de multiplier en soy une somme qu'on sait être moindre que zéro, ou bien de laquelle les plus grands termes ont le signe —, car le produit en serait le même que s'ils avaient le signe +. Comme $a^2 - 2ab + b^2$ est aussi bien le carré de $a - b$ que de $b - a$; si bien que si l'on cognoist a être moindre que b, on ne doit pas multiplier $a - b$ par soy à cause qu'il produirait une vraie somme en la place d'une moindre que rien, ce qui causeroit erreur en l'équation.

[§ 3]. *Division.*

Pour diviser ab par b, le quotient est a; $ab + ac$ divisé par a, le quotient est $b + c$.

Mais pour diviser

$$2ac + 2bc + 3c^2 - 2ad - 2bd - 3cd$$

par

$$2a + 2b + 3c.$$

l'on disposera la somme à diviser à gauche et le diviseur à droite comme ci-dessous :

$$\begin{array}{l|l} 2ac + 2bc + 3c^2 - 2ad - 2bd - 3cd & 2a + 2b + 3c \\ \hline 2ac + 2bc + 3c^2 - 2ad - 2bd - 3cd & c - d \end{array}.$$

Puis je divise $2ac$ par $2a$; le quotient est c, par lequel je multiplie le diviseur; le produit est $2ac + 2bc + 3c^2$, que je soustrais du nombre proposé; le reste est $-2ad - 2bd - 3cd$, que je divise derechef par $2a$; vient pour seconde figure du quotient $-d$, par lequel je multiplie le diviseur; le produit est $-2ad - 2bd - 3cd$, que j'ôte du reste dudit nombre proposé, et il ne me reste rien.

Il faut observer que si les termes qui viennent de la multiplication du quotient par le diviseur ne se trouvent dans la somme à diviser, qu'on les y doit joindre par $+$ ou $-$ suivant que lesdits termes à ôter se trouveront affectés, et poursuivre la division par tous les termes indifféremment.

Il faut diviser $c^2 - d^2$ par $c + d$

$$\begin{array}{l|l} -cd + c^2 - d^2 & c + d \\ \hline +cd + c^2 - d^2 & c - d \\ -cd. & \end{array}$$

Autre exemple. Soit à diviser

$$\begin{array}{rl} & \text{diviseur.} \\ a^2b^2 + 2bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 \ \text{par} & ab + cd - bc \\ \hline +ab^2c - abcd + a^2b^2 + 2bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 & \text{quotient.} \\ -ab^2c + abcd + a^2b^2 + bc^2d - b^2c^2 - c^2d^2 & ab + bc - cd \\ +ab^2c - abcd \qquad + bc^2d. & \end{array}$$

Mais lorsqu'il reste quelques termes de la somme à diviser qui ne peuvent être divisés par le diviseur, cela est une preuve que la division ne se peut faire; et en ce cas on se contente d'escrire le diviseur sous la somme à diviser, comme les 2 exemples suivants :

$$\frac{ab + bc - cd}{a + d} \quad \text{et} \quad \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{c^2 + cd} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2 + cd}x^2.$$

[II].

Des fractions.

[§ 1. *Simplification*].

Aux quantités rompues l'on suit les préceptes du vulgaire pour toutes les espèces. Il est besoin de les réduire aux plus simples

termes, si on le peut. Et on le peut, quand la somme à diviser et le diviseur ont quelque commun diviseur.

Comme pour réduire $\frac{abc}{cd}$, je vois que c est leur commun diviseur et avec yceluì je divise les deux termes de la fraction, et j'ay $\frac{ab}{d}$.

Item voulant réduire en moindres termes $\frac{a^2c - adc - a^2d + ad^2}{cd - d^2}$, je divise les deux termes de la fraction par $c - d$; les quotients sont $a^2 - ad$ et d, que j'escris ainsi $\frac{a^2 - ad}{d}$.

Item, $\frac{cd - d^2}{c - d}$ étant abbreuié rendra d.

[§ 2]. *Réduction au même dénominateur.*

J'ay à réduire $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{a}$; je multiplie a^2 par a et b^2 par c, et derechef c par a; j'ay $\frac{a^3}{ac}$ et $\frac{b^2c}{ac}$.

Item, voulant réduire sous une même dénomination $\frac{ab + cd}{a + b}$ et $\frac{b^2 + c^2}{c + d}$, j'ay $\frac{abc + c^2d + abd + cd^2}{ac + bc + da + db}$ et $\frac{ab^2 + ac^2 + b^3 + bc^2}{ac + bc + da + db}$.

Mais s'il y a des entiers avec les fractions, comme $a + b + \frac{cd - ab}{f - c}$, l'on multipliera les entiers $a + b$ par le diviseur $f - c$, et le produit sera adjouté avec $cd - ab$, $\frac{af + bf - ca - cb + cd - ab}{f - c}$.

Et si les fractions données avaient des diviseurs qui eussent un diviseur commun, la réduction serait plus courte. Comme en cet exemple $\frac{b^2c + c^2d}{ax + bx}$ et $\frac{a^3 + d^3}{ac + bc}$, le commun diviseur desdits diviseurs est $a + b$; en divisant $ax + bx$ par $a + b$, le quotient est x, par lequel je multiplie $a^3 + d^3$; et le quotient de l'autre est c, par lequel je multiplie l'autre $b^2c + c^2d$, puis $ax + bx$ par c et $ac + bc$ par x, et j'ay $\frac{b^2c^2 + c^3d}{acx + bcx}$ et $\frac{a^3x + d^3x}{acx + bcx}$, et ainsi des autres.

[§ 3]. *Addition et Soustraction.*

Quand les fractions sont réduites comme dit est, on les ajoute ensemble par le signe + et l'on soustrait la moindre de la plus grande par le signe —, de même qu'aux entiers.

Exemple. — Je veux ajouter $\frac{a^3}{ac}$ avec $\frac{b^3}{ac}$, la somme est $\frac{a^3+b^3}{ac}$.

Mais pour soustraire $\frac{b^2c}{ac}$ de $\frac{a^3}{ac}$, le reste est $\frac{a^3-b^2c}{ac}$.

[§ 4]. *Multiplication.*

Pour multiplier $\frac{ab}{c}$ par $\frac{cd-ab}{b}$, il faut multiplier les sommes à diviser entre elles et pareillement les diviseurs entre eux. Et le produit sera $\frac{abcd-a^2b^2}{bc}$.

Mais avant que de commencer la multiplication, on doit regarder si la somme à diviser d'une partie et le diviseur de l'autre partie ne se peuvent diviser par un commun diviseur; comme en l'exemple cy-dessus $\frac{ab}{c}$ par $\frac{cd-ab}{b}$, la somme ab d'une partie se peut diviser par b, et le diviseur b de l'autre partie se peut aussi diviser par b, de sorte que je n'ay plus à multiplier que $\frac{a}{c}$ par $\frac{cd-ab}{1}$, et le produit est $\frac{acd-a^2b}{c}$, ou bien $ad-\frac{a^2b}{c}$.

Item, $a+b-\frac{cd+ac}{f-g}$ par $c+d$; il n'est besoin de réduire les entiers en fraction, ains seulement multiplier les entiers par les entiers et le produit sera

$$ac+bc+ad+bd-\frac{c^2d+ac^2+cd^2+acd}{f-g}.$$

[§ 5]. *Division.*

Pour diviser $\frac{ab^2}{d}$ par c, je multiplie c par d; le quotient est $\frac{ab^2}{cd}$. *Item*, je veux diviser $\frac{ab+a^2}{c}$ par $\frac{ab^2}{cd}$, je fais comme aux fractions vulgaires

$$\frac{ab+a^2}{c} : \frac{ab^2}{cd};$$

le quotient est $\frac{abcd+a^2cd}{ab^2c}$.

Mais avant que de venir à la multiplication, il faut réduire les sommes à diviser et leurs diviseurs en leurs plus simples termes. Comme ici $\frac{ab+a^2}{c}$ et $\frac{ab^2}{cd}$ se divisent par $\frac{a}{c}$; c'est pourquoi j'oste

a de dessus et c de dessous, il me reste $\frac{b+a}{1}$, ou bien $b+a$, qu'il faut diviser par $\frac{b^2}{d}$; le quotient, $\frac{bd+ad}{b^2}$, se trouve en divisant, comme aux fractions ordinaires,

$$\frac{ab+a^2}{c} : \frac{a}{c} \quad \text{quotient} \quad \frac{cab+ca^2}{ca} \quad \text{ou bien} \quad \frac{b+a}{1},$$
$$\frac{ab^2}{cd} : \frac{a}{c} \quad \text{»} \quad \frac{cab^2}{acd} \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{d},$$
$$\frac{b+a}{1} : \frac{b^2}{d} \quad \text{»} \quad \frac{bd+ad}{b^2}.$$

[III].

[§ 1]. Extraction de la racine quarrée.

Pour tirer la racine quarrée de $4a^2$, vient $2a$. Mais pour tirer la racine du multinôme $a^2+c^2+b^2+2ac-2bc-2ab$, on doit prendre premièrement la racine de l'un des quarrés qu'on connaîtra n'être pas l'un des moindres, et ycelle sera le premier terme de la racine requise, laquelle sera escrite sous le nombre proposé entre deux lignes. Comme en l'exemple proposé, je choisis a^2, et sa racine est a; puis je soustrais a^2 du nombre proposé, reste $c^2+b^2+2ac-2bc-2ab$, que je divise par le double de la racine, qui est $2a$; il vient pour second terme $+c$ que je multiplie en soy et par $2a$; le produit est c^2+2ac, que je soustrais comme dessus du nombre proposé.

Restera $b^2-2bc-2ab$, que je divise derechef par $2a+2c$ double de toute la racine trouvée, et vient pour troisième terme $-b$, que je multiplie en soy et par $2a+2c$; le produit est $b^2-2ab-2bc$, que j'oste du nombre proposé et il ne reste rien. Mais si b^2 eut été plus grand que a^2, b eut été premier terme de la racine et toute la racine eut été $b-a-c$. C'est à quoi l'on doit prendre garde quand aux quarrés il y a des termes affectés du signe —.

Supposons a^2 plus grand que b^2

$$\cancel{a^2}+\cancel{c^2}+\cancel{b^2}+\cancel{2ac}-\cancel{2bc}-\cancel{2ab}$$

$a+c-b$ racine requise

$$\cancel{a^2}+\cancel{c^2}+\cancel{b^2}+\cancel{2a}+\cancel{2c}+\cancel{2a}$$
$$+\cancel{2ac}-\cancel{2bc}-\cancel{2ab}$$

Supposons b^2 plus grand que a^2

$$\begin{array}{c} \underline{\cancel{a^2} + \cancel{c^2} + \cancel{b^2} + \cancel{2ac} - \cancel{2bc} - \cancel{2ab}} \\ b - a - c \\ \hline \cancel{a^2} + \cancel{c^2} + \cancel{b^2} - \cancel{2a} + \cancel{2b} + \cancel{2b} \\ + \cancel{2ac} - \cancel{2bc} - \cancel{2ba} \end{array}$$

[IV].

Des Quantités sourdes.

[§ 1. *Définition*].

Lorsqu'on ne peut tirer la racine d'un quarré, on le met dans le vinculum $\sqrt{}$, pour dénotter qu'on le doit traiter comme une racine, et alors on la nomme *quantité sourde.*

Comme ne pouvant tirer la racine quarrée de $a^2 + b^2$, je l'écris ainsi $\sqrt{a^2 + b^2}$. Et s'il faut tirer une racine cubique, on se sert de ce signe $\sqrt{C.a^3 + ab^2}$.

Mais s'il en faut tirer une d'un quarré de quarré, on l'escrit ainsi $W\overline{a^2 b^2 + bc^3}$; et s'il est question de tirer la racine quarrée de $ab + c^2$ et de la racine de $bc^3 + a^2 b^2$, elle s'escrira ainsi $\sqrt{ab + c^2 + \sqrt{bc^3 + a^2 b^2}}$; et s'il fallait tirer la racine quarrée de $a^4 + b^4$ divisée par des quantités absolues $c - 2d$, l'on escrira ainsi $\frac{1}{c - 2d}\sqrt{a^4 + b^4}$.

Item, je veux tirer la racine de $ab^3 + c^4$ divisé par $b^2 + d^2$, et de la racine de $b^5 c + a^5 d$ divisée par $a + b$; j'escris ainsi $\sqrt{\frac{ab^3 + c^4}{b^2 + d^2} + \frac{1}{a + b}\sqrt{b^5 c + a^5 d}}$.

Item, pour tirer la racine de $b^2 + d^2$ multipliée par les quantités absolues $a + b$ et divisée par $c + d$, je l'escris ainsi $\frac{a + b}{c + d}\sqrt{b^2 + d^2}$.

[§ 2]. *Réduction des quantités sourdes.*

Toute quantité irrationnelle qui se peut diviser par un quarré, se réduit à de moindres termes et le diviseur devient rationnel et se met hors du vinculum.

Ex. $\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2}$. Je divise par a^2, dont la racine est a, et

j'escris $a\sqrt{b^2+c^2}$, qui est autant à dire que a multiplié par la racine de b^2+c^2.

Item, $\sqrt{12a^2}$ se réduit à $2a\sqrt{3}$; car le carré de $2a$ est $4a^2$ multiplié par 3 fait $12a^2$.

Item, $\sqrt{27a^2}$ se réduit à $3a\sqrt{3}$.

Item, $\sqrt{48a^2}$ est $4a\sqrt{3}$.

Item, $\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+2abc^2+2abd^2+b^2c^2+b^2d^2}$. Je divise par $a^2+2ab+b^2$; le quotient est c^2+d^2, et la racine de $a^2+2ab+b^2$ est $a+b$; j'escris donc $a+b\sqrt{c^2+d^2}$, qui est autant à dire que $a+b$ est multiplié par la racine de c^2+d^2.

Item, l'on peut réduire $\frac{pq^2-q^3+qr^2-pr^2}{r\sqrt{q^2-r^2}}$ à cette somme $\frac{p-q}{r}\sqrt{q^2-r^2}$; car $pq^2-q^3+qr^2-pr^2$ se divise par $p-q$, et le quotient est q^2-r^2, lequel étant derechef divisible par $\sqrt{q^2-r^2}$ devient $\sqrt{q^2-r^2}$, et derechef étant multiplié par $p-q$ et divisé par r, devient $\frac{p-q}{r}\sqrt{q^2-r^2}$.

Item, pour réduire $\frac{ac^2+a^3}{2\sqrt{a^2+c^2}}$ ou bien $\frac{\sqrt{a^2c^4+2a^4c^2+a^6}}{\sqrt{4a^2+4c^2}}$ qui est égale, ou bien $\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{c^4+2a^2c^2+a^4}}{\sqrt{a^2+c^2}}$, je divise $\sqrt{c^4+2a^2c^2+a^4}$ par $\sqrt{c^2+a^2}$; le quotient est $\sqrt{c^2+a^2}$, lequel étant multiplié par $\frac{1}{2}a$, devient $\frac{1}{2}a\sqrt{c^2+a^2}$.

[§ 3]. *Addition et Soustraction des quantités sourdes.*

Aux opérations de l'addition et soustraction les termes compris dans le vinculum ne reçoivent point de changement aux signes $+$ ou $-$. Mais seulement on les ajoute ou soustrait par lesdits signes qu'on met au dehors devant le vinculum.

Comme pour ajouter $\sqrt{ab-a^2}$ avec $\sqrt{b^2-bc}$, j'escris :

$$\sqrt{ab-a^2}+\sqrt{b^2-bc}.$$

Et de même pour soustraire $\sqrt{ab-a^2}$ de $\sqrt{b^2-bc}$, j'escris :

$$\sqrt{b^2-bc}-\sqrt{ab-a^2}$$

pour différence.

Item, pour soustraire $\sqrt{\frac{a^4+b^2c^2}{cd}}$ de $\sqrt{\frac{b^4+a^3b}{ac}}$, j'escris :

$$\sqrt{\frac{b^4+a^3b}{ac}}-\sqrt{\frac{a^4+b^2c^2}{cd}}.$$

Item, pour soustraire $\frac{b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$ de $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$, reste $\frac{2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, ce qui se trouve en réduisant les deux sommes sous une même dénomination en multipliant le diviseur $2\sqrt{4a^2-b^2}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$, le produit est $4a^2-b^2$; et tout de même multipliant le diviseur 1 par b^2, le produit sera b^2; et les deux sommes seront $\frac{b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$ et $\frac{4a^2-b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}}$. J'oste maintenant b^2 de $4a^2-b^2$, le reste est

$$\frac{4a^2-2b^2}{2\sqrt{4a^2-b^2}},$$

et en divisant le tout par 2, j'ay $\frac{2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Item, pour soustraire une racine multipliée par des quantités absolues de semblables quantités et racines, comme $a+b\sqrt{c^2+d^2}$ et $c+d\sqrt{a^2+ab}$, reste

$$c+d\sqrt{a^2+ab}-a+b\sqrt{c^2+d^2},$$

et ainsi de suite de toutes les autres.

[§ 4]. *Multiplication des quantités sourdes.*

Des quantités sourdes multipliées entre elles, la racine du produit de leurs puissances multipliées entre elles est le produit requis. Comme pour multiplier $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{bc}$, le produit est $\sqrt{ab^2c}$. De même, multipliant $\sqrt{ab+c^2}$ par $\sqrt{cd-ad}$, j'ay pour le produit $\sqrt{abcd+c^3d-a^2bd-adc^2}$. Mais lorsqu'on ne veut achever la multiplication, on met les termes ainsi $\sqrt{ab+c^2}\ \mathrm{M}\sqrt{cd-ad}$, qui est autant à dire que la racine de $ab+c^2$ doit être multipliée par la racine de $cd-ad$.

Item, le produit de $\frac{a-c}{b^2-c^2}\sqrt{db^3+bd^3}$ par $\sqrt{\frac{ab^3-ad^3}{bc}}$ est

$$\frac{a-c}{b^2-c^2}\sqrt{\frac{adb^6-ad^4b^3+ab^4d^3-abd^6}{bc}}.$$

Item, pour avoir le quarré de $\sqrt{ab - bc - c^2} - \sqrt{b^2 - ac}$, je quitte les deux vincula pour avoir leurs quarrés, et multiplie les racines 2 fois l'une par l'autre, j'ay

$$ab - bc - c^2 + b^2 - ac - 2\sqrt{b^2 - ac}\,\mathrm{M}\sqrt{ab - bc - c^2},$$

pour le carré requis. L'on peut aussi mettre le vinculum ainsi $-\sqrt{4b^2 - 4ac}\,\mathrm{M}\sqrt{ab - bc - c^2}$; ou bien si l'on veut achever la multiplication, on multipliera $4b^2 - 4ac$ par $ab - bc - c^2$; le produit sera

$$\sqrt{4ab^3 - 4b^3c - 4b^2c^2 - 4a^2bc + 4abc^2 + 4ac^3}.$$

Item, le quarré de $a + c + \sqrt{b^2 + bc}$ est

$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + bc + 2a + 2c\sqrt{b^2 + bc}.$$

Item, le quarré de $a + \sqrt{ab + cd} + \sqrt{c^2 + d^2}$ est

$$a^2 + ab + cd + c^2 + d^2 + 2a\sqrt{ab + cd}$$
$$+ 2a\sqrt{c^2 + d^2} + 2\sqrt{ab + cd}\,\mathrm{M}\sqrt{c^2 + d^2},$$

et ainsi des autres.

[§ 5]. *Division des quantités sourdes.*

Des quantités sourdes divisées l'une par l'autre, la racine du quotient est le quotient requis.

Exemple. — Pour diviser $\sqrt{abc^2}$ par $\sqrt{d^2}$, le quotient est $\sqrt{\frac{abc^2}{d^2}}$, ou bien $\frac{c}{d}\sqrt{ab}$.

Item, pour diviser $\sqrt{ab^3 + c^2d^2 + d^4}$ par $\sqrt{ac + c^2}$, le quotient est $\frac{\sqrt{ab^3 + c^3d^2 + d^4}}{\sqrt{ac + c^2}}$.

Item, pour diviser $a\sqrt{b^2 - c^2}$ par $d + c$, vient $\frac{a}{d + c}\sqrt{b^2 - c^2}$.

Item, pour diviser $a^2 + bc + \sqrt{ac^3 + cd^3}$ par $\sqrt{c^2 - a^2}$, vient $\frac{a^2 + bc + \sqrt{ac^3 + cd^3}}{\sqrt{c^2 - a^2}}$.

Item, pour diviser $a^2 - b^2$ par $\sqrt{a^2 - b^2}$, vient $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Item, pour diviser $\frac{ac^2 + a^3}{2\sqrt{a^2 + c^2}}$ ou bien son égal $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}$ par $\sqrt{a^2 + c^2}$, vient pour quotient $\frac{1}{2}a$.

Item, j'ay à diviser a^2+b^2 par la racine de $ac+c^2$; vient $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ac+c^2}}$, ou bien $\dfrac{\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}}{\sqrt{ac+c^2}}$.

Mais lorsqu'un binôme est donné à diviser par un diviseur qui est aussi binôme, il y a plus de façon. Par ex., je veux diviser le binôme $a^2+\sqrt{abcd}$ par le binôme $a+\sqrt{bc}$. Il faut multiplier $a^2+\sqrt{abcd}$ par le *résidu* du diviseur $a-\sqrt{bc}$; le produit est

$$a^3+a\sqrt{abcd}-a^2\sqrt{bc}-bc\sqrt{ad}.$$

De même je multiplie le diviseur $a+\sqrt{bc}$ par le susdit résidu $a-\sqrt{bc}$; le produit est a^2-bc, par lequel je divise le produit précédent; vient pour quotient requis

$$\frac{a^3+a\sqrt{abcd}-a^2\sqrt{bc}-bc\sqrt{ad}}{a^2-bc}.$$

De la même façon, si le diviseur donné est multinôme, il le faut si souvent multiplier par son résidu que son produit donne enfin une quantité absolue par laquelle soit divisée la somme à diviser, après l'avoir, par les mêmes résidus, multipliée autant de fois comme le diviseur l'aura été. Et ce qui en viendra sera le quotient requis.

[§ 6]. *Extraction de la racine des binômes.*

Pour tirer la racine quarrée de $a+\sqrt{bc}$, je prends la demi-différence des deux quarrés proposés $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc$, et je joins la racine de cette différence à la demi-racine du plus grand carré par le signe $+$, et la racine de toute cette quantité donnera pour un membre $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$, et la joignant par le signe $-$, j'ay l'autre membre qui sera $\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$, et l'aggrégat est $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}+\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$, sera la racine de $a+\sqrt{bc}$.

Mais celle de son résidu $a-\sqrt{bc}$ sera différente seulement du signe $-$. $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}-\sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}bc}}$.

Autre exemple tiré de la *Géométrie*, p. 328. Pour tirer la racine de ce binôme $m^2 + \frac{px^2}{m} + \sqrt{4pmx^2}$, la différence des deux quarrés est $m^4 - 2pmx^2 + \frac{p^2x^4}{m^2}$, dont la demi-racine est $\frac{1}{2}m^2 - \frac{px^2}{2m}$, qui étant adjoustée à la demy-racine du plus grand quarré, égal à $\frac{1}{2}m^2 + \frac{px^2}{2m}$, j'ay $\sqrt{m^2}$, ou bien m pour un membre; et pour l'autre je soustrais $\frac{1}{2}m^2 - \frac{px^2}{2m}$ de $\frac{1}{2}m^2 + \frac{px^2}{2m}$, et j'ay $\sqrt{\frac{px^2}{m}}$ le reste; lesquels membres j'ajouste, puisqu'il est binôme, et j'ay $m + \sqrt{\frac{px^2}{m}}$, ou bien $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$.

Item, pour tirer la racine de ce binôme

$$a^2x^2 + d^2x^2 - 2a^2d^2 + \sqrt{4a^2d^2x^4 - 4a^4d^2x^2 - 4a^2d^4x^2 + 4a^4d^4},$$

la différence de leurs quarrés est $a^4x^4 - 2a^2d^2x^4 + d^4x^4$, dont la racine est $a^2x^2 - d^2x^2$, en supposant que a soit plus grand que d. Puis à cette demy racine $\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{2}d^2x^2$ ayant adjousté la demy racine du plus grand quarré $\frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{2}d^2x^2 - a^2d^2$, j'ay $a^2x^2 - a^2d^2$, dont la racine est $\sqrt{a^2x^2 - a^2d^2}$ ou $a\sqrt{x^2 - d^2}$ pour un membre. Et l'ayant osté de $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}d^2x - a^2d^2$, le reste $d^2x^2 - a^2d^2$, dont la racine est $\sqrt{d^2x^2 - a^2d^2}$, ou bien $d\sqrt{x^2 - a^2}$ pour l'autre membre; lesquels étant joins par le signe $+$, la racine est

$$a\sqrt{x^2 - d^2} + d\sqrt{x^2 - a^2}.$$

[V]. Des æquations.

Quand on veut résoudre quelque problème, on pose pour les termes cognus, soit ligne, nombre, superficie, ou corps, les premières lettres de l'alphabet a, b, c, et pour les incognus on se sert des dernières x, y, z; et faisant un registre, on se sert de ce signe $\propto$, pour dénotter l'égalité de deux choses. Comme pour dire que la ligne AB est égale à b, j'escris AB $\propto b$, observant toutefois en les suppositions à garder le nombre des dimensions, posant une lettre pour une ligne ou nombre, deux lettres pour une superficie, et trois pour un corps, de sorte qu'il faut qu'il y ait autant

de dimensions en un terme qu'en l'autre, sinon que l'unité soit déterminée en la question. Car comme l'unité ne diminue le nombre des dimensions par la division ny ne l'augmente aussi par la multiplication, il est loisible de l'oster des termes où elle se trouve, comme on voit en la *Géométrie*, p. 299, en l'exemple allégué aussi à cet effet : $a^2b^2 - b$, où soit c l'unité, et $-b$ multipliée 2 fois par l'unité, et a^2b^2 divisée une fois par l'unité; en la restituant on aura en un terme autant de dimensions qu'en l'autre $\frac{a^2b^2}{c} - bc^2$.

Pareillement page 395, en l'æquation

$$z^4 \propto pz^2 - qz + r,$$

si l'on suppose a pour l'unité, pz^2 multipliée une fois, $-qz$ deux fois, et r trois fois, de sorte qu'en remettant l'unité, on aurait

$$z^4 \propto pz^2a - a^2qz + a^3r$$

et ainsi de plusieurs autres.

Après avoir donné des noms aux quantités cognues, l'on considère la chose comme déjà faite et on examine si le problème se peut commodément résoudre en supposant seulement une ligne inconnue $\propto$ à x, savoir celle qui est requise, ou bien $x^2 \propto x$ multipliée par une autre grandeur connue + ou — d'autres termes cognus, etc. Et en tous ces cas la *Géométrie* donne le moyen d'en tirer la racine et rendre la quantité inconnue $x \propto$ à des termes qui sont cognus. De là le problème est résolu.

Mais lorsque le problème proposé est tel qu'une seule lettre inconnue n'a point assez de communication avec celles qui sont connues, en sortes qu'elles ne sauroient s'entraider pour faire trouver l'æquation, ou bien que par la supposition d'une seule lettre on s'embarasse dans un trop gros calcul, on se doit servir de plusieurs lettres inconnues, et chercher aussi autant d'æquations qu'on a supposé de lettres, et par le moyen d'ycelles æquations réduire toutes ces lettres en une seule qui porte la solution du problème. Et pour venir à bout de ces réductions, il est besoin de considérer si par une æquation, ou par la comparaison de deux ou plusieurs en les adjoustant ou soustrayant l'une de l'autre, on ne pourra cognoistre une lettre. Et si cela ne se peut, il faut venir à

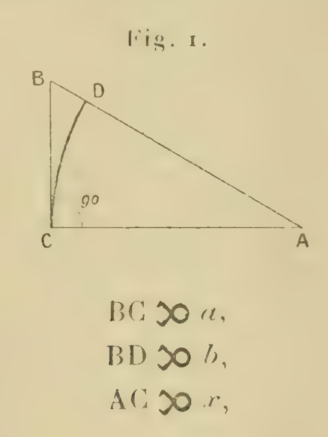
l'extraction de la racine pour en trouver une; puis après on doit oster cette lettre de l'une des autres æquations et en son lieu mettre la valeur trouvée et ainsi on sera quitte d'une lettre inconnue. Puis comparant cette æquation avec une autre dont on aura aussi osté cette même lettre si elle y était, on la défera d'une seconde, et ainsi des autres jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'une inconnue parmi toutes les connues, dont on mettra les termes par ordre. Et on cognoistra par extraction de racines quelle est sa valeur comme devant et ainsi le problème sera résolu.

Que si l'on ne peut trouver autant d'æquations qu'on a supposé de lettres inconnues, cela est un indice que le problème n'est pas entièrement déterminé. Et alors on peut prendre pour l'une des lettres inconnues telle quantité qu'on voudra, et de sa variété naissent plusieurs points qui tous satisfont à la question, et qui composent des lieux plans, solides ou linéaires, s'il n'y a qu'une æquation qui manque, et des lieux de superficie, s'il y en avait deux de manque, et ainsi des autres.

[§ 1]. *Premier exemple.*

L'un des côtés d'un triangle rectangle et la différence des deux autres côtés étant donnés, trouver le reste du triangle.

Fig. 1.



Supposons

$$BC \propto a,$$
$$BD \propto b,$$
$$AC \propto x,$$

et la chose comme déjà faite. Les deux quarrés de AC ou x^2, et BC ou a^2 sont égaux au carré de AB. Mais AB $\propto x + b$, et son carré est $x^2 + 2bx + b^2$; doncques il y a æquation entre $x^2 + a^2$ et $x^2 + 2bx + b^2$.

J'oste de part et d'autre $x^2 + b^2$, il me reste

$$2bx \propto a^2 - b^2,$$

lesquelles quantités je divise par $2b$, vient

$$x \propto \frac{a^2 - b^2}{2b},$$

ce qui montre que la différence des quarrés de BC et BD étant divisée par le double de BD, le quotient sera le côté AC. Ou bien trouvant une ligne qui soit à la ligne a comme a est au double de b, puis en ostant la moitié de cette ligne, le reste est x ou AC qui était cherché.

[§ 2]. *Second exemple.*

Deux triangles rectangles étant donnés sur une même base, s'entrecoupent en un point, trouver les segments des côtés qui s'entrecoupent.

Fig. 2.

Supposons

$$\begin{aligned} \text{BE} &\propto x, \\ \text{AB} &\propto a, \\ \text{AC} &\propto b, \\ \text{CD} &\propto c, \\ \text{DB} &\propto d, \end{aligned}$$

et la chose comme déjà faite. Si BE $\propto x$, DE $\propto d - x$, et à cause que les triangles ABE et CDE sont semblables, AB $\propto a$ est à BE $\propto x$ comme DC $\propto c$ est à CE $\propto \frac{cx}{a}$. Derechef comme CD $\propto c$ est à DE $\propto d - x$, ainsi AB $\propto a$ est à AE $\propto \frac{ad - ax}{c}$; et CE $\propto \frac{cx}{a}$ étant osté de AC $\propto b$, restera AE $\propto b - \frac{cx}{a}$, en d'autres termes qui donnent l'æquation suivante :

$$b - \frac{cx}{a} \propto \frac{ad - ax}{c},$$

ou bien

$$a^2d - a^2x \propto abc - c^2x,$$

ostant de part et d'autre $-c^2x + a^2d$, reste

$$c^2x - a^2x \propto abc - a^2d.$$

et divisant l'une et l'autre partie par $e^2 - a^2$, j'auray

$$x \propto \frac{abe - a^2 d}{e^2 - a^2},$$

c'est-à-dire que, comme la différence des quarrés de AB et DC, qui sont les côtés qui ne s'entrecoupent pas, est à la différence des rectangles ACD et ABD, ainsi le côté AB est à la ligne BE $\propto x$. Ou bien l'analogie s'exprimera ainsi :

$$\frac{e^2 - a^2}{be - ad} \propto \frac{a}{x},$$

et en même raison aussi DC à CE.

[§ 3]. *Troisième exemple* [1].

Étant donnés 4 points A, D, E, F, trouver le 5e C duquel, étant

[1] Exemple tiré des *Lieux plans d'Apollonius*, L. II, Prop. V (*Œuvres de Fermat*, édit. Tannery et Henry, t. I, p. 37) :

Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ et sint species quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

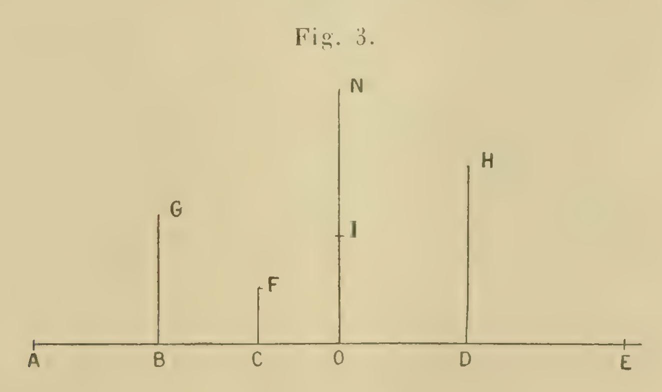
Dans une lettre de Fermat à Roberval, du 22 septembre 1636 (t. II, p. 74), on lit : « *J'avois omis le principal usage de ma méthode qui est pour l'invention des lieux plans et solides; elle m'a servi particulièrement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile.* » (Suit l'énoncé latin ci-dessus).

Roberval répond à Fermat le 11 octobre 1636 : « *J'estime vos propositions des nombres et celle du lieu plan fort difficiles.* » (t. II, p. 82).

Fermat se décide à envoyer à Roberval la solution du lieu plan, lettre de février 1637 (t. II, p. 100). On peut la comparer à celle de Descartes.

« *Je trouve assez de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan : Si a quotcumque, etc., que je tiens une des plus belles propositions de la Géométrie, et je crois que vous serez de mon avis.*

Fig. 3.



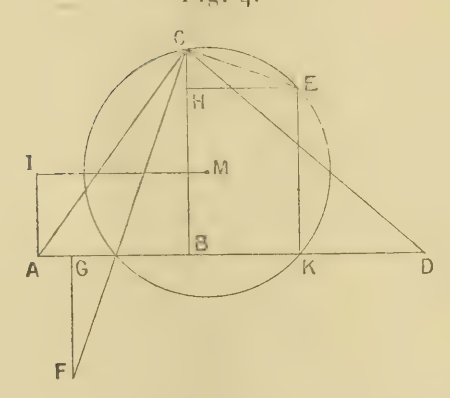
Sint data quotlibet puncta, quinque verbi gratiâ, A, G, F, H, E (*nam propositio est generalis*), *quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quo-*

menées des lignes droites comme les quatre AC, CF, CD, CE desquelles les quarrés sont égaux à l'espace d^2.

Hypothèses.

AG $\propto a$, GF $\propto b$,
AK $\propto f$, KE $\propto g$,
AD $\propto c$, AB $\propto x$,
BC $\propto y$.

Fig. 4.



Je suppose la chose comme déjà faite, et le point requis C, duquel je mène des lignes aux quatre points donnés. Et je joins aussi deux de ces points par une ligne AD, sur laquelle des autres points je fais tomber les perpendiculaires EK, GF, CB; et soit EK plus grande que FG. Puis je cherche les quatre quarrés requis en cette sorte suivant les suppositions de mon registre. Le quarré de AB est x^2, et celui de BC est y^2; doncques le quarré de AC est

---

libet puncto inflectendo rectas a datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato.

Jungantur puncta quævis A *et* E *per rectam* AE, *in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares* GB, FC, HD. *Omnium rectarum, punctis datis vel occursu perpendicularium et puncto* A *terminatarum, sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratiâ, in hac specie; quintans ergo rectarum* AB, AC, AD, AE *simul sumptarum esto* AO, *et a puncto* O *excitetur perpendicularis infinita* ON, *a qua resecetur* OI *pars conditionaria* (*quintans nempe pro numero punctorum datorum*) *perpendicularium* GB, FC, HD, *et intelligantur jungi rectæ* AI, GI, FI, HI, EI. *Quadrata istarum quinque erunt minora spatio dato : demantur igitur a spatio dato et supersit, verbi gratiâ,* Z *planum, cujus quintans* (*pars nempe conditionaria*) *sumatur et in quadratum* M *redigatur. Circulus, centro I, intervallo* M *descriptus satisfaciet proposito : hoc est, quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia, rectarum a datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.* »

$x^2 + y^2$. Les deux quarrés de BD $\propto c - x$ et BC $\propto y$ sont $c^2 - 2cx + x^2$ et y^2; doncques le carré de CD est

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2.$$

Et le quarré de la ligne CB + GF est $y^2 + 2by + b^2$, et le quarré de GB $\propto x - a$ est $x^2 - 2ax + a^2$; et ces deux derniers quarrés sont égaux au quarré de

$$\text{CF} \propto y^2 + 2by + b^2 + x^2 - 2ax + a^2.$$

Les deux quarrés de CH et BK, ou $y - g$ et $f - x$, sont $y^2 - 2gy + g^2$ et $f^2 - 2fx + x^2$, qui sont égaux au quarré de CE, $y^2 - 2gy + g^2 + f^2 - 2fx + x^2$; et la somme de ces quatre quarrés étant égale à l'espace donné d^2, j'ay après l'addition faite

$$\begin{aligned} &4y^2 + 4x^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 \\ &\quad + 2by - 2gy - 2cx - 2ax - 2fx \propto d^2. \end{aligned}$$

Et comme j'ai supposé deux quantités inconnues x et y et que je ne vois point de moyen de trouver une seconde æquation, je conclus que la question n'est pas assez déterminée et que ce doit être un lieu, par la page 334 de la *Géométrie;* et lors selon la page 300, ligne 22, j'en puis prendre une à discrétion, que je choisis ici pour AB $\propto x$, et je déterminerai par cette æquation y comme s'ensuit :

$$y^2 \propto \frac{-2by + 2ax - a^2 - f^2 + 2gy + 2cx - b^2 - g^2 + 2fx - c^2 + d^2}{4},$$

dont il faut tirer la racine suivant les préceptes de la *Géométrie,* page 302,

$$y \propto \frac{-b+g}{4} + \sqrt{\frac{\begin{matrix} -4a^2 - 3b^2 \\ -4f^2 - 3g^2 \\ -4c^2 - 2bg \end{matrix} + 4d^2}{16} \; \frac{\begin{matrix} +2ax \\ +2cx \\ +2fx \end{matrix}}{4} - x^2}.$$

Et je vois d'abord, en la page 328, que c'est une ellipse ou un cercle, à cause qu'il y a $-x^2$, et puis que l'angle est droit. Il n'y a plus rien de requis pour la détermination du cercle, sinon que a^2m soit égal à pz^2. Pour le savoir, je regarde quelles sont ces quantités et d'où elles sont venues, et je vois, page 328, que a et z avec n servent à exprimer la proportion entre KL et IL, en la figure de la page 329, lesquelles sont ycy égales et, par conséquent, $a \propto z$ ou bien $a^2 \propto z^2$, reste $\frac{p}{m}$ qui a été pris pour le terme multi-

plié par x^2, qui est ycy l'unité, et ainsi $\frac{p}{m} \propto 1$, ou bien $p \propto m$, et de là je conclus que c'est un cercle. Et parce que cette æquation de la page 326, savoir

$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + Ox - \frac{p}{m}x^2},$$

sert de règle générale pour construire toutes sortes de lieux, on la peut suivre en cette sorte : sur AD donnée, du point A, soit élevée la perpendiculaire $\mathrm{AI} \propto \frac{g-b}{4}$; et à cause que g est plus grande que b, le point I doit être pris de la part de E au-dessus de la ligne AD. Mais si b eût été plus grande que g, le point I aurait été pris au-dessous de la ligne AD, de la part de F. Puis dudit point I soit menée IM parallèle à AD, en laquelle est le centre du cercle ; et pour le trouver je me sers de la détermination de IM, page 330, $\propto \frac{aom}{2pz}$, ou bien à cause que $am \propto pz$, j'ay $\frac{1}{2}\mathrm{O}$ pour la ligne IM et M est le centre du cercle. Et puisque O dénotte le terme qui est dans le vinculum multiplié par x, à savoir

$$\frac{2ax + 2cx + 2fx}{4},$$

je reconnais que

$$\mathrm{IM} \propto \frac{a + c + f}{4},$$

et le côté droit ou le diamètre estant déterminé peu après, en la ligne 15 de la même page, être $\sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$, qui est autant que $\sqrt{\mathrm{O}^2 - 4pm}$, ou bien $\sqrt{\mathrm{O}^2 - 4m^2}$, à cause que $m \propto p$, je vois qu'il faut en prendre la moitié pour avoir le rayon, et qu'au carré de $\frac{a+c+f}{4}$ qui est ici $\frac{1}{4}\mathrm{O}^2$, on doit joindre le nombre absolu dans le vinculum désigné par $-m^2$, qui est en cette équation

$$\frac{-4a^2 - 3b^2 - 4c^2 - 4f^2 - 3g^2 - 2bg + 4d^2}{16},$$

et l'aggrégat

$$\sqrt{\frac{\begin{matrix} -3a^2 - 3c^2 - 3f^2 + 2ac + 2cf + 2af. \\ -3b^2 - 3g^2 - 2bg + 4d^2 \end{matrix}}{16}}$$

fait le rayon requis de ce cercle, qu'on décrit du centre M.

Or, considérant toutes ces quantités pour faire la construction, on voit de là fort aisément, en premier lieu que la ligne AI est $\frac{1}{4}(g - b)$, c'est-à-dire qu'elle est composée de l'aggrégat ou différence des perpendiculaires tirées sur la droite AD des autres points donnés, comme ycy E et F, divisée par le nombre de tous les points donnés; à savoir en cet exemple, à cause que GF est d'un côté de la ligne AD et KE de l'autre, il faut prendre la différence qui est entre ces lignes, et la diviser par 4 à cause des quatre points donnés; au lieu que si GF et KE étaient d'un même côté de la ligne AD, il faudrait prendre leur aggrégat et diviser cette différence ou aggrégat par 5, si la question était composée de cinq points, et ainsi par 6, etc. Puis le quotient est la ligne AI; supposant le point I du côté de la ligne AD où les perpendiculaires sont les plus grandes; comme ycy à cause que KE est plus grande que GF, je tire la ligne AI du côté où est le point E.

L'on voit, en second lieu, que IM est $\frac{a+c+f}{4}$, c'est-à-dire qu'elle doit être composée de l'aggrégat de la ligne AD et de tous les segmens de cette ligne qui sont entre les points A et ceux où tombent les perpendiculaires des autres points, divisé par le nombre des points donnés.

Et enfin on voit que, pour trouver le rayon de ce cercle, il faut seulement soustraire de l'espace donné les carrés de toutes les lignes tirées de chaque point donné à tous les autres, car ils doivent être moindres que cet espace, et diviser le résidu par le nombre des points donnés, puis tirer la racine du quotient, laquelle est le rayon demandé. Comme ycy, par exemple, il faut oster de d^2 les carrés des lignes AD, AE, AF, DE, DF, EF, et ayant divisé le résidu par 4, la racine du quotient est le rayon cherché. Ou bien puisque M centre est déjà trouvé, l'on trouvera le rayon en tirant de tous les points donnés des lignes droites vers M; car si on soustrait les quarrés d'ycelles lignes de l'espace donné et qu'on divise le reste par le nombre des points donnés, la racine quarrée du quotient sera le rayon demandé.

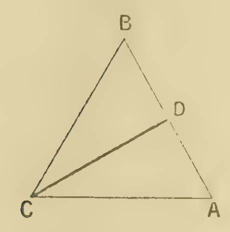
[§ 4]. *Quatrième exemple.*

De quelconque triangle rectiligne estant donné un angle, avec un des costés qui le comprennent, et la somme des deux autres

côtés, trouver le reste du triangle

$$\begin{aligned} BC &\propto a, \\ BD &\propto d, \\ AB + AC &\propto b, \\ AC &\propto x. \end{aligned}$$

Fig. 5.



d'autant que l'angle B est donné, la raison du rayon au sinus de son complément est aussi donnée; et BC étant donné, BD le sera aussi, que je nomme d.

Cela fait, il faut trouver BD en d'autres termes en cette façon, disant AB $\propto b - x$, AC $\propto x$ et BC $\propto a$, et $\frac{x^2 - a^2}{b - x}$ pour la différence de AD et BD, laquelle étant soustraite de $b - x$, restera

$$b - x - \frac{x^2 - a^2}{b - x} \propto 2d,$$

ou bien

$$b^2 - 2bx + x^2 - x^2 + a^2 \propto 2bd - 2dx,$$

ou

$$b^2 - 2bx + a^2 \propto 2bd - 2dx,$$

et ostant de part et d'autre $-2bx + 2bd$, restera

$$b^2 + a^2 - 2bd \propto 2bx - 2dx,$$

et divisant les deux parties par $2b - 2d$, j'auray

$$x \propto \frac{b^2 + a^2 - 2bd}{2b - 2d}.$$

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PESCI (G.). — TRATTATO ELEMENTARE DI TRIGONOMETRIA PIANA E SFERICA. Libro di testo per la R. Accademia Navale. In-8°, XI-313 p. Livorno, R. Giusti, 1895.

PESCI (G.). — APPENDICE AL TRATTATO ELEMENTARE DI TRIGONOMETRIA PIANA E SFERICA. Libro di testo per la R. Accademia Navale. In-8°, 79 p. Livorno, R. Giusti, 1895.

L'auteur a introduit quelques modifications dans la manière d'exposer la Trigonométrie, surtout dans le but d'obtenir la plus grande analogie possible entre la partie plane et la sphérique. Il a ajouté à la fin de l'Ouvrage plus de 2000 exercices. L'Appendice est relatif aux calculs numériques et à l'usage des Tables. Ce Traité est rédigé avec soin, et quoiqu'il soit destiné principalement aux Écoles de Marine, il pourrait bien servir avec avantage dans toute autre École.

GUNDELFINGER (S.). — VORLESUNGEN AUS DER ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE. Un vol. in-8°, VIII-434 p. Leipzig, Teubner, 1895.

Ces leçons, que publie M. Dingelbey, ont été professées par M. Gundelfinger, tant à l'Université de Tubingue qu'à la *Technische Hochschule* de Darmstadt. Elles offrent ceci d'original, que toutes les questions y sont traitées en coordonnées projectives. Les coordonnées de Descartes n'apparaissent que comme un cas particulier; l'auteur ne semble pas s'y arrêter volontiers. Les leçons proprement dites occupent un peu plus de la moitié du Volume (240 p.). Dans la première Partie, qui contient la classification des coniques et se termine par la démonstration du théorème de Pascal et du théorème de Brianchon, on notera la digression sur les formes quadratiques et sur les invariants. La seconde Partie se rapporte à la théorie des faisceaux et des réseaux de coniques soit au point de vue ponctuel, soit au point de vue tangentiel.

Un important Appendice, qui occupe le reste du Volume, contient de très nombreux exercices, tantôt avec la seule indication des paragraphes auxquels ils se rapportent, tantôt avec quelques développements; il comporte aussi divers compléments théoriques, et l'on trouvera, à la fin, la réduction aux fonctions élémentaires d'une intégrale mise sous la forme d'Aronhold,

$$\int \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 \, dx_3}{\frac{1}{2}(c_1 f'_{x_1} + c_2 f'_{x_2} + c_3 f'_{x_3})(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)},$$

où les variables x_1, x_2, x_3 sont liées par l'équation homogène du second degré

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

et la réduction à la forme normale de Weierstrass d'une intégrale elliptique donnée sous la forme

$$\int \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 \, dx_3}{\frac{1}{2}(c_1 g'_{x_1} + c_2 g'_{x_2} + c_3 g'_{x_3})\sqrt{f(x_1, x_2, x_3)}},$$

où les variables x_1, x_2, x_3 sont liées par l'équation

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

et où $g(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3)$ désignent des formes quadratiques. J. T.

WIRTINGER (W.). — UNTERSUCHUNGEN ÜBER THETAFUNCTIONEN (¹). 125 p. in-4°. Leipzig, Teubner, 1895.

I. On sait qu'on appelle fonction Θ d'ordre n de p variables $v_1, v_2, \ldots, v_p$ une fonction entière de ces variables qui, pour $2p$ groupes de périodes conjuguées, admet les multiplicateurs définis par les égalités suivantes :

$$\Theta(v_1 + \varepsilon_{1k}, v_2 + \varepsilon_{2k}, \ldots, v_p + \varepsilon_{pk}) = e^{i\pi g_k} \quad \Theta(v_1 v_2 \ldots v_p),$$
$$\Theta(v_1 + \tau_{1k}, v_2 + \tau_{2k}, \ldots, v_p + \tau_{pk}) = e^{i\pi h_k} e^{-2ni\pi v_k - ni\pi\tau_{kk}} \quad \Theta(v_1 v_2 \ldots v_p),$$

(¹) Mémoire couronné, en 1895, par la Faculté de Philosophie de l'Université de Göttingen.

Les nombres

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_p,$$
$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_p,$$

qui sont tous égaux à zéro ou à un, se nomment les *caractéristiques* de la fonction Θ; dans le Tableau de p^2 éléments formé par les ε_{ik}, tous les éléments de la diagonale principale ($i = k$) sont égaux à l'unité et les autres sont tous nuls. Le Tableau formé par les τ_{ik} est le discriminant d'une forme quadratique $\Sigma\tau_{ik}n_in_k$, et l'on suppose que, dans cette forme, le coefficient de $\sqrt{-1}$ est essentiellement positif. Toutes les fonctions entières qui vérifient les conditions précédentes s'expriment linéairement à l'aide de n^p d'entre elles [1].

Nous désignerons, en particulier, par la notation $\mathfrak{S}(v;\tau)$ les fonctions thêta du premier ordre.

M. Wirtinger étudie les propriétés d'une variété (*Mannig faltigkeit*) d'ordre p qui, pour le cas de $p = 2$, devient la surface de Kummer, du quatrième degré à seize points singuliers et sans ligne singulière [2].

Pour définir cette variété M_p, on considère 2^p fonctions $\mathfrak{S}^2(v;\tau)$ linéairement indépendantes, comme les coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ d'un point de l'espace à $2^p - 1$ dimensions et l'on montre d'abord que $p+1$ des thêta carrés et $p+1$ seulement peuvent être pris arbitrairement.

La même variété M_p peut être définie par l'ensemble des relations du quatrième degré entre les thêta carrés. On sait former toutes ces relations et l'importance du résultat précédent consiste surtout en ce qu'il rattache la variété M_p aux ensembles de points ayant une définition purement algébrique, aux figures algébriques (*algebraisches Gebild*) suivant l'expression adoptée par M. Wirtinger.

L'auteur obtient très simplement l'ordre de M_p et le genre de l'intersection complète de M_p par $n-1$ surfaces algébriques. Il déduit ces résultats du nombre $2^{p-1}(1+n^p)$ des conditions qui

---

(1) *Voir* HERMITE, *Comptes rendus*, t. XLVII.

(2) *Voir*, sur le même sujet, un Mémoire de M. Humbert (*Journal de Mathématiques*, de Jordan, 1893).

doivent exister entre les coefficients d'une forme de degré n en $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ pour qu'elle s'annule identiquement quand on y remplace les variables par les thêta carrés.

Il démontre que les points singuliers de la surface, du moins dans le cas général, s'obtiennent en donnant aux arguments v_i des valeurs égales aux demi-périodes, et il passe ensuite à l'étude de la variation des arguments le long d'une courbe tracée sur la variété M_p.

A un point donné de M_p correspondent les arguments

$$\pm v_i + \Sigma_k(m\varepsilon_{ik} + n'_k\tau_{ik}).$$

Mais il existe sur M_p des courbes algébriques telles que si un point se déplace d'une manière continue sur l'une de ces courbes, on peut faire correspondre aux coordonnées de ce point *un seul* système de valeur des arguments, à des périodes près. Nous appellerons ces courbes *courbes univoques;* elles sont caractérisées par ce fait que, pour une telle courbe, les arguments v_i sont des intégrales abéliennes de première espèce attachées à cette courbe même. Pour une courbe C algébrique qui n'est pas univoque, les arguments v_i sont encore des intégrales abéliennes de première espèce, mais attachées à une autre courbe G qui dépend de C et dont l'ordre est double de celui de C. Nous énoncerons les résultats suivants en supposant, pour simplifier, que la courbe C est univoque. Si cela n'avait pas lieu, on devrait remplacer la courbe C par la courbe G correspondante.

Il existe entre les périodes des v_i, considérées comme intégrales abéliennes attachées à la courbe C, et les périodes τ_{ik} des mêmes quantités v_i sur la variété M_p des relations linéaires à coefficients entiers dont l'auteur tire un très grand parti.

Il considère les fonctions ϑ dont les τ_{ik} sont les périodes normales des intégrales de première espèce attachées à une courbe C de M_p; il cherche les rapports de ces fonctions, qu'il appelle *thêta de Riemann correspondant à la courbe* C, avec les fonctions ϑ qui ont servi à définir M_p, et il parvient à la proposition suivante :

Une courbe algébrique C *tracée sur* M_p *a pour ordre un multiple de* $2p$; *soit* $2np$ *cet ordre. Les thêta de Riemann cor-*

respondant à la courbe C sont tels qu'après une transformation du $n^{\text{ième}}$ degré, ils se décomposent en deux facteurs dont l'un donne les thêta de M_p.

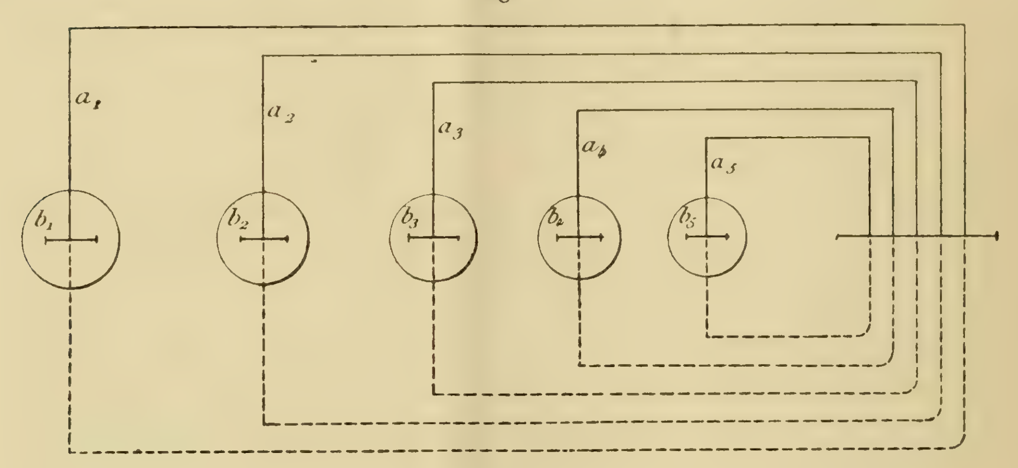
Ensuite vient la généralisation d'un théorème fondamental relatif aux fonctions thêta de Riemann qui correspondent à une courbe C de genre p. Les fonctions $2p$ fois périodiques, composées rationnellement avec ces thêta, peuvent s'exprimer algébriquement à l'aide de p points de la courbe C, quand on établit entre les arguments des thêta et les p points de C les relations qui conduisent au problème d'inversion de Jacobi. Pour les thêta les plus généraux, on obtient un résultat analogue en considérant une courbe C de la variété M_p et les intégrales abéliennes attachées à cette courbe. Le problème d'inversion qui se présente alors devient le problème d'inversion de Jacobi si la courbe C est d'ordre $2p$, et l'on arrive à cette conclusion : la condition nécessaire et suffisante pour que les thêta d'une variété M_p se réduisent aux thêta de Riemann est qu'il existe sur M_p une courbe dont l'ordre soit égal à $2p$.

La première partie se termine par l'exposé de principes permettant de classer et d'étudier les courbes algébriques tracées sur M_p et par des remarques sur les thêta de M_p considérés comme dépendant non seulement des p arguments, mais encore des quantités τ_{ik}.

II. La seconde partie du Mémoire est consacrée à l'étude de fonctions $\mathfrak{S}$ dont la définition est analogue à celle des fonctions $\mathfrak{S}$ de Riemann, et qui se réduisent à celles-ci dans un cas limite. Les constantes τ_{ik} des $\mathfrak{S}$ de M. Wirtinger se définissent à l'aide des périodes de p intégrales abéliennes de première espèce attachées à une surface de Riemann de genre $2p+1$ que l'on obtient en réunissant deux exemplaires identiques d'une surface de Riemann de genre $p+1$. Cette surface est telle que $p+1$ de ses intégrales de première espèce peuvent se réduire à des intégrales de genre $p+1$ et aussi que les thêta de Riemann qui lui correspondent se décomposent en deux facteurs après une transformation convenable. Il nous faut, pour préciser la définition de ces fonctions $\mathfrak{S}$, expliquer en détail la construction de cette surface de Riemann de genre $2p+1$.

Nous supposons donnée une surface F_1 de genre $p+1$ composée de deux feuillets réunis par $p+2$ lignes de croisement (¹) et nous traçons les coupures a_i, b_i comme l'indique la *fig.* 1 construite pour le cas où $p+1=5$.

Fig. 1.



Nous prenons une surface F_2 identique à la précédente et nous désignons par a'_i, b'_i les coupures qui sont situées dans F_2 comme a_i et b_i sont situées dans F_1; enfin, nous réunissons le bord droit de la coupure b'_i au bord gauche de la coupure b_1. La surface F ainsi obtenue est simplement connexe. Ses coupures sont : une coupure b formée du bord gauche de b'_1 et du bord droit de b_1, la coupure a correspondante formée des coupures a_1, a'_1 réunies en une seule, et les autres coupures a_i, b_i, a'_i, b'_i; elle est bien du genre $2p+1$.

Les $p+1$ intégrales de première espèce de F_1 donnent des intégrales de première espèce de F; on peut définir p autres intégrales de première espèce $v_1(z)$, $v_2(z)$, ..., $v_p(z)$ telles que les modules de périodicité de ces p intégrales soient donnés par le Tableau suivant :

	a_2.	a_3.		a_{p+1}.	b_2.	b_3.		b_{p+1}.
$v_1(z)$......	1	0	...	0	τ_{11}	τ_{12}	...	τ_{1p}
$v_2(z)$......	0	1	...	0	τ_{21}	τ_{22}	...	τ_{2p}
....	.	.	...	.	...	...	...	...
$v_p(z)$......	0	0	...	1	τ_{p1}	τ_{p2}	...	τ_{pp}

(¹) *Voir* PICARD, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 373 et 376.

où les quantités τ_{ik} sont telles que l'on a

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}$$

et que dans la forme

$$\Sigma \tau_{ik} n_i n_k,$$

la partie réelle est essentiellement positive.

Ces quantités τ_{ik} peuvent donc servir à la définition de fonction $\mathfrak{J}$ à p variables. Les fonctions $\mathfrak{J}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ ainsi définies sont celles qui sont introduites par M. Wirtinger.

Les fonctions uniformes d'un point de la surface F que l'on obtient en remplaçant dans ces thêta chacun des arguments v_i par l'intégrale $v_i(z)$ diminuée d'une constante arbitraire e_i,

$$\mathfrak{J}[v_i(z) - e_i]$$

donnent lieu à une étude analogue à celle que l'on fait pour les fonctions de Riemann

$$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i],$$

quand on cherche les zéros de ces fonctions, leurs relations avec les quantités arbitraires G_i, les rapports de ces fonctions avec le problème d'inversion de Jacobi, leur expression au moyen de fonctions algébriques.

Dans le cas particulier où $p = 2$, l'auteur définit directement les intégrales correspondant à ses fonctions $\mathfrak{J}$ en considérant, d'après M. Klein (¹), les coniques de contact d'une courbe du quatrième ordre C_4 et il trouve que la surface de Kummer, définie à l'aide des thêta ainsi obtenus, passe par la courbe C_4.

Pour terminer ces indications trop rapides, nous mentionnerons ce résultat que, pour $p > 5$, les thêta de M. Wirtinger dépendent de $3p$ modules, tandis que les thêta de Riemann dépendent, comme on le sait, de $3p - 3$ modules. E. Lacour.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXXVI.

C. JORDAN, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. Deuxième édition, entièrement refondue. Tome troisième : *Calcul intégral. Équations différentielles.* In-8°, xi-542 p.; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Nous avons déjà rendu compte des deux premiers Volumes de cette nouvelle édition de l'excellent Ouvrage de M. C. Jordan. Le Tome troisième, dont l'apparition complète et termine l'Ouvrage, a subi des modifications moins profondes que les deux précédents. L'auteur a supprimé la Note finale sur quelques points de la théorie des fonctions, parce que les principaux résultats contenus dans cette Note avaient été introduits dans les deux premiers Volumes. Les divers passages où intervenaient les fonctions elliptiques ont vu les sn$u$, cn$u$, dn$u$ céder la place aux fonctions nouvelles introduites par M. Weierstrass. Dans la théorie des équations linéaires à coefficients constants, M. Jordan a fait sortir d'un injuste oubli une méthode où l'on traite le symbole de différentiation D_t comme une puissance. Il a ajouté aussi la méthode de démonstration que l'on doit à Cauchy et à M. Lipschitz pour établir l'existence des intégrales dans le cas où le système des équations différentielles ne peut être considéré comme connu que pour des valeurs réelles attribuées aux variables réelles. Enfin, il a fait connaître les méthodes proposées par Kummer et Halphen pour l'intégration de certaines équations linéaires.

Ces indications paraîtront suffisantes à nos lecteurs qui ont apprécié depuis longtemps le mérite de cet Ouvrage; sous sa forme nouvelle, il continuera à rendre d'incontestables services, à la fois aux maîtres et aux étudiants.

L. SAUVAGE, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. — THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES. 1 vol. in-4°, 179 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Les beaux travaux de M. Fuchs sur les équations différentielles linéaires et homogènes sont aujourd'hui classiques. M. Sauvage

s'est proposé de généraliser les résultats de M. Fuchs, en étudiant un système de n équations linéaires et homogènes du premier ordre à n fonctions inconnues et à une variable indépendante.

M. Sauvage s'occupe depuis longtemps de cette importante étude; il lui a donné, dans le livre que nous analysons, une forme définitive des plus simples, en employant un procédé uniforme de calcul fondé sur la théorie des diviseurs élémentaires de M. Weierstrass.

Nous nous attacherons surtout dans notre analyse aux parties personnelles à l'auteur.

Abordons de suite l'étude du Chapitre II, intitulé *des diviseurs élémentaires*. Soit

$$|pA_{ij}+qB_{ij}|$$

un déterminant à n^2 éléments : ce déterminant est une fonction entière, homogène, et qu'on supposera du degré n à la fois en p et q. Chaque mineur, y compris le déterminant lui-même, admet des diviseurs de la forme $(ap+bq)^l$. On forme, pour chaque ordre de mineurs, le plus grand commun diviseur de ces mineurs. Chaque facteur du quotient des plus grands communs diviseurs des mineurs de deux ordres consécutifs est un diviseur élémentaire du déterminant proposé. Partant de cette définition, on démontre que, si deux formes bilinéaires aux $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \qquad Q = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

sont changées en deux autres formes analogues P' et Q' par les substitutions

$$x_i = \Sigma h_{ij} x'_j, \qquad y_i = \Sigma k_{ij} y'_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et, si les déterminants H et K des substitutions sont différents de zéro, les deux déterminants des formes

$$pP + qQ \quad \text{et} \quad pP' + qQ'$$

ont mêmes diviseurs élémentaires. Réciproquement, si ces deux derniers déterminants admettent les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer les constantes h_{ij} et k_{ij} des deux déterminants H et K différents de zéro.

Ces théorèmes appartiennent à M. Weierstrass. Mais le théorème fondamental est démontré au moyen d'un calcul très élégant de M. Darboux. Parmi le grand nombre de conséquences qui se tirent de ces propositions, il faut remarquer, dans le livre de M. Sauvage, la formation *a priori*, d'après M. Weierstrass, de déterminants admettant des diviseurs élémentaires donnés.

L'application des formules ainsi établies est continuelle dans la théorie des équations différentielles dont l'auteur s'occupe. On en voit de suite la raison : c'est la dépendance bilinéaire des éléments des solutions d'un système différentiel par rapport au numérotage des inconnues d'une part, et par rapport à celui des solutions d'autre part. L'auteur s'est borné aux théorèmes de la théorie des diviseurs élémentaires qui lui sont utiles pour la suite : il a fait autre part une étude générale de cette théorie, d'après la méthode de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1893).

La lecture de ce Chapitre II, particulièrement intéressante, est facilitée par deux Notes placées à la fin du Volume : l'une de ces Notes contient un exposé concis et clair des théorèmes généraux de Cauchy sur les déterminants.

Tous les autres Chapitres (excepté le dernier) se rapportent aux systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum a_{ij} \frac{dy_j}{dx} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le premier Chapitre, on retrouve les définitions classiques *d'une solution, d'un système fondamental de solutions*, exposées avec une généralité complète, ainsi que les conséquences ordinaires de ces définitions.

L'équation d'ordre n

$$(2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y$$

peut être rattachée à un cas particulier du système (1); mais elle a une théorie particulière, celle que M. Fuchs a donnée. L'auteur compare la méthode particulière à la méthode générale. Il faut noter, dans le Chapitre I, le procédé simple qui sert à l'auteur

pour intégrer le système différentiel

$$(3)\qquad (x-a)\frac{dy_i}{dx}=\sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

dans le domaine du point singulier $x=a$. Cette question sert de base non seulement aux théories du début, mais à toutes celles des Chapitres III et suivants.

La manière dont se comportent les éléments d'une solution dans le domaine d'un point singulier fait l'objet du Chapitre III. Montrer que ces points caractérisent les systèmes de la forme (1), trouver par la méthode des diviseurs élémentaires la manière la plus simple dont se comportent les intégrales dans le voisinage de chaque point singulier, puis montrer à un point de vue plus pratique les mêmes relations en se conformant aux principes de M. Fuchs, tel est le plan réalisé dans ce Chapitre.

Au Chapitre suivant, on trouve l'intégration par les séries des systèmes de la forme (1), développée particulièrement et d'une manière remarquable par M. J. Horn dans le cas des systèmes d'équations (3), dits *canoniques*. Le rôle des diviseurs élémentaires est ici considérable.

Le Chapitre V est consacré à la recherche des systèmes dits *réguliers*, c'est-à-dire dont chaque élément de solution est un agrégat linéaire d'expressions de la forme

$$(x-a)^r[a_0+a_1\log(x-a)+\ldots+a_k\log^k(x-a)],$$

et infinies d'ordre fini pour $x=a$. L'auteur montre que tout système régulier peut être ramené à un système canonique par une suite mélangée de substitutions de l'une quelconque des deux sortes

$$y_i|x^k y_i, \quad \text{et} \quad y_i|z_i+\sum_j m_j y_j (j\neq i).$$

Mais le seul cas donnant lieu à un théorème d'un énoncé simple est celui de l'équation (2) de M. Fuchs.

Les théories de M. Floquet sur les équations à coefficients uniformes périodiques et à intégrales uniformes sont exposées au Chapitre VI. L'emploi des diviseurs élémentaires fait l'originalité

de la rédaction nouvelle. La belle étude des équations

$$\frac{du}{dx} = -Av + Bw,$$

$$\frac{dv}{dx} = Au - Cw,$$

$$\frac{dw}{dx} = -Bu + Cw$$

de M. Picard trouve ici sa place.

Le dernier Chapitre est consacré d'abord aux systèmes d'équations d'ordre n que l'on peut ramener aux systèmes de la forme (1). La question est traitée avec ampleur d'après les théories de M. Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*), principalement dans le cas des systèmes dits *algébriques*. La distinction importante que l'auteur introduit entre les mots *solution* et *intégrale,* quand il s'agit de systèmes d'équations différentielles, lui sert de transition pour exposer les belles recherches de M. Darboux sur les intégrales rationnelles (*Comptes rendus,* 1880), et pour esquisser l'exposition des fonctions invariantes de M. Appell.

On voit, par ce résumé, que le livre de M. Sauvage contient un exposé élémentaire des Théories fondamentales relatives à l'étude des équations différentielles linéaires et homogènes à une seule variable indépendante, accompagné de plusieurs applications intéressantes.

MAGGI (G.-A.), Professeur à l'Université de Pise. — PRINCIPII DELLA TEORIA MATEMATICA DEL MOVIMENTO DEI CORPI. Corso di Meccanica razionale. 1 vol. XVIII-503 p. in-8°. Milano, Hoepli, 1896.

On recherche aujourd'hui, dans un cours de Mécanique rationnelle, autre chose que les exercices multiples et, le plus souvent, bizarres dont se sont longtemps composés nos traités classiques, et qui, toujours identiques au point de vue des principes mis en œuvre, se distinguent à peine par des détails de mise en équation ou d'intégration complètement étrangers au véritable objet de la Mécanique. L'énoncé des hypothèses fondamentales, en particu-

lier, présente encore certaines obscurités dont la disparition intéresse tous ceux qui ont souci de la clarté des principes et de la solidité des théories. M. Maggi est du nombre : il a manifestement travaillé, par-dessus tout, à donner aux notions essentielles de la Dynamique cette netteté qui leur manque. Il entend même pousser la rigueur plus loin, en excluant de la Mécanique la phraséologie introduite par les fondateurs du Calcul infinitésimal et qu'on est parvenu aujourd'hui à éliminer de l'Analyse : en un mot, en n'admettant aucune notion étrangère à l'Algèbre ou à la Géométrie élémentaire qui ne puisse se ramener à celle de limite. C'est ainsi que la locution de *point matériel* n'y figure que pour mémoire. On peut contester la nécessité d'une pareille réforme, étant donné que ces formules incorrectes n'ont subsisté que là où leur présence ne peut entacher l'exactitude des conclusions; mais, puisque dans d'autres parties de la Science, et même dans certaines parties de la Mécanique, on a pu s'exprimer d'une manière entièrement rigoureuse sans compromettre la simplicité de l'exposition, il ne peut y avoir que des avantages à réaliser le même progrès partout. C'est ce que M. Maggi a tenté, et à quoi il a au moins partiellement réussi.

L'Ouvrage débute par un rappel de principes empruntés à l'Analyse et à la Géométrie. La théorie des segments constitue, bien entendu, la majeure partie de ce chapitre préliminaire; le reste est consacré aux propriétés les plus importantes des intégrales multiples et curvilignes.

Dans l'exposé de la Cinématique, l'auteur laisse de côté la difficulté relative à l'existence des axes fixes; quant au temps, il en subordonne la notion à celle de la rotation terrestre. Suivant un usage auquel on désirerait voir l'enseignement français se conformer, les systèmes de solides invariables ne sont pas considérés comme formant l'unique objet de la Mécanique rationnelle et, par conséquent, la Cinématique comprend l'étude de la déformation et du mouvement des espaces déformables. L'auteur, comme nous l'avons dit, cherche à se passer des conceptions de *déformation infiniment petite* et de *déformation d'un volume infiniment petit;* mais ce n'est pas sur ce point qu'il nous semble avoir réalisé, à cet égard, le progrès le plus essentiel.

La tentative de M. Maggi aboutit à des résultats bien plus

avantageux en Dynamique, où les principes fondamentaux, que l'on énonce ordinairement en partant de la conception d'un être absolument irréel, le point matériel, sont déduits de la considération de l'*accélération moyenne* d'un corps. Il est vrai que l'on ne peut définir cette accélération moyenne, du moins avant l'introduction de l'idée de masse, que pour les corps supposés homogènes, de sorte que la conception infinitésimale reparaît avec un postulat d'après lequel tout système naturel peut être considéré, soit comme un ensemble de parties homogènes, soit comme une limite de pareils ensembles. Néanmoins, si l'on considère avec Kirchhoff la Mécanique comme une description des phénomènes du mouvement, description que l'on doit s'efforcer de rendre aussi simple et aussi exacte que possible, il est certain que la conception de M. Maggi est, à ce double point de vue, préférable à l'ancienne.

Étant donnée cette conception, il est clair que la Dynamique du point matériel doit cesser de faire partie de la Dynamique proprement dite ; aussi, les résultats qui en dépendent sont-ils donnés par l'auteur, non dans la Dynamique, mais dans la Cinématique.

Une des principales difficultés théoriques de la Dynamique est la définition de la masse. A notre avis, cette définition ne peut être cherchée que dans le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, convenablement modifié. C'est ce qu'a déjà fait M. Waschy (*Nouv. Ann. de Math.*, 1893), mais en faisant dépendre le principe en question de la loi d'attraction de Newton, ce qui ne nous paraît pas nécessaire. C'est aussi dans cet ordre d'idées que rentre la manière d'opérer de M. Maggi : pour définir le rapport des masses de deux corps, il lui suffit de renverser le rapport des accélérations moyennes qu'ils prendraient si on les supposait mis en présence l'un de l'autre et soustraits à l'influence de tout autre corps. C'est bien, comme on le voit, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction qui est invoqué ; seulement il nous semble alors peu logique d'énoncer un peu plus loin ce principe comme une vérité distincte de la première.

Ces principes et leurs conséquences les plus générales forment une première partie de la Dynamique, intitulée : *Lois générales du mouvement*. La seconde, ou *Calcul du mouvement*, comprend l'application de ces principes aux problèmes qui peuvent se traiter

avec leur seul secours, mais aussi l'introduction de principes nouveaux, en particulier ceux qui concernent les forces de liaison. L'ordre suivi à cet égard diffère notablement de celui qui nous est familier et n'est pas sans soulever quelques objections. L'auteur traite d'abord des pressions internes et superficielles d'un corps quelconque, et en développe la théorie en même temps que celle de la force appliquée à l'élément de volume, quoique les unes soient des forces de liaison et les autres des forces directement appliquées. Quant aux réactions qui naissent des liaisons imposées aux corps dont on s'occupe, elles sont considérées comme dérivant des pressions extrêmes. L'auteur les détermine par la condition que leur travail virtuel soit nul, quitte à ajouter aux forces ainsi définies des forces de frottement. Il écrit alors les équations de Lagrange et traite quelques applications en se bornant d'ailleurs, comme l'indique l'objet du livre indiqué par son titre, à celles qui sont nécessaires pour mettre en lumière les principes qu'il a exposés. Un chapitre consacré à la Dynamique des corps variables (élasticité et hydrodynamique) termine cet Ouvrage, où l'on reconnaîtra une tentative digne d'attention pour établir, sur des bases plus solides, la Mécanique rationnelle.

MÉLANGES.

SUR UNE FORME DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION D'EULER;

Par M. J. HADAMARD.

Stieltjes a démontré (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XII, p. 222-227; 1888) que l'intégrale générale de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}, \tag{1}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} R(x) &= a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \\ &= a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

peut se mettre sous la forme

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2-2m \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2+m & a_3 \\ xy & a_2-2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

(m = const. arbitraire).

L'auteur obtient ce résultat par une voie synthétique. Il me semble cependant que l'équation (3) est liée de la manière la plus immédiate à l'intégrale de l'équation d'Euler telle qu'elle résulte, par exemple, du théorème d'Abel, de manière que celui-ci peut être considéré comme donnant très simplement toutes les formes connues de l'intégrale.

Le théorème d'Abel montre en effet que l'intégrale de l'équation (1) s'obtient en écrivant qu'il existe une constante c et des nombres (variables) m, n tels que l'équation

$$\sqrt{R(X)} = (mX+n)(X-\alpha)$$

ou

$$(mX+n)^2(X-\alpha) - a_0(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta) = 0$$

ait pour racines x, y et c. Ceci s'écrit encore par l'identité (ayant lieu quel que soit X)

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(mX+n)^2(X-\alpha) \\ &\quad - a_0(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta) - A(X-x)(X-y)(X-c) = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans cette identité, faisons successivement $X=\beta$, $X=\gamma$, $X=\delta$: nous aurons les relations

$$\begin{aligned} (m\beta+n)\sqrt{\beta-\alpha} &= \sqrt{A(\beta-c)}\sqrt{(\beta-x)(\beta-y)}, \\ (m\gamma+n)\sqrt{\gamma-\alpha} &= \sqrt{A(\gamma-c)}\sqrt{(\gamma-x)(\gamma-y)}, \\ (m\delta+n)\sqrt{\delta-\alpha} &= \sqrt{A(\delta-c)}\sqrt{(\delta-x)(\delta-y)}, \end{aligned}$$

entre lesquelles il devient aisé d'éliminer m, n, A ; le résultat est évidemment de la forme

$$(5)\qquad \lambda_2\sqrt{(\beta-x)(\beta-y)} + \lambda_3\sqrt{(\gamma-x)(\gamma-y)} + \lambda_4\sqrt{(\delta-x)(\delta-y)} = 0$$

(λ_2, λ_3, λ_4 étant constants). C'est une première forme bien connue de l'intégrale cherchée.

Posons maintenant $x+y=2\xi$, $xy=\eta$ et regardons ξ, η comme des coordonnées rectilignes. L'équation (5), s'écrivant

$$\lambda_2\sqrt{\beta^2-2\beta\xi+\eta}-\lambda_3\sqrt{\gamma^2-2\gamma\xi+\eta}+\lambda_4\sqrt{\delta^2-2\delta\xi+\eta}=0,$$

représente une conique tangente aux trois droites

$$(\beta) \qquad \beta^2-2\beta\xi+\eta=0,$$

$$(\gamma) \qquad \gamma^2-2\gamma\xi+\eta=0,$$

$$(\delta) \qquad \delta^2-2\delta\xi+\eta=0.$$

D'ailleurs, il est clair que, de même, cette conique est tangente à la droite

$$(\alpha) \qquad \alpha^2-2\alpha\xi+\eta=0.$$

Ainsi *l'intégrale de l'équation* (1) *n'est autre que l'équation générale des coniques tangentes aux quatre droites* (α), (β), (γ), (δ), *équation où l'on doit remplacer* ξ *et* η *par* $\frac{x+y}{2}$ et xy.

Il est facile d'écrire cette équation générale sans savoir résoudre l'équation $R(x)=0$. Les quatre droites en question sont tangentes à la conique

$$(6) \qquad \xi^2-\eta=0,$$

aux points

$$(7) \qquad \xi=\alpha, \qquad \xi=\beta, \qquad \xi=\gamma, \qquad \xi=\delta,$$

que l'on peut considérer comme déterminés par l'équation de la conique (6) avec la conique

$$a_0\eta^2+4a_1\xi\eta+2a_2(2\xi^2+\eta)+4a_3\xi+a_4=0,$$

de sorte que l'équation générale des coniques passant par ces quatre points est

$$(8) \qquad a_0\eta^2+4a_1\xi\eta+2a_2(2\xi^2+\eta)+4a_3\xi+a_4+4m(\xi^2-\eta)=0$$

(m étant un paramètre arbitraire). L'équation cherchée s'obtiendra en prenant la polaire réciproque de la courbe (8) par rapport à la conique directrice (6). On retombe ainsi sur le résultat de Stieltjes.

NOUVEAUX EXEMPLES D'INTERPOLATIONS ILLUSOIRES;

Par M. Ch. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. L'interpolation ne peut évidemment atteindre son but que si la différence entre la fonction à représenter et le polynome entier substitué de la sorte à cette dernière tend vers zéro, en même temps que se multiplient indéfiniment les valeurs particulières de la variable pour lesquelles l'égalité numérique entre l'une et l'autre a été établie. La réalité du fait n'avait jamais soulevé l'ombre d'un doute, cela sous la seule condition que la fonction fût continue dans l'intervalle où l'on opère, quand j'ai montré la possibilité du contraire, délimité ensuite un cas étendu et bien suffisant pour la pratique, où le succès de l'interpolation est certain. [*Observations sur la légitimité de l'interpolation* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. I; 1884.)]

Ces deux constatations m'ont paru offrir un assez grand intérêt au point de vue, non seulement du problème de l'interpolation pris en lui-même, mais encore de la théorie générale des fonctions, car elles opposent une fois de plus la solidité et l'efficacité des raisonnements appuyés sur les propriétés des séries entières, à la faiblesse et à l'impuissance de ceux d'où cette considération fondamentale a été écartée. La première a pu toutefois être jugée insuffisante, le cas d'interpolation impossible que j'ai signalé étant isolé, peu normal en outre parce qu'il faut opérer dans un intervalle imaginaire spécial. Mais je viens d'apercevoir une infinité d'autres exemples du même accident, où les calculs sont faciles sans que l'on ait à sortir des conditions de l'interpolation pratique. Je vais en rapporter deux qui me paraissent être particulièrement simples et concluants.

2. En représentant par $f(x)$ une fonction supposée olotrope dans une aire donnée S_x, par

$$(1) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

des quantités choisies arbitrairement dans cette aire, et qu'ici nous prendrons inégales; par $f_n(x)$ le polynome de degré maximum $n-1$ que déterminent les n conditions numériques

$$f_n(x_1) = f(x_1), \qquad f_n(x_2) = f(x_2), \qquad \ldots, \qquad f_n(x_n) = f(x_n);$$

en posant enfin

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

on a la formule

$$(2) \qquad f(x) - f(x_n) = \omega(x) \mathcal{E}_t \frac{f(t)}{[\omega(t)(t-x)]} \qquad (\textit{loc. cit.}, 8),$$

où la valeur de x est aussi intérieure à S_x, et où le résidu doit naturellement être étendu aux $n+1$ infinis (1) et x de la fonction de t qu'il concerne.

La discussion générale de cette formule est impraticable dès que le nombre n cesse d'être très petit; mais une remarque très simple la rend facile dans le cas où $f(x)$ se réduit à une fraction rationnelle. En appelant effectivement $N(x)$, $D(x)$ les deux termes de cette fraction, la fonction de t placée sous le signe $\mathcal{E}$ s'écrit

$$(3) \qquad \frac{N(t)}{D(t)\,\omega(t)(t-x)},$$

et le résidu à calculer peut évidemment être considéré comme l'excès de

$$(4) \qquad \mathcal{E}_t \frac{N(t)}{[D(t)\,\omega(t)(t-x)]},$$

résidu *intégral* de cette autre fraction rationnelle, sur

$$\mathcal{E}_t \frac{N(t)}{[D(t)]\,\omega(t)(t-x)},$$

somme de ses résidus partiels adhérents aux racines seulement de

l'équation entière

$$(5) \qquad D(t) = 0.$$

Or, dès que n est assez grand pour rendre le degré effectif du dénominateur de la fraction (3) supérieur de plus d'une unité à celui du numérateur, le résidu intégral (4) s'évanouit (*loc. cit.*, 5). Dans ce cas donc, la formule (2) peut être réduite à celle-ci, maintenant très simple,

$$(6) \qquad f(x) - f_n(x) = -\omega(x) \mathcal{E}_t \frac{N(t)}{(D(t))\,\omega(t)(t-x)}.$$

3. Cela posé, interpolons d'abord la fraction rationnelle et réelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{x^2+1},$$

pour les valeurs réelles de x que l'on obtient en appelant

$$(7) \qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_\nu,$$

ν quantités inégales toutes > 0, puis en prenant $n = 2\nu$ et les valeurs (1) égales à

$$\pm \xi_1, \quad \pm \xi_2, \quad \ldots, \quad \pm \xi_\nu.$$

Il vient alors

$$\omega(x) = (x^2 - \xi_1^2)\ldots(x^2 - \xi_\nu^2), \qquad \omega(t) = (t^2 - \xi_1^2)\ldots(t^2 - \xi_\nu^2),$$
$$N(t) = 1, \qquad D(t) = t^2 + 1,$$

moyennant quoi l'équation (5) n'offre que les racines $t = \pm i$, toutes deux simples, et la formule (6) donne facilement

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{x^2+1} - f_n(x) \\ & = -(x^2 - \xi_1^2)\ldots(x^2 - \xi_\nu^2) \mathcal{E}_t \frac{1}{(t^2+1)(t^2 - \xi_1^2)\ldots(t^2 - \xi_\nu^2)(t-x)} \\ & = \frac{(-1)^\nu}{x^2+1} \left(\frac{x^2 - \xi_1^2}{1 + \xi_1^2} \cdots \frac{x^2 - \xi_\nu^2}{1 + \xi_\nu^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Si, nommant Ξ, Θ deux quantités positives quelconques dont la

seconde surpasse 1, on prend maintenant toutes les quantités (7) inférieures à Ξ, puis x réelle sous la condition

$$|x| > \sqrt{\Theta + \Xi^2 + \Theta\Xi^2},$$

on aperçoit immédiatement que, dans le dernier membre des relations (8), chacun des ν facteurs du produit placé entre parenthèses est $> \Theta$, et qu'ainsi, bien loin de tendre vers 0 quand ν augmente indéfiniment, ce produit, supérieur à Θ^ν, est infini, l'excès aussi de la fonction considérée sur le polynome qui est réputé fournir sa valeur avec une approximation illimitée.

4. Nous ferons en second lieu

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{x^2 - 1},$$

et, représentant par

$$(9) \qquad \xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_{\nu'},$$

$$(10) \qquad \xi''_1, \quad \xi''_2, \quad \ldots, \quad \xi''_{\nu''},$$

deux groupes de quantités réelles, toutes comprises entre 0 et 1 *exclusivement*, nous prendrons $n = 2\nu' + 2\nu''$ et les termes

$$(11) \qquad \pm\xi'_1, \ldots, \pm\xi'_{\nu'}, \quad \pm\xi''_1, \ldots, \pm\xi''_{\nu''},$$

pour composer la suite (1).

En opérant comme ci-dessus (3), on arrive, pour $x = 0$, à

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)_{x=0} - f_n(0)$$
$$= (-1)^{\nu' + \nu'' + 1}\left[\left(\frac{\xi'^2_1}{1 - \xi'^2_1} \cdots \frac{\xi'^2_{\nu'}}{1 - \xi'^2_{\nu'}}\right)\left(\frac{\xi''^2_1}{1 - \xi''^2_1} \cdots \frac{\xi''^2_{\nu''}}{1 - \xi''^2_{\nu''}}\right)\right],$$

puis, en valeur numérique, à l'inégalité

$$(12) \qquad \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)_{x=0} - f_n(0) > 2^{\nu''}\frac{\xi'^2_1}{1 - \xi'^2_1} \cdots \frac{\xi'^2_{\nu'}}{1 - \xi'^2_{\nu'}},$$

quand on assujettit chacune des quantités (10) à la condition

$$\xi > \sqrt{\frac{2}{3}},$$

donnant évidemment

$$\frac{\xi^2}{1 - \xi^2} > 2.$$

Ainsi donc, on aura beau multiplier, resserrer arbitrairement les quantités (9) à l'intérieur de l'intervalle (0, 1), on n'en pourra pas moins prendre ensuite ν'' assez grand pour empêcher le second membre de l'inégalité (12) de tendre vers 0, le premier à plus forte raison, et même pour les rendre tous deux infinis. De cette manière, les valeurs (11) seront aussi nombreuses, aussi rapprochées qu'on le voudra dans l'intervalle $(-1, +1)$; jamais, pour $x = 0$, la valeur du polynome $f_n(x)$ ne justifiera le préjugé traditionnel consistant à lui attribuer pour limite la valeur correspondante de la fonction soumise à l'interpolation.

A l'exemple précédent (3), choisi de manière à faire intervenir une fonction demeurant continue pour toutes les valeurs réelles de la variable, on pourrait objecter que la valeur considérée pour x a été prise trop en dehors de l'intervalle où l'interpolation a été exécutée. Mais aucune objection de ce genre ne peut être formulée au sujet de celui-ci, puisque la valeur 0 attribuée à x est absolument centrale relativement à l'ensemble de celles prises pour éléments du calcul du polynome $f_n(x)$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ABEL (N.-H.). — *Untersuchungen über die Reihe*

$$1 + \frac{1}{m}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

(1826). Herausgeg. von A. Wangerin. In-8°, Leipzig, Engelmann. Gebd. 1 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, N° 76).

D'OVIDIO (E.). — *Geometria analitica.* In-8°, Torino, Bocca. 10 l.

GÖPEL (A.). — *Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung.* (1847). Herausgegeben von H. Weber. In-8°. Leipzig, Engelmann. Gebd. 1 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N° 67.)

MAGGI (G.-A.). — *Principi della teoria matematica del movimento dei corpi.* In-8°. Milano, Hœpli. 12 l.

POINCARÉ (H.) — *Calcul des probabilités.* Leçons professées au Cours de Physique mathématique pendant le 2e semestre 1893-1894. In-8°, 279 p. Paris, Carré.

PUCHBERGER (E.). — *Eine allgemeine Integration der Differentialgleichungen.* 3. Heft. Gr. in-8°, v-51 p. Wien, Gerold's Sohn. 1 m. 60 pf.

WEBBER (E.). — *Applicazioni geometriche e analitiche di Calcolo differenziale ed integrale.* In-16. Milano, Rechiedel. 3 l. 50 c.

NEUMANN (C.). — *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernewirkungen m. besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen.* Gr. in-8°, XXI-292 p. Leipzig, Teubner. 10 m.

PLÜCKER (J.). — *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen.* [*Auftrage der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* herausgeg. von H. Schönflies u. F. Pockels (In 2 Banden)]. 2. Bd. *Physikalische Abhandlungen.* Herausgeg. von F. Pockels. Gr. in-8°, XVIII-834 p. avec 78 fig. et 9 pl. Leipzig, Teubner. 30 m.

RISTEEN (A.-D.). — *Molecules and the Molecular Theory of Matter.* Illustrated. In-8°. Boston. 9 sh.

CAYLEY (A.). — *Collected Mathematical Papers*. Vol. 9. In-4°. Cambridge Univ. Press. 25 sh.

KOENIGSBERGER (L.). — *Hermann v. Helmholtz' Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik u. Mechanik*. Gr.-8°, III-58 p. avec 1 portrait. Leipzig, Teubner. 2 m. 40 pf.

LEROY (C.-F.-A.). — *Traité de Géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés et de la Théorie des engrenages cylindriques et coniques*. 14e édit., t. I, in-4°, XX-370 p. et album de 71 pl. Paris, Gauthier-Villars et fils. 16 fr.

ISSALY. — *Optique géométrique*. Septième Mémoire : *Propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons de nature quelconque*. In-8°. 62 p. Bordeaux, impr. Gounouilhou.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. PAPELIER. — Leçons sur les coordonnées tangentielles, avec une préface de M. *P. Appell*, Membre de l'Institut. Paris, Nony et Cie, 2 vol.

Dans cet Ouvrage, l'auteur a repris toutes les questions étudiées d'ordinaire en coordonnées ponctuelles, et a montré tout le parti que l'on peut tirer des coordonnées tangentielles ; il y a ajouté d'intéressants Chapitres sur les réseaux de coniques et de quadriques, sur les propriétés de deux et trois coniques.

Écrit avec rigueur et clarté, ce Traité est appelé à rendre des services au débutant aussi bien qu'à l'étudiant déjà habitué aux méthodes de la Géométrie analytique. A. Grévy.

Alfredo CAPELLI. — Lezioni di Algebra complementare. Napoli, libreria scientifica e industriale di B. Pellerano.

Cet Ouvrage est, comme l'indique l'auteur dans sa Préface, en grande partie la reproduction de leçons faites à l'Université de Naples ; il correspond assez bien à nos cours de Mathématiques spéciales.

Les premiers Chapitres sont relatifs à la théorie des nombres irrationnels, basée sur la séparation des nombres rationnels en deux classes ; à l'analyse combinatoire, à la théorie des déterminants et au calcul des imaginaires.

Dans les Chapitres V à VIII, l'auteur traite de la résolution algébrique des équations ; après avoir résolu les équations du troisième et du quatrième degré, il établit qu'il est impossible de résoudre par radicaux les équations de degré supérieur ; notons une démonstration rigoureuse du théorème de d'Alembert, qui est une heureuse modification de la démonstration de Cauchy.

Les deux derniers Chapitres sont relatifs à la résolution numérique des équations.

Ce livre, facile à lire, permet à l'étudiant d'aborder les théories

les plus élevées de l'Algèbre supérieure ; des notes et exercices, placés à la suite de chaque Chapitre, renferment d'importants théorèmes, que l'on peut omettre dans une première lecture, mais qui n'en sont pas moins intéressants pour qui veut approfondir les théories ébauchées dans ces leçons. A. Grévy.

P. PAINLEVÉ, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications.

Lagrange et Jacobi ont coulé les principes de la Mécanique analytique dans un moule indestructible et qu'il semble impossible de modifier. Aussi, dans leur ensemble général, tous les Traités de Dynamique analytique offrent-ils la reproduction soit de la *Mécanique céleste,* soit des *Vorlesungen.*

La *Dynamique analytique* de Mathieu, les mémoires de Graindorge sur l'intégration des équations de la Mécanique ont tour à tour reproduit, en français, les belles méthodes créées par Jacobi.

Mais si le fonds reste le même, la méthode d'exposition, le souci des détails et des difficultés, habituellement laissés de côté, sont très dignes d'attirer l'attention des esprits les plus distingués et très propres à leur fournir l'occasion de déployer la souplesse de leur talent. Ajoutons que, dans ces dernières années, l'exposition des méthodes d'intégration a atteint un degré de perfection qui fait, de cette branche de l'Analyse, un monument plein d'élégance et d'harmonie. Nous avons dit *Analyse,* car il faut bien reconnaître que ces belles doctrines restent indifférentes au côté mécanique lui-même. Il se produit vraisemblablement là, et avec un peu plus de généralité, ce que la Science avait déjà vu se produire à l'occasion du mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité. L'élégance des formules ne laissait rien à désirer et l'analyste devait se déclarer satisfait. Poinsot ne le fut point et c'est en le comblant qu'il démontra le vide que laissaient subsister les formules.

Même dans des problèmes où le nombre requis des intégrales est atteint, la complication de l'instrument analytique rend ce ré-

sultat illusoire et laisse cachées les affections du mouvement. Pour les mettre en évidence, il faut recourir à d'autres moyens.

Ces considérations ne doivent pas nous faire négliger, ni nous empêcher d'admirer les belles méthodes classiques de la Dynamique analytique; car, si elles ne peuvent tout donner, du moins peuvent-elles donner beaucoup. Elles suffisent même dans des cas convenablement choisis.

Il était désirable que, sans perdre de leur ampleur, ces méthodes fussent mises à la portée de nos étudiants, et c'est la tâche à laquelle M. Paul Painlevé a appliqué son remarquable talent. Les applications, savamment choisies, que le lecteur rencontre à chaque pas, rompent la monotonie et l'aridité d'une théorie aussi abstraite; elles aident grandement à sa compréhension. Car, si c'est par ses principes que l'on doit *savoir* la Mécanique, c'est sur des applications qu'on l'apprend. Aussi, ne saurions-nous trop insister sur le côté pratique de ce livre qui offre aux étudiants, à côté des principes, un véritable recueil de problèmes savamment traités et complètement résolus.

Nous ne pouvons en donner ici l'énumération complète. Signalons plusieurs problèmes concernant le gyroscope, dont certains traités par Gilbert dans son Mémoire sur la méthode de Lagrange. Signalons encore le théorème de Liouville et les extensions qu'il a récemment reçues. La 16e Leçon sur l'*Étude des trajectoires réelles* ne manquera pas d'attirer l'attention; il traite d'une question importante sur laquelle l'auteur est revenu dans ces derniers temps et qui concerne la continuité du mouvement telle qu'elle paraît ressortir des formules. L'auteur a traité ce sujet par une analyse d'une haute portée et a trouvé le moyen d'y affirmer, une fois de plus, sa puissante faculté de généralisation analytique.

G. K.

TISSERAND (F.), Membre de l'Institut. — Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal. Deuxième édition, augmentée de Nouveaux exercices sur les variables imaginaires, par *P. Painlevé*, Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. In-8°, XXIII-524 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Il suffira évidemment d'annoncer la nouvelle édition de cet excellent Ouvrage qui, comme son nom l'indique, vient compléter l'ancien Recueil de Frenet et qui a rendu les plus grands services aux étudiants de nos Facultés des Sciences. On ne saurait croire combien les collections de problèmes peuvent être utiles au développement de l'esprit mathématique. L'étude des exercices tient lieu, pour les Sciences mathématiques, de ces travaux de laboratoire qui sont indispensables à tous ceux qui veulent se rendre maîtres d'une des Sciences expérimentales. Il importe seulement que le choix soit bien fait et que les problèmes, sur lesquels l'étudiant sera appelé à s'exercer, touchent de près aux théories importantes et élevées. L'Ouvrage de M. Tisserand satisfait pleinement à cette condition; il a d'ailleurs reçu un complément qui, d'après la nouvelle direction des études, était devenu tout à fait nécessaire. La quatrième Partie, rédigée par notre jeune collègue, M. P. Painlevé, comprend des exercices sur la théorie des fonctions.

Après avoir rappelé les définitions relatives à la théorie des fonctions, M. Painlevé montre comment on peut appliquer les principes de cette théorie soit au calcul des intégrales définies, soit à la solution d'autres problèmes, parmi lesquels nous avons remarqué ceux qui se rapportent aux équations différentielles dont les points critiques sont fixes.

On voit que cette nouvelle édition aura le succès de la précédente. G. D.

PASCAL (E.), Professore nella Università di Pavia. — TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE. Un vol. in-18, XXI-227 p. Milan, Ulrico Hœpli, 1896.

Les leçons sur les fonctions elliptiques, qui sont réunies dans ce Volume, sont, à quelques modifications près, celles qui forment la première Partie du Cours d'Analyse supérieure donné par l'auteur en 1894-1895 à l'Université de Pavie.

L'Auteur a fait reposer toute la théorie sur les fonctions $\mathfrak{S}$ de Jacobi et, en cela, son plan diffère profondément de celui qui a été adopté dans plusieurs Traités récents, où la théorie de ces fonctions $\mathfrak{S}$ apparaît comme un appendice de celle des fonctions elliptiques. Son exposition se rattache donc, au moins par le point de départ, à celle que nous devons à Jacobi et qui se trouve exposée à la fin du Tome I de ses œuvres complètes : *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet*.

Le Chapitre I de l'Ouvrage est consacré exclusivement aux fonctions $\mathfrak{S}$ de Jacobi et à l'exposé de leurs principales propriétés, d'où l'auteur fait dériver, dans le Chapitre II, la définition et les propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi et de Legendre. Les Chapitres suivants traitent des quatre fonctions σ, de la fonction $p(u)$ et des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce.

L'Ouvrage a le caractère d'un manuel et il a l'avantage de contenir, sous un petit volume, les points les plus essentiels de la théorie.

JULIUS PLUCKER. — GESAMMELTE WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN, herausgegeben von *A. Schoenflies* und *Fr. Pockels*. Erster Band. *Mathematische Abhandlungen*, herausgegeben von A. Schœnflies. Gr. in-8°, XXXV-620 p. Leipzig, Teubner.

Cette publication, entreprise sous les auspices de la Société Royale des Sciences de Gœttingue, sera accueillie avec faveur.

Plücker a été un des grands géomètres de ce siècle. La part qu'il a prise au développement de la Géométrie nouvelle, par ses

Mémoires et par ses écrits didactiques, est bien connue de nos lecteurs. Vers la fin de sa vie, revenant après une longue interruption à la Géométrie, il l'a enrichie d'idées neuves et fécondes, qu'un long repos, sans doute, avait fait mûrir dans son esprit. Il était bon que l'ensemble de son œuvre pût être placé sous les yeux des jeunes géomètres et des futurs historiens du développement de la Science à notre époque. Cette œuvre aura toujours pour nous, Français, un intérêt tout particulier, car nous ne pouvons oublier la collaboration de Plücker aux *Annales de Gergonne,* la part active et originale qu'il a prise au développement des découvertes et des idées directrices de Monge et de Poncelet.

Le Tome I de la publication, qui est le seul dont nous ayons à rendre compte ([1]), contient, avec un portrait qui nous a paru fidèle, l'analyse, que nous devons à Clebsch, des travaux et du rôle de Plücker, une collection de 39 Mémoires. Elle contient tout ce que Plücker a écrit en Géométrie en dehors de ses cinq Traités didactiques qui, d'ailleurs, ne sont pas épuisés et qu'il a paru inutile de comprendre dans l'édition projetée ([2]).

Les Mémoires sont disposés par ordre chronologique, leur rédaction a été revue avec grand soin par M. Schœnflies, de sorte que l'on peut dire que cette édition est vraiment digne du géomètre auquel elle est consacrée. G. D.

Dr FINK (K.). — Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot. Sein Leben und seine Werke nach den Quellen dargestellt. Un vol. in-8°, vi-128 p. Tubingue, 1894. Laupp'sche Buchhandlung.

Nous avons, en France, un grand nombre de travaux sur le grand Carnot. Sans parler des innombrables études qui lui ont

---

([1]) Le Tome II, qui contient les travaux de Physique de Plüker, a aussi paru.

([2]) Ces cinq traités sont, comme on sait, les suivants :

1. *Analytisch-geometrische Entwicklungen.* Essen Bd. I, 1828; Bd. II; 1831.
2. *System der analytischen Geometrie.* Berlin; 1835.
3. *Theorie der algebraischen Curven.* Bonn; 1839.
4. *System der Geometrie des Raumes.* Dusseldorf; 1846.
5. *New Geometrie des Raumes,* Leipzig, Bd. I, 1868; Bd. II, 1869 (publié par M. Klein).

été consacrées dans nos différents Recueils biographiques, il nous suffira de rappeler ici l'éloge que lui a consacré Arago, les appréciations que divers géomètres, notamment Poncelet et Chasles, nous ont données sur son rôle en Géométrie, les deux Volumes des *Mémoires sur Carnot par son fils*, etc. La nouvelle publication, que nous devons à M. Finck, ne vient donc pas combler une lacune; elle sera néanmoins accueillie avec faveur. Il serait bon que des publications du genre de celle-ci, d'une étendue raisonnable, consacrées à des hommes qui méritent à tant de points de vue d'être proposés comme des modèles, pussent être répandues à un grand nombre d'exemplaires et mises à la disposition de tous. C'est avec un véritable soin et avec la sympathie que mérite le sujet de son étude, que l'auteur examine successivement le rôle que Carnot a joué comme citoyen, les découvertes que nous lui devons en Géométrie, en Analyse et Mécanique, l'influence qu'elles ont eue sur le développement de la Science à notre époque. C'est donc en toute confiance que nous signalons cet Ouvrage à nos lecteurs. G. D.

STACKEL (P.) ET ENGEL (FR.). — DIE THEORIE DER PARALLELLINIEN VON EUKLID BIS GAUSS. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. 1 vol. x-325 p. in-8°, avec 145 fig. et un fac-similé d'une Lettre de Gauss. Leipzig, Teubner; 1895.

Aujourd'hui que la question du Postulatum d'Euclide peut être considérée comme résolue, et que les géomètres ont appris à reconnaître à l'axiome euclidien son caractère de définition, ils éprouvent un intérêt d'autant plus vif à suivre le développement d'une idée aussi paradoxale en apparence et aussi peu naturelle à l'esprit humain. M. Stäckel nous montre que cette idée, comme toute autre, a germé progressivement dans les esprits. Avec la collaboration de M. Fr. Engel, il nous apporte une série de documents importants sur ce qu'il appelle la préhistoire de la Géométrie non euclidienne.

Si, en effet, la Géométrie non euclidienne reconnaît pour fondateurs Lobatschewsky et Bolyai, elle a eu ses précurseurs. Il y

a quelques années, M. Beltrami signala comme tel le jésuite italien Saccheri (1667-1733). La conclusion finale du livre de Saccheri est erronée, puisque celui-ci a cru *démontrer* l'axiome d'Euclide : la notion d'infini, sous la forme métaphysique qu'elle a revêtue dans les premiers temps du Calcul infinitésimal, se prêtait trop aisément à des sophismes tels que ceux dont il s'est servi. Mais, à côté de cette erreur, se rencontrent des résultats remarquables : c'est à Saccheri que l'on doit la démonstration de ce fait, que l'hypothèse euclidienne est toujours la vraie si elle est vérifiée dans un seul cas particulier, et qu'il en est de même pour l'hypothèse contraire.

L'honneur d'avoir entrevu certains principes de la Géométrie non euclidienne ne revient pas au seul jésuite italien. Parmi ceux qui l'ont précédé dans cette voie, il faut citer Wallis, dont les travaux de Calcul infinitésimal sont bien connus, et qui a été le premier à apercevoir l'équivalence de l'hypothèse euclidienne avec le fait de l'existence de figures semblables. Mais M. Stäckel a découvert des recherches beaucoup plus importantes sur ce sujet dans l'œuvre de *J.-H. Lambert*. On ne peut qu'admirer, avec les auteurs, le génie, en quelque sorte prophétique, de cet homme qui démontrait le premier l'irrationnalité de π, annonçait la transcendance de ce nombre et qui, dans un temps où la considération des quantités complexes était encore tout à fait étrangère aux géomètres, osait affirmer l'identité de la Géométrie non euclidienne avec la Géométrie sur une sphère imaginaire.

MM. Stäckel et Engel ont rassemblé et traduit les textes d'Euclide, de Wallis, de Saccheri et de Lambert et fournissent, sur ces auteurs, des renseignements biographiques dont beaucoup sont nouveaux. Ils nous donnent ensuite un extrait de la célèbre correspondance de Gauss avec Schumacher, dans laquelle le grand géomètre proclame le premier l'impossibilité de démontrer l'axiome d'Euclide et signale même cet axiome de l'existence du plan qui figure, à bien plus juste titre que le précédent, parmi les postulats de la Géométrie. Enfin, ils nous font connaître une personnalité des plus intéressantes, celle de Taurinus (1794-1874). Non seulement celui-ci a fait paraître une véritable géométrie non euclidienne dès 1826, c'est-à-dire avant Lobatschewsky et Bolyai, mais encore (et peut-être voudrait-on voir les auteurs in-

sister un peu plus sur ce point) il a vu, à certains égards, plus clair que les fondateurs de cette doctrine. On ne saurait trop remarquer des phrases telles que les suivantes :

« ... Il est pour moi bien vraisemblable que tous ces systèmes » (les différentes géométries non euclidiennes) « existent ensemble, comme il existe une infinité de géométries sphériques, puisqu'on peut imaginer des sphères d'une infinité de rayons différents ([1]) » [surtout lorsque l'auteur complète sa pensée en ajoutant, un peu plus loin ([2]), qu'alors il y aurait entre deux points une infinité de lignes droites, correspondant à ces différents systèmes].

L'étrange faute de raisonnement par laquelle Taurinus voit, dans cette circonstance, une contradiction avec la définition de la ligne droite et veut en conclure la démonstration du Postulatum vient, il est vrai, entacher d'une façon regrettable les vues si justes qui précèdent. Elle ne saurait néanmoins les faire oublier; et c'est même une conception inexacte, peut-être, mais bien voisine de la vérité que celle-ci :

« Pour conclure, nous exprimerons notre conviction qu'il existe un tel système; mais ce dont nous doutons, c'est que ce doive être une Géométrie *rectiligne* et *plane* » ([3]).

J. Hadamard.

GRASSMANN (H.). — Gesammelte Mathematische und physikalische Werke. Tome I, 2e Partie; in-8°, VII-511 p. Teubner, Leipzig, 1896.

Cette seconde partie du Tome premier des Œuvres de Grassmann est consacrée à la seconde rédaction (1862) de l'*Ausdehnungslehre*. On sait que la première exposition (1844) où Grassmann avait voulu constituer, sur des concepts si généraux que, parfois, ils semblent vides, une branche indépendante du reste de la Science, n'avait guère répandu, parmi les mathématiciens, des

([1]) Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien, etc.*, p. 261.
([2]) *Ibid.*, p. 262.
([3]) *Ibid.*, p. 259.

idées dont l'auteur ne s'exagérait nullement l'importance, mais qu'il avait sans doute développées d'une façon trop abstraite pour de purs mathématiciens. Grassmann le reconnaît dans la préface de l'édition de 1862, préface dont la fierté n'a rien d'excessif et qui s'élève parfois jusqu'à l'éloquence. La lecture de cette rédaction, qui est relativement aisée, sera encore facilitée par le soin méticuleux avec lequel les éditeurs ont corrigé les fautes de détail, à propos desquelles M. Engel rappelle cette pensée de Lessing : « Ce n'est pas louer médiocrement un auteur que de dire qu'il n'a pas commis d'autres fautes que celles que tout le monde aurait pu éviter. » En dehors de ces corrections, les éditeurs ont ajouté, en appendice, un grand nombre de notes importantes, dont les unes éclaircissent le texte de Grassmann, dont les autres marquent la place de ses idées dans le développement ultérieur de la Science : ces notes sont dues à M. H. Grassmann (fils) et à M. Engel. Nous signalerons, en particulier, une note étendue où ce dernier a exposé, dans le langage ordinaire de l'Analyse et indépendamment des théories de l'*Ausdehnungslehre,* les recherches de Grassmann sur le problème de Pfaff. A plusieurs reprises, depuis vingt ans, M. Sophus Lie a insisté sur l'importance de ces recherches. J. T.

BRAHY. — EXERCICES MÉTHODIQUES DE CALCUL INTÉGRAL. 1 vol. in-8°, VIII-391 p.

L'Auteur a déjà publié un recueil d'exercices sur le Calcul différentiel. Les deux recueils sont destinés aux commençants et leur rendront service. Ils contiennent quelques exemples simples, traités explicitement, et l'énoncé de questions faciles, classées de manière qu'il n'y ait aucun doute sur les méthodes qu'il faut appliquer pour les résoudre. Ce n'est pas l'effort d'invention que l'auteur cherche à développer; il n'a en vue que la stricte et directe application des méthodes fondamentales. J. T.

KLEIN (F.). — LEÇONS SUR CERTAINES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. Possibilité des constructions géométriques : les polygones réguliers; transcendance des nombres e et π. Traduction française, par *J. Griess*. 1 vol. in-8°. 98 p. Nony, Paris, 1896.

Nous avons récemment parlé de ce petit Livre : nul doute qu'il ne méritât d'être traduit, et il faut remercier M. Griess d'avoir pris ce soin. J. T.

GREENHILL (A.). — LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET LEURS APPLICATIONS. Traduit de l'anglais par M. *Griess*, avec une préface de M. *Appell*. 1 vol. in-8°, XVIII-570 p. Paris, Georges Carré, 1895.

Nous sommes heureux d'annoncer la traduction de l'excellent livre de M. Greenhill; cette traduction peut d'ailleurs être regardée comme une seconde édition, puisque l'Auteur a remanié le texte à différents endroits et fait diverses additions; signalons celle qui concerne le pendule et l'interprétation de la période imaginaire d'après le théorème général que l'on doit à M. Appell sur le changement de t en it dans les équations de la Mécanique, et celles qui se rapportent aux intégrales pseudo-elliptiques; c'est un sujet sur lequel on sait que M. Greenhill a fait d'importantes recherches.

M. Appell a mis en tête de la traduction une intéressante préface où il caractérise parfaitement le mérite, les tendances et l'utilité du Livre de M. Greenhill. J. T.

A. CARLI et A. FAVARO. — BIBLIOGRAFIA GALILEIANA. Rome, 1896, VII-402 p. in-8°. — (N° XVI des *Indici e Cataloghi* publiés par le *Ministero della publica Istruzione.*)

Pour recommander cet Ouvrage, il suffit du nom de l'infatigable savant qui, depuis déjà près de vingt ans, consacre les loisirs de son professorat à la mémoire de Galilée, et qui dirige avec

un zèle si heureux la nouvelle édition des Œuvres du « gran vecchio ». La bibliographie qu'il a dressée avec M. Carli comprend 2029 numéros depuis 1568 jusqu'en 1892, livres, opuscules, articles de journaux, recensions, etc. C'est assez dire quelles précieuses indications on peut y trouver.

Tous les titres sont donnés *in extenso* et, par une heureuse innovation, les rares Ouvrages qui n'ont point été vus par l'un ou l'autre des collaborateurs, sont marqués d'un astérisque. Pour faire sentir la nécessité d'une telle précaution, je copie un des numéros qui se trouvent dans ce cas.

* — ANT. DE LA LOUBÈRE. Propositiones geometricæ, ex quibus ostenditur non recte inferri a Galilæo motum fieri in instanti. — Tolosæ, 1658. Registrato dai DE BACKER nella « Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus (I, 469). »

Or, d'après l'exemplaire de ce rarissime opuscule qui se trouve à la Bibliothèque nationale, le titre véritable est le suivant :

« Antonii Laloueræ (¹) Societatis Jesu Propositiones Geometricæ sex, quibus ostenditur ex Cazræiana hypothesi circa proportionem qua gravia decidentia accelerantur, non recte inferri à Gassendo motum fore in instanti. » — Placard daté « Tolosæ, VI eidus decemb. 1658 ».

Le nom de Galilée ne figure pas plus dans le texte que dans le titre de cet Opuscule (²), mais en fait sa doctrine est réellement en cause. En 1645, le jésuite Cazré, alors recteur du collège de Metz, avait publié à Paris une *Physica demonstrativa* (nº 206 de la *Bibliografia*), où il prétendait établir, contre Galilée, que, dans la chute des graves, la vitesse croît proportionnellement, non pas au temps écoulé, mais bien à l'espace parcouru.

(¹) Comme à cette époque l'*u* et le *v* dans le corps des mots n'étaient pas distingués, on ne sait pas s'il faut lire en latin *Lalouera* ou *Lalovera*, pas plus qu'on ne sait, en réalité, si, dans l'*Histoire de la Roulette* de Pascal, il faut lire en français *Lallouère* ou *Lallovère*. La Loubère est le nom que prit un neveu du jésuite toulousain, mais il y a des preuves singulières de la confusion qu'on faisait alors en Languedoc entre le *b* et le *v*, et Fermat écrivait *Lalouuere*, c'est-à-dire *Lalouvère*, orthographe que j'ai adoptée dans l'édition des *Œuvres de Fermat*.

(²) Il a été reproduit à peu près textuellement dans l'Ouvrage de Lalouvère sur la cycloïde (*Veterum Geometria. etc.*, 1660) où il forme les propositions 43 à 48 du Livre VI.

Gassend défendit la thèse de Galilée dans trois lettres latines qui furent imprimées en 1646 avec des réponses du P. Cazré (n° 212). Il insista sur une remarque, déjà faite par le savant italien, que l'hypothèse de la proportionnalité de la vitesse à l'espace conduirait à faire parcourir un espace fini dans un temps nul ($l = e^{kt}$).

Fermat intervint dans cette discussion en adressant à Gassend une lettre (*Œuvres de Fermat*, t. II, p. 267) où il donna le premier une rigoureuse démonstration de l'assertion de Galilée. Cette lettre ne fut pas rendue publique alors, mais Sorbière l'inséra, sous les initiales P. F. S. T., à la fin de la correspondance de Gassend, dans l'édition de ses Œuvres qu'il procura en 1658.

C'est sur le vu de cette édition que Lalouvère (¹) prit à son tour la défense de son confrère. Son moyen revient en fait à attribuer au grave une vitesse finie à l'origine de la chute, hypothèse aussi absurde physiquement que ses *Démonstrations géométriques* sont inattaquables.

Le lecteur excusera, je l'espère, cette digression qui m'a entraîné un peu loin de la *Bibliografia galileiana*. J'y reviens pour une critique de forme relative à l'index des noms d'auteurs. Comme je l'ai déjà remarqué à propos du *Saggio di una bibliografia Euclidea* du professeur Riccardi, je trouve fâcheux l'usage de transcrire tous les prénoms dans une même langue, au lieu de les conserver sous leur forme nationale. Je ne vois pas quel intérêt il y a, par exemple, pour un Italien, à trouver dans un index « Pascal (Biagio) » au lieu de « Pascal (Blaise) »; et il me semble que cette forme de prénom doit être aussi choquante pour un Allemand ou un Anglais que pour un Français. Mais je proteste surtout contre le changement des noms propres eux-mêmes, faute que nous ne commettons que trop souvent en France. Il peut être utile en Italie de mettre dans un index « Cartesio » avec renvoi à « Descartes », mais je ne vois pas qu'il

(¹) On peut se demander s'il n'a pas reconnu Fermat sous les transparentes initiales de la lettre à Gassend, ou s'il a commis la maladresse de contredire un ami qu'il avait, au fort de sa dispute avec Pascal, le plus grand intérêt à ménager. Fermat avait prétendu expressément clore le débat; Lalouvère qualifie l'anonyme de *subtilissimus*, mais affirme qu'il n'a pas épuisé la question.

puisse l'être d'écrire « Bacone Francesco » au lieu de « Bacon Francis (¹). »

S'il y a doute, comme dans le cas des auteurs qui ont écrit en latin, mieux vaudrait conserver d'ailleurs la forme latine que d'indiquer « Casræo » pour le P. Cazré (celui précisément dont j'ai parlé plus haut) ou « Grandamico » pour son confrère, le P. Grandamy.

C'est enfin à tort que, dans l'index de la *Bibliografia galileiana,* on a distingué « Martin Enrico » et « Martin Tommaso Enrico ». Si dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1867 et 1868, les titres des Notes relatives aux faux autographes de Vrain-Lucas ne portent pas toujours la double initiale, il n'en est pas moins certain que notre historien Henri Martin n'est nullement intervenu en même temps que son homonyme.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. ED. LEMAIRE.

I.

SÉRIES ENTIÈRES.

Nous nous proposons de déterminer les régions où la série double

$$\Sigma\Sigma a_{p,q} x^p y^q, \tag{1}$$

(¹) Il ne s'agit pas, bien entendu, de renoncer à dire ou à écrire en français François Bacon ou Galilée. Mais la bibliographie doit au moins m'apprendre, si je l'ignore, que l'on dit Francis en anglais, Galilei en italien.

est absolument convergente. Nous poserons, pour abréger,

$$p + q = n,$$

et nous représenterons respectivement les variables imaginaires x, y, dans deux plans ayant O et O′ pour origines des affixes. Nous dirons que l'ensemble des deux affixes (x, y) forme un point. On sait que, si la série double est absolument convergente ou si seulement le module de son terme général reste fini au point (x_0, y_0), elle est absolument convergente en tout point (x, y) tel que l'on ait

$$|x| < |x_0|, \qquad |y| < |y_0|.$$

Nous dirons que deux cercles C et C′ décrits de O et O′ comme centres avec des rayons égaux à r et r' forment un *système de cercles de convergence* si la série est absolument convergente en tout point dont les deux affixes sont respectivement intérieures à C et C′, et ne l'est en aucun point dont les affixes sont extérieures aux deux cercles. Les rayons r et r' sont dits *rayons de convergence associés*. Si en (x_0, y_0) le module du terme général reste fini et ne tend pas vers zéro, $|x_0|$ et $|y_0|$ sont des rayons de convergence associés : on ne peut rien affirmer si le terme général tend vers zéro. En supposant la série absolument convergente en des points autres que ceux dont une affixe est O ou O′, à toute valeur assez petite donnée pour l'un des rayons, correspond une valeur du rayon associé. Le problème revient à *déterminer la relation entre deux rayons associés*

$$f(r, r') = 0. \tag{2}$$

Nous allons chercher les valeurs des rayons associés qui sont entre eux dans un rapport donné K. Il semblerait plus naturel de se donner la valeur de r et de chercher la valeur correspondante de r'. On est alors conduit à ordonner la série par rapport à y, après avoir remplacé les coefficients $a_{p,q}$ par leurs modules. Les coefficients des puissances de y sont des séries entières en x dont il faut connaître la somme. C'est cette difficulté que le procédé employé permet d'éviter.

On arrive à résoudre la question en généralisant, d'une ma-

nière convenable, la règle que M. Hadamard a retrouvée après Cauchy, pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière à une seule variable [1]. Définissons, par analogie, la *limite supérieure pour n infini* [2] d'une quantité réelle à deux indices $h_{p,q}(p+q=n)$. C'est un nombre H tel que, si petit que soit le nombre positif ε, les quantités $h_{p,q}$ finissent par être toutes, à partir d'une valeur assez grande N de n, inférieures à $\mathrm{H}+\varepsilon$, tandis qu'il en existe de supérieures à $\mathrm{H}-\varepsilon$, si grand que soit n. Supposons que l'on ait cherché la limite supérieure $\lambda(\mathrm{K})$, pour n infini, de la quantité $\left|\sqrt[n]{a_{p,q}\mathrm{K}^q}\right|$, K étant une quantité positive indéterminée.

THÉORÈME. — *Les nombres*

$$r=\frac{1}{\lambda(\mathrm{K})},\qquad r'=\frac{\mathrm{K}}{\lambda(\mathrm{K})}\tag{3}$$

constituent, quel que soit K, *un système de rayons de convergence et la relation* (2) *a la forme*

$$r\lambda\left(\frac{r'}{r}\right)=1.\tag{4}$$

On a, par hypothèse, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$\left|\sqrt[n]{a_{p,q}\mathrm{K}^q}\right|<\lambda(\mathrm{K})+\varepsilon,$$

pour $n>\mathrm{N}$. On en déduit

$$|a_{p,q}|\left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon}\right)^p\left(\frac{\mathrm{K}}{\lambda+\varepsilon}\right)^q<1.$$

Il en résulte que la série est absolument convergente pour tout point dont les affixes sont à la fois intérieures aux deux cercles

---

(1) HADAMARD, *Comptes rendus*, t. CVI, p. 259; 1888. — CAUCHY, *Cours d'Analyse*, 1821, passim. — Id., *Œuvres*, passim.

Cf. au sujet du langage employé : E. BOREL, *Journal de Mathématiques*, p. 451 : 1896.

(2) Il ne faut pas confondre avec la limite de $h_{p,q}$ pour p et q infinis, telle que M. Hadamard l'a définie dans sa Thèse.

de centres O et O′ et de rayons

$$\rho = \frac{1}{\lambda + \varepsilon}, \qquad \rho' = \frac{K}{\lambda + \varepsilon}.$$

Il en est de même pour les cercles C et C′ de rayons r et r', puisque ρ et ρ' sont aussi voisins que l'on veut de r et r'.

On a, au contraire, pour des valeurs particulières de n supérieures à tout nombre donné,

$$|\sqrt[n]{a_{p,q}K^q}| > \lambda - \varepsilon,$$

$$|a_{p,q}|\left(\frac{1}{\lambda - \varepsilon}\right)^p\left(\frac{K}{\lambda - \varepsilon}\right)^q > 1.$$

Le terme général ne tend pas vers zéro et la série ne peut être absolument convergente pour aucun point extérieur à la fois à C et C′. Les égalités (3) déterminent bien un système de rayons associés, qui dépend de K et l'élimination de ce paramètre conduit à la relation (4), qui est la relation cherchée.

Il est évident que l'on pourrait chercher la limite supérieure $\lambda_1(K_1)$ pour n infini de $|\sqrt[n]{a_{p,q}K^p}|$ et que l'on aurait

$$r = \frac{K_1}{\lambda_1(K_1)}, \qquad r' = \frac{1}{\lambda_1(K_1)}.$$

Si, d'ailleurs, on pose $K_1 = \frac{1}{K}$, on a

$$\left|\sqrt[n]{\frac{a_{p,q}}{K^p}}\right| = \frac{1}{K}|\sqrt[n]{a_{p,q}K^q}|,$$

d'où

$$\lambda_1\left(\frac{1}{K}\right) = \frac{1}{K}\lambda(K),$$

et l'on retrouve les valeurs (3).

Il peut arriver que si l'on augmente le rayon du cercle C′, par exemple, à condition de ne pas changer le cercle C, les deux cercles continuent à former un système de cercles de convergence ou, en d'autres termes, qu'à une valeur particulière de r il corresponde non pas une valeur unique de r', mais une infinité. C'est ce qui se produit pour le développement de Maclaurin de

$\frac{1}{(1-x)(2-y)}$: on a des rayons associés en prenant $r=1$, $r'<2$ et aussi en prenant $r'=2$, $r<1$. La relation (2), au lieu d'avoir une forme explicite unique, en a, suivant le cas, deux différentes : chacune d'elles est indépendante de l'une des variables, et l'on doit lui joindre l'inégalité qui indique dans quelles limites elle est valable. Le procédé mettra ce fait en évidence, et l'on voit facilement que l'on a, dans le cas actuel,

$$r=1, \qquad r'=K, \quad \text{si } K<2,$$
$$r=\frac{2}{K}, \qquad r'=2, \quad \text{si } K>2,$$

de sorte que l'élimination de K est toute faite.

L'analyse précédente s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de variables. Soit $a_{p_1,p_2,\ldots,p_i}x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_i^{p_i}$ le terme général de la série multiple et $\lambda(K_1, K_2, \ldots, K_{i-1})$ la *limite supérieure pour n infini* de la quantité $\left|\sqrt[n]{a_{p_1,p_2,\ldots,p_i}K_1^{p_1}K_2^{p_2}\ldots K_{i-1}^{p_{i-1}}}\right|$. Le raisonnement fait prouve que les rayons associés (c'est-à-dire les rayons d'un système de cercles ayant pour centres les différentes origines, et tels que la série soit absolument convergente si toutes les affixes leur sont intérieures, et ne le soit sûrement pas si toutes sont extérieures), ont pour expressions

$$\frac{r_1}{K_1}=\frac{r_2}{K_2}=\ldots=\frac{r_{i-1}}{K_{i-1}}=\frac{r_i}{1}=\frac{1}{\lambda(K_1, K_2, \ldots, K_{i-1})}.$$

Ils sont donc liés par la relation

$$r_i\lambda\left(\frac{r_1}{r_i}, \frac{r_2}{r_i}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{r_i}\right)=1.$$

II.

SÉRIES DE FONCTIONS QUELCONQUES ET DE FONCTIONS HOMOGÈNES.

Considérons d'abord la série

$$(1) \qquad f_0(x,y)+f_1(x,y)+\ldots+f_n(x,y)+\ldots,$$

dont les termes sont des fonctions quelconques des variables imaginaires

$$x=re^{i\theta}, \qquad y=r'e^{i\theta'}.$$

Désignons par $\lambda(r, \theta, r', \theta')$ la limite supérieure pour n infini de

$$|\sqrt[n]{f_n(x, y)}|,$$

La série est absolument convergente aux points qui satisfont à l'inégalité

$$(2) \qquad \lambda(r, \theta, r', \theta') < 1.$$

Elle est divergente aux points qui satisfont à l'inégalité

$$(3) \qquad \lambda(r, \theta, r', \theta') > 1.$$

Il y a doute si l'on a

$$(4) \qquad \lambda(r, \theta, r', \theta') = 1.$$

Dans le premier cas, on peut choisir ε assez petit pour que $\lambda + \varepsilon$ soit inférieur à 1. Or on a, à partir d'un certain rang,

$$|\sqrt[n]{f_n(x, y)}| < \lambda + \varepsilon,$$
$$|f_n(x, y)| < (\lambda + \varepsilon)^n.$$

La série est donc absolument convergente. Dans le second on a, quelque grand que soit n,

$$|f_n(x, y)| > (\lambda - \varepsilon)^n \qquad (\lambda - \varepsilon > 1).$$

A un point du plan de l'une des variables correspondent, dans l'autre plan, deux régions déterminées par la courbe

$$\lambda(r, \theta, r', \theta') = 1,$$

les variables étant soit r et θ, soit r' et θ'. La région intérieure est une région de *convergence certaine*, la convergence y est absolue. La région extérieure est une région de divergence.

Supposons maintenant que $f_n(x, y)$ soit une fonction *homogène* et de degré n. On peut écrire

$$|\sqrt[n]{f_n(x, y)}| = r\left|\sqrt[n]{f_n\left(1, \frac{r'}{r} e^{i(\theta'-\theta)}\right)}\right|,$$

et, d'après la forme que prend la quantité λ, poser

$$\lambda(r, \theta, r', \theta') = r\mu\left(\frac{r'}{r}, \theta' - \theta\right).$$

On voit d'abord que la région de convergence certaine ne dépend que de la différence des arguments. — Si un point (x, y) est intérieur au domaine de convergence certaine de la série, c'est-à-dire si l'affixe de y est dans la région intérieure de la courbe relative à x, on obtient d'autres points intérieurs à ce domaine en faisant tourner l'affixe de x d'un angle quelconque et en même temps celle de y du même angle dans leurs plans respectifs.

De plus, l'inégalité (2) devient

$$(2\ bis)\qquad r\mu\left(\frac{r'}{r}, \theta' - \theta\right) < 1$$

et continue d'être satisfaite si, laissant fixe $\frac{r'}{r}$, on diminue r. On obtient donc encore des points intérieurs au domaine de convergence certaine *en remplaçant les affixes d'un point* (x, y) *de ce domaine par leurs homothétiques,* par rapport aux origines correspondantes, le rapport commun d'homothétie étant compris entre zéro et un. Et ceci subsiste si le point (x, y) est sur la limite du domaine de convergence, l'égalité (4) se transformant en une inégalité (2 *bis*) lorsqu'on diminue r.

Ces propriétés constituent une généralisation de ce fait que jusqu'à une valeur maximum du module de la variable exclusivement la convergence d'une série entière à une variable ne dépend ni du module ni de l'argument.

Ces propriétés s'étendent évidemment au cas d'un nombre quelconque de variables, toutes les affixes tournant d'un même angle et tous les modules étant réduits dans le même rapport.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Brown (E.-W.). — *An Introductory Treatise on the Lunar Theory.* In-8°, 308 p. Cambridge Univ. Press. 15 sh.

Edwards (J.). — *An Elementary Treatise on the Differential Calculus, with Applications and numerous Examples.* 3e édit., in-8°, 546 p., London, Macmillan. 14 sh.

Grassmann (H.). — *Gesammelte mathematische u. physikalische Werke.* Herausgeg. von F. Engel, t. I, 2e Partie, gr. in-8°. Leipzig, Teubner, 16 m.

(Die Ausdehnungslehre v. 1862. In Gemeinschaft mit H. Grassmann d. J., herausgeg. von F. Engel. VIII-511 p. avec 37 fig.).

Ostwald's. *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 73, in-8°. Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m.

(Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie u. Allgemeine sphär. Trigonometrie (1753 u. 1779) von L. Euler. Traduit du français et du latin et publié par E. Hammer.

Autonne (L.). — *Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surface algébrique.* In-8°, 41 p. Paris, Masson et Cie.

Bochow (K.). — *Eine einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke. Allgemeine Untersuchungen nebst Berechng. der Seiten, Diagonalen u. Flächen, etc.* In-4°, 34 p. avec 2 pl. Leipzig, Fock. 1 m.

Cauchy (A.). — *Œuvres complètes,* publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences. 1re série. T. IX. In-4°, 514 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 25 fr.

Goursat (E.). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes.* T. I : *Problème de Cauchy; Caractéristiques; Intégrales intermédiaires.* In-8°, VIII-226 p. Paris, Hermann. 7 fr. 50 c.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann. Herausg. von E. Lampe. 25 Bd. Jahr. 1893 u. 1894. (In 3 Heften). 1 Heft. Gr. in-8°, III-VII-852 p. Berlin, G. Reimer. 21 m.

JORDAN (C.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2e édit. T. III : *Calcul intégral; Equations différentielles*. In-8°, XI-543 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

TISSERAND (F.). — *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal*. 2e édit. In-8°, XXIII-524 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

— *Traité de Mécanique céleste*. T. IV : *Théories des satellites de Jupiter et de Saturne; Perturbations des petites planètes*. In-4°, XII-548 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils, 28 fr.

LIE (S.). — *Geometrie der Berührungstransformationen*. Dargestellt von Lie u. G. Scheffers (In 2 Bänden.) 1 Bd. Gr. in-8°, XI-694 p. avec figures. Leipzig, Teubner.

LŒWY (M.) et PUISEUX (P.). — *Atlas photographique de la Lune*, publié par l'Observatoire de Paris. 1er fascicule, comprenant : 1° *Mémoire sur la constitution de l'écorce lunaire*; 2° Planche A, *Image obtenue au foyer du grand équatorial coudé*; 3° Planches 1 à 5, *Héliogravures d'après les agrandissements sur verre de trois clichés des années* 1894 *et* 1895. In-4°, 48 p. Paris, Impr. nationale.

MINKOWSKI (H.). *Geometrie der Zahlen* (In 2 Liefgn.) 1. Lfg. Gr. in-8° 240 p. Leipzig, Teubner. 8 m.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours de Géométrie analytique*. T. III : *Géométrie dans l'espace*, avec une *Note sur les transformations en Géométrie*, par E. Borel. In-8°, 576 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

ROHN (K.) u. PAPPERITZ (E.). — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (In 2 Bänden.) 2. Bd. Gr. in-8°, XVI-528 p. avec fig. Leipzig, Veit et Co. 14 m.; gebd. 16 m.

SCHLEGEL (V.). — *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten* 50 *Jahren* (*Sonderdr.*). Gr. in-8°, 44 p. Leipzig, Teubner.

DEPREZ (M.). — *Traité d'Électricité industrielle théorique et pratique*. 1er fasc. *Électricité statique et Magnétisme; Electrométrie; Magnétométrie*. In-8°, II-368 p. avec fig. Paris, 17, rue des Bernardins. 12 fr.

DUHEM (P.). — *Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques*. In-8°, 61 p. Paris, Hermann.

OCAGNE (M. D'). — *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*. In-8°, XI-429 p. avec figures. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Picard (E.). — *Cours de la Faculté des Sciences de Paris. Traité d'Analyse.* T. III : *Des singularités des intégrales des équations différentielles.* In-8°, xiv-588 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 18 fr.

Williamson (B.). — *An Elementary Treatise on the Integral Calculus.* 7e édit. In-8°. London. Longmans. 10 sh. 6 d.

Appell (Paul). — *Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences. Traité de Mécanique rationnelle.* T. II : *Dynamique des systèmes; Mécanique analytique.* In-8°, 542 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 16 fr.

Babbitt (E.-D.). — *Principles of Light and Colour; Harmonic Laws of the Universe.* 2e édit. In-8°, 578 p. London, Paul. 21 sh.

Euclidis *opera omnia.* Ediderunt J.-L. Heiberg et H. Menge. Vol. VI. In-8°, lxii-336 p. avec fig. Leibzig, Teubner. 5 m.

Haure (M.). — *Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique.* In-4°, 89 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Sporer (B.). — *Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischen Curven.* Dissert. Gr. in-8°, 40 p. Tübingen, Fues. 1 m.

Boehm (K.). — *Allgemeine Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen.* Gr. in-8°, iii-58 p. Leipzig, Teubner. 2 m.

Goebel (K.). — *Die Zahl und das Unendlichkleine.* Gr. in-8°, 47 p. Leipzig, Fock. 1 m. 20 pf.

Lucas (E.). — *Récréations mathématiques.* 2e édit. T II. Petit in-8°. 247 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Weber (H.). — *Lehrbuch der Algebra.* (In 2 Banden.) 2. Bd. Gr. in-8°, xiv-796 p. Braunschweig, Vieweg et Sohn. 20 m.

Ostwald's *Klassiker der exakten Wissenschaften.* Nos 77 u. 68. In-8°. Leipzig, Engelmann.

Inhalt : 77. Ueber die Bildung u. die Eigenschaften der Determinanten; von C. G. J. Jacobi. 1841. Herausgeg. von P. Stäckel. 73 p. 1 m. 20 pf. — 78. Ueber die Functionaldeterminanten; von C. G. J. Jacobi. Herausgeg. von P. Stäckel. 72 p. 1 m. 20 pf.

Scheffler (H.). — *Das Wesen der Mathematik u. der Aufbau der Welterkenntniss auf mathemat. Grundlage.* 2 Bd. Gr. in-8°, vi-409 p. avec 1 pl. u. v-462 p. avec 2 pl. Braunschweig, Wagner. 10 m.

Wertheim (G.). — *Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik.* 2 Aufl. Gr. in-8°, vii-68 p. Braunschweig, Vieweg et Sohn. 3 m.

Duhem (P.). — *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques.* In-8°, 212 p. Paris, Hermann.

Ostwald's *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N°s. 76 u. 79. In-8°. Leipzig, Engelmann.

Inhalt : 76. Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik von F. E. Neumann. 1832. Herausgeg. v. A. Wangerin. 52 p. 80 pf. — 79. Zwei hydrodynamische Abhandlungen von H. v. Helmholtz. I. Ueber Wirbelbewegungen. 1858. II. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. 1868. Herausgeg. von A. Wangerin. 80 p. 1. m. 20 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MATHEMATICAL PAPERS READ AT THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONGRESS held in connection with the World's Columbian exposition Chicago 1893, edited by the committee of the Congress *E.-H. Moore, O. Bolza, H. Maschke, H.-S. White*. 1 vol. in-8°, XVI-411 p. New York, Macmillan, 1896.

Cet intéressant Recueil de courts Mémoires constitue, avec les belles *Lectures on Mathematics* de M. Klein, la trace durable du congrès de mathématiciens qui s'est réuni à Chicago du 21 au 26 août 1893, à l'occasion de l'Exposition universelle, sous la présidence de M. Story. Quelques pages d'introduction retracent rapidement l'ordre des travaux du Congrès et témoignent de l'admiration bien naturelle qu'a excitée M. Klein, et de la reconnaissance que lui ont vouée les membres du Comité, tant pour la grande part qu'il a prise à l'organisation du Congrès, que pour l'intérêt de ses conférences et le rôle qu'il a joué comme Commissaire de l'Empire d'Allemagne, dont les Universités avaient organisé une exposition très intéressante, spécialement au point de vue du matériel mathématique.

Les communications qui composent le présent Volume, édité par les soins du Comité local de la Section mathématique, sont trop brèves pour qu'il soit possible de les analyser utilement, et nous sommes obligés, malgré le vif intérêt qu'elles présentent, de nous borner à les mentionner :

Bolza (*O.*). — Sur les systèmes weierstrassiens d'intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce.

Burkhardt (*H.*). — Sur quelques résultats mathématiques des récentes recherches d'Astronomie et, en particulier, sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires.

Capelli (*A.*). — Quelques formules relatives aux opérations de polaire.

Cole (*F.*). — Sur un certain groupe simple.

Echols (*W.*). — Sur les formules d'interpolation et leurs relations avec les séries infinies.

Eddy (*H.*). — Fonctions automorphes et théorie des nombres.

Halsted (*G.*). — Quelques points saillants de l'histoire de la Géométrie non euclidienne et de l'hyperespace.

Heffter (*Z.*). — Les progrès récents dans la théorie des équations différentielles.

Hermite (*C.*). — Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques.

Hilbert (*D.*). — Sur la théorie des invariants algébriques.

Hürwitz (*A.*). — Sur la réduction des formes binaires quadratiques.

Klein (*F.*). — Le présent état des Mathématiques.

— Sur le développement de la théorie des groupes pendant les vingt dernières années.

Krause (*M.*). — Pour la transformation du cinquième degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.

Lemoine (*E.*). — Considérations générales sur la mesure de la simplicité dans les Sciences mathématiques. — Règle des analogies dans le triangle et transformation continue.

Lereh (*M.*). — Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Macfarlane (*A.*). — Sur la définition des fonctions trigonométriques. — Les principes de l'analyse elliptique et hyperbolique.

Martin (*A.*). — Sur les nombres qui sont des cinquièmes puissances et dont la somme est une puissance cinquième.

Maschke (*H.*). — Invariants d'un groupe de 2168 substitutions linéaires effectuées sur quatre éléments.

Meyer (*F.*). — Tables de groupes de transformations finis et continus.

Minkowski (*H.*). — Sur des propriétés de nombres entiers déduites de représentations géométriques.

Moore (*E.*). — Un système doublement infini de grpupes simples.

Netto (*E.*). — Sur les tendances arithmético-algébriques de Léolpold Kronecker.

Noether (*M.*). — Éléments consécutifs et coïncidents sur une courbe algébrique.

Ocagne (*M. d'*). — Nomographie : Sur les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes.

Paladini (*B.*). — Sur le mouvement de rotation d'un corps rigide autour d'un point fixe.

Perott (*J. de*). — Une construction du groupe de Galois de 660 éléments.

Pervouchine (*T.*). — Sur les opérations arithmétiques concernant de grands nombres.

Pincherle (*S.*). — Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions.

Pringsheim (*A.*). — Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour le développement en série de Taylor d'une fonction d'une variable réelle. — Théorie générale de la divergence et de la convergence des séries à termes positifs.

Sawin (*A.*). — La résolution algébrique des équations.

Schlegel (*V.*). — Quelques théorèmes relatifs au centre de gravité. — Le théorème de Pythagore dans l'espace à plusieurs dimensions.

Schœnflies (*A.*). — Théorie des groupes et cristallographie.

Stringham (*J.*). — Formulaire pour une introduction aux fonctions elliptiques.

Study (*E.*). — Anciennes et récentes recherches sur les systèmes de nombres complexes. — Quelques recherches de Trigonométrie sphérique.

Taber (*H.*). — Sur la substitution orthogonale.

Weber (*H.*). — Pour la théorie des équations algébriques à coefficients entiers.

Weyr. — Sur l'équation des lignes géodésiques.

J. T.

KLEIN (F.). — The Evanston colloquium. Lectures on mathematics delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893, before members of the Congress of Mathematics held in connection with the world's fair in Chicago at northwerstern University Evanston, Ill. 1 vol. in-8°, VII-109 p. Reported by *A. Ziwet*. New York, Macmillan, 1894.

S'il n'était pas nécessaire d'être mathématicien pour comprendre ce que sont les Mathématiques, pour avoir quelque idée des problèmes qu'elles résolvent et qu'elles posent, du domaine qu'elles ont conquis, et des vastes territoires où elles pénètrent, il faudrait conseiller à tous de lire ces douze conférences, si riches

de faits et de suggestions, si variées dans leurs sujets, mêlant l'histoire de la Science, les vues philosophiques, les aperçus ingénieux, les théorèmes précis, les généralisations hardies, les conseils pédagogiques, abordant tour à tour les branches les plus variées de la Science, l'Arithmétique, l'Algèbre, la haute Analyse, la Géométrie. Je ne sais s'il est juste de faire à la Géométrie une place à part dans cette énumération; car, avec M. Klein, la Géométrie, ou plutôt l'intuition géométrique est partout : un réseau de points, figuré dans un plan et regardé comme il faut, nous donne une représentation concrète des nombres idéaux de M. Kummer; la considération de la figure formée par trois arcs de cercle sur une sphère vient éclairer les propriétés les plus cachées des fonctions hypergéométriques; l'icosaèdre régulier donne un corps aux recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré; à ce propos, voici la conception si profonde de Galois qui s'élargit : son groupe de permutations est remplacé par un groupe de substitutions linéaires et le problème de la résolution des équations, ou plutôt de leur réduction à des formes normales, est posé en des termes nouveaux. Après avoir parlé du caractère transcendant du nombre e, M. Klein imaginera que le plan soit recouvert par tous les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques et il observera que, si pressés les uns contre les autres que soient ces points, la courbe qui a pour équation $y = e^x$ ne passe que par un seul d'entre eux; s'il s'agit des fonctions elliptiques, hyperelliptiques ou abéliennes, on ne s'étonne pas sans doute, tout en admirant leur richesse et leur beauté, de voir surgir les interprétations géométriques; mais M. Klein poussera la coquetterie jusqu'à prendre dans la Géométrie même un exemple de ce qui ne peut être ni figuré, ni imaginé : une courbe sans tangentes; c'est la considération d'une chaîne formée de cercles dont chacun touche le précédent et le suivant et engendre de nouveaux cercles en se réfléchissant indéfiniment par inversion sur les autres, qui lui fournit cet ingénieux exemple, dans la courbe sur laquelle viennent se condenser tous les points de contact. Pour lui, les êtres mathématiques ne sont pas des abstractions; il les voit et il les fait voir, qui se jouent tantôt dans les espaces non euclidiens, tantôt dans cet espace vulgaire dont se contentent quelques géomètres, qui ne veulent pas sans doute que

l'espace n'existe que dans notre pensée. Le don de *voir*, qui lui a été départi si généreusement, M. Klein le rapporte avec modestie à la race teutonique, dont la puissance naturelle d'intuition serait un attribut prééminent; mais ne pousse-t-il pas la modestie trop loin lorsqu'il oppose à l'attribut de sa race la puissance logique et critique des Latins et des Israélites? Qui le croirait, s'il se refusait à lui-même cette puissance? Et n'oublie-t-il pas un peu que lorsqu'il s'est amusé à classer les mathématiciens en *logiciens*, en *formels* et en *intuitifs*, ce n'est pas parmi les représentants des races latine ou hébraïque qu'il a trouvé le type du logicien, d'ailleurs très illustre, caractéristique et bien choisi?

Dans ces lectures, dont le but était de faire connaître à ses auditeurs l'état des Mathématiques modernes, les questions les plus actuelles, M. Klein est naturellement amené à parler souvent de ses propres recherches; personne ne s'en plaindra et, à vrai dire, le tableau eût été par trop incomplet s'il les avait passées sous silence; il fait d'ailleurs une large part à ses nombreux élèves, dont plusieurs sont déjà des maîtres illustres; on sait que, pour lui, un élève est un collaborateur, et qu'il associe généreusement à ses propres recherches ses auditeurs de Gœttingue. Mais il ne s'enferme pas dans l'École dont il est le maître, et il a su trouver pour M. Sophus Lie une flatterie singulièrement délicate : c'est deux lectures entières qu'il consacre au grand géomètre norwégien, tout en déclarant d'abord qu'il entend n'en considérer le génie qu' « à l'état naissant ». A la vérité, le monument qu'a élevé M. Sophus Lie ne fera pas oublier son Mémoire *Ueber complexe insbesondere Linien-und Kugel-complexe, etc.* Ce Mémoire, dont M. Klein expose quelques résultats essentiels, lui donne l'occasion de rappeler son propre *Programme d'Erlangen,* où il a expliqué comment chaque système de géométrie est caractérisé par son groupe, et d'opposer en quelque sorte, l'un à l'autre, les groupes de ces deux géométries des sphères qu'ont fondées M. Lie d'une part, M. Darboux de l'autre. Une fois, dans le cours de ses lectures, il abandonnera les Mathématiques pures pour parler des Mathématiques appliquées et des sciences objectives : là même ses préoccupations habituelles le ressaisissent un instant et il ne peut s'empêcher de rappeler en passant comment la considération des courants électriques sur des surfaces fermées vient *illustrer* les théories de Riemann; mais ce n'est qu'un *a*

partie : il classe les diverses sciences appliquées d'après la quotité de chiffres qui figurent dans les nombres qu'elles considèrent; ainsi l'Astronomie emploie des nombres de sept chiffres; la Chimie n'emploie guère que des nombres de deux ou trois chiffres. M. Klein insiste sur le caractère toujours provisoire des nombres, des lois et des formules que l'on trouve dans les sciences expérimentales; il émet l'idée ingénieuse que, puisque ces sciences ne peuvent se servir que de formules approchées, il doit être possible de constituer, à l'usage de ceux qui s'y livrent, une Mathématique abrégée.

Je ne sais si j'ai pu donner quelque idée de la variété et de l'intérêt des sujets que M. Klein développe, indique, touche d'une main légère, ou approfondit : il y aurait une insupportable prétention à vouloir analyser une par une les lectures où l'on a toujours affaire à trois maîtres à la fois, au moins : un géomètre, un philosophe, un artiste. Lequel faudrait-il louer davantage? Je ne sais, et si on le demandait à M. Klein et qu'il pût répondre, ne serait-il pas embarrassé de le faire? S'il ressemblait à d'autres, il préférerait sans doute celui des trois qui est le moins développé, mais, encore une fois, lequel? Je me contenterai donc d'indiquer en terminant la liste de ces conférences : elle est déjà intéressante, et sans doute elle ne suffira pas à satisfaire la curiosité des lecteurs du *Bulletin*.

I. Clebsch. — II. Sophus Lie. — III. Sophus Lie. — IV. Sur les branches ou les nappes réelles des courbes ou des surfaces algébriques. — V. Théorie des fonctions et Géométrie. — VI. Sur le caractère mathématique de l'intuition de l'espace et la relation des Mathématiques pures avec les sciences appliquées. — VII. Transcendance des nombres e et π. — VIII. Nombres idéaux. — IX. La résolution des équations algébriques de degré élevé. — X. Sur quelques récents progrès dans la théorie des fonctions hyperelliptiques et abéliennes. — XI. Les plus récentes recherches dans la Géométrie non euclidienne. — XII. L'étude des Mathématiques à Göttingen.

M. Ziwet a placé à la suite de ces conférences la traduction d'un intéressant rapport sur le développement des Mathématiques dans les universités allemandes. J. T.

NEUMANN (C.). — ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS NEWTON'SCHE PRINCIP DER FERNWIRKUNGEN MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE ELECTRISCHEN WIRKUNGEN. 1 vol. in-8°; XXI-292 p. Leipzig, Teubner, 1896.

Après quelques observations intéressantes sur les difficultés qu'il y a à regarder la loi d'attraction de Newton comme absolument générale, et en particulier comme s'appliquant aux petites distances, M. Neumann aborde l'objet propre de son Livre, la recherche et l'étude des lois qui, pour les phénomènes électriques, sont propres à remplacer la loi de Newton.

Le principe, l'axiome si l'on veut, qui lui sert de point de départ n'est autre que l'existence d'un équilibre électrique.

C'est assurément une idée naturelle que de chercher à substituer au potentiel $\frac{1}{r}$, relatif à la loi de Newton, un potentiel de la forme

$$\varphi(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}$$

qui, en supposant α positif et très grand, ne différerait de $\frac{1}{r}$ que d'une quantité inappréciable, à moins que r ne fût très petit.

L'étude approfondie de cette loi particulière conduit l'auteur à cette conséquence : en supposant une telle loi d'attraction, l'équilibre électrique sur une sphère métallique serait impossible : l'électricité serait dans un *perpetuum mobile*. M. Neumann signale d'autres formes du potentiel qui conduiraient à la même conclusion, par exemple les formes

$$\varphi(r) = \mathrm{A}\,r^{\mathrm{N}} \qquad (\mathrm{N} = 1, 3, 5, \ldots),$$

où A est une constante. Cette étude particulière conduit naturellement à la question suivante :

Trouver les formes du potentiel $\varphi(r)$ compatibles avec l'équilibre électrique.

M. Neumann montre que la fonction $\varphi(r)$ doit avoir la forme

$$\varphi(r) = \frac{\mathrm{A}e^{-\alpha r}}{r} + \frac{\mathrm{B}e^{-\beta r}}{r} + \frac{\mathrm{C}e^{-\gamma r}}{r} + \ldots;$$

il appelle *loi exponentielle* la loi d'attraction correspondante; et cette loi est dite *à un, deux, trois, ..., termes*, suivant qu'on prend un, deux, trois termes dans le second membre. Inversement, si l'on suppose que les constantes α, β, γ, ... soient positives et que les constantes A, B, C, ... soient toutes de même signe, on peut affirmer que, pour un potentiel de la forme précédente, l'équilibre électrique est toujours possible, sur un conducteur quelconque et cela d'une seule façon.

Ni la méthode des variations de Gauss, ni le principe de Dirichlet, ni la méthode des moyennes arithmétiques ne suffisent à établir ce résultat : l'auteur y parvient en partant d'un principe analogue au principe des vitesses virtuelles, et qui, d'ailleurs, est immédiatement évident : il imagine une sorte de frottement virtuel, des forces fictives appliquées aux différents points du système et assujetties seulement à la condition de s'annuler toutes quand le système est au repos; dès lors, si, sous l'influence des forces réelles qui agissent sur la matière électrique, jointes aux forces fictives, doit se produire un état de repos durable : l'existence d'un état d'équilibre sous l'influence des forces données seules n'est pas douteuse. Au contraire, si l'état de repos durable : sous l'influence des forces données et du frottement virtuel, est impossible, l'état d'équilibre sous l'influence des forces données agissant seules est également impossible. L'application de ce double principe permet à M. C. Neumann de montrer que l'état d'équilibre est impossible pour un potentiel de la forme

$$\varphi(r) = A r^N \qquad (N = 2, 4, 6, 8, \ldots),$$

de retrouver les résultats connus relatifs à l'équilibre électrique pour un potentiel newtonien, enfin d'établir le théorème général qui a été énoncé plus haut. Ajoutons que l'état d'équilibre relatif à la loi exponentielle à un ou plusieurs termes est unique.

L'auteur est ainsi amené à étudier de près les propriétés générales du potentiel correspondant à la loi exponentielle.

Si l'on suppose la matière électrique distribuée partie dans l'espace, partie sur une surface avec les densités respectives ε, η et un potentiel V relatif à la loi exponentielle

$$\varphi(r) = \frac{A e^{-\alpha r}}{r} + \frac{B e^{-\beta r}}{r} + \frac{C e^{-\gamma r}}{r} + \ldots.$$

ce potentiel jouira d'abord des propriétés, semblables à celles du potentiel newtonien, qu'expriment les équations

$$V^j = V^a, \qquad \frac{\partial V^j}{\partial n} - \frac{\partial V^a}{\partial n} = -4\pi(A + B + C + \ldots)\eta,$$

où j et a désignent les deux faces (intérieure et extérieure) de la surface et n la normale à la surface dirigée vers l'intérieur.

En outre, si la loi exponentielle est à un terme, on aura

$$\Delta V = \alpha^2 V - 4\pi A\varepsilon;$$

si la loi exponentielle est à deux termes, on aura

$$\Delta^2 V - (\alpha^2 + \beta^2)\Delta V$$
$$+ \alpha^2\beta^2 V + 4\pi(A + B)\Delta\varepsilon - 4\pi(A\beta^2 + B\alpha^2)\varepsilon = 0;$$

en général, à mesure qu'on suppose plus de termes dans la loi exponentielle, l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction V se complique de plus en plus.

Ces propriétés générales permettent de déterminer l'état d'équilibre électrique dans un conducteur ou dans un système de conducteurs. Toutefois, dans des cas particuliers, des méthodes particulières conduisent à la solution des problèmes de cette nature; par exemple, dans le cas d'un conducteur sphérique, il convient de développer $\varphi(r)$ en série : dans le cas où $\varphi(r)$ ne contient qu'un terme, l'emploi des coordonnées polaires conduit à une série procédant suivant des fonctions sphériques, série où figurent comme coefficients quatre fonctions particulières, dont M. Neumann est amené à développer quelques propriétés très élégantes.

Ce cas d'une loi exponentielle à un seul terme, par la simplicité des résultats qui le concernent, mérite évidemment une étude particulière, tant au point de vue de l'attraction que de la distribution. Une couche sphérique homogène attire un point extérieur comme si toute l'action était concentrée au centre, mais la masse qu'il faut concentrer au centre est égale à

$$M\,\frac{e^{\alpha R} - e^{-\alpha R}}{\alpha},$$

en désignant par M la masse de la matière distribuée sur la couche et par R le rayon de cette couche.

Si l'on considère un conducteur sur lequel agissent des masses électriques extérieures, il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que le conducteur est, ou non, relié à la Terre.

Dans le premier cas, après que l'équilibre électrique s'est établi, il ne reste plus de trace d'électricité dans l'intérieur du conducteur. Toute l'électricité libre se porte à la surface. Dans le second cas, en dehors de la charge superficielle, il y a une distribution spatiale de l'électricité à l'intérieur du conducteur; la densité, à l'intérieur du conducteur, est constante et proportionnelle à α^2. Toutes ces recherches sont poussées jusqu'au bout dans le cas où le conducteur est une sphère.

Lorsque la loi exponentielle comporte plusieurs termes, il y a encore une distribution spatiale et une distribution superficielle; c'est là la différence essentielle avec la loi de Newton. Au reste, pour une telle loi, et même pour une loi d'attraction quelconque, subsiste une théorie générale, qui comprend comme cas particulier la théorie de la fonction de Green.

La relation bien connue

$$r^{p-2} = \frac{1}{\Pi(-p)} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha r}}{r} \alpha^{-p}\, d\alpha \qquad (0 < p < 1)$$

montre que le cas où la fonction $\varphi(r)$ serait de la forme r^{p-2} peut être considéré comme un cas limite de la loi exponentielle. Cette loi d'attraction a déjà été étudiée par Green dans un Mémoire un peu oublié ([1]) que M. Neumann regarde comme un des plus beaux et des plus difficiles de ceux que l'on doit à l'illustre mathématicien. Le fait que cette loi d'attraction est un cas limite de sa loi exponentielle lui permet d'ailleurs d'arriver aux résultats de Green d'une façon beaucoup plus aisée. Avec la loi de Green, la distribution de l'électricité est spatiale, et il n'y a pas lieu de faire une étude particulière de la distribution à la surface. Si la constante p s'approche de 1, la matière électrique se condense près de la surface; à la limite, pour $p = 1$, la distribution est purement superficielle, en sorte que l'adoption de la loi de Green

([1]) *Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids, etc.*; 1832.

débarrasserait l'Électrostatique des couches électriques infiniment minces. L'étude de M. Neumann, quoique beaucoup plus simple que celle de Green, reste encore assez difficile, et l'auteur souhaite qu'on arrive à la simplifier encore; toutefois, certains résultats sont particulièrement simples.

Si une sphère métallique isolée, de rayon R, est chargée d'une quantité d'électricité donnée, la densité ε de la matière électrique, après que l'équilibre s'est établi, ne dépend que de la distance ρ au centre; elle est donnée par la formule

$$\varepsilon = C\left(\frac{1}{R^2-\rho^2}\right)^{\frac{p+1}{2}};$$

si une masse électrique extérieure concentrée en un point m agit sur une sphère conductrice reliée à la Terre, la densité électrique ε en un point j de l'intérieur dépend de la distance ρ du point j au centre de la sphère, et de la distance r du même point m; elle est donnée par la formule

$$\varepsilon = D\left(\frac{1}{R^2-\rho^2}\right)^{\frac{p+1}{2}}\left(\frac{1}{r}\right)^3.$$

Dans ces formules C, D sont des constantes; si la sphère métallique n'est pas reliée à la Terre, la densité électrique est donnée comme somme des deux expressions précédentes.

Les recherches précédentes forment un tout bien cohérent : les deux derniers Chapitres de l'auteur ont un objet tout différent : l'un se rapporte aux recherches de l'auteur ([1]) sur la loi de Weber et ce qu'il appelle le *potentiel effectif*

$$W = \frac{mm_1}{r} + \frac{1}{c^2}\,\frac{mm_1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2;$$

ces recherches sont exposées en prenant pour point de départ le principe de Hamilton. Elles sont reliées ensuite à l'hypothèse d'une transmission très rapide, mais non instantanée, du potentiel, en admettant que l'action mutuelle de deux corps ne dépende que de leurs positions mutuelles. Un paragraphe est ensuite con-

---

([1]) C. Neumann, *Die Principien der Elektrodynamik*, Programm der Tübinger Universität, 1868; *voir* aussi *Math. Annalen*, t. XVII, p. 400.

sacré à la critique des théories de Maxwell et surtout de Hertz ([1]).

Enfin le dernier Chapitre se rapporte à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\Psi = \alpha^2\Psi$$

relative à la loi exponentielle à un seul terme, par la méthode de la moyenne arithmétique. L'auteur y montre comment cette méthode, qu'il a développée jadis pour l'équation de Laplace, s'applique ici beaucoup plus simplement, les difficultés que comporte ce dernier cas tenant à cela même qu'il est un cas limite; en sorte que, si l'on voulait s'affranchir de la restriction relative à la convexité de la surface sur laquelle la fonction Ψ doit avoir des valeurs prescrites, il conviendrait de s'attaquer à l'équation générale plutôt qu'à l'équation de Laplace.

En tête de son Livre, M. C. Neumann a mis une préface qui contient d'intéressantes vues philosophiques et un résumé très lumineux de ses recherches. J. T.

TEIXEIRA (G.). — CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL. CALCULO DIFFERENCIAL. 2e édition. — 1 vol. in-8°, 383 p. Porto, Typographia occidental, 1896.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition du Cours de Calcul différentiel de M. Gomes Teixeira, dont le *Bulletin* a déjà rendu compte.

NIEWENGLOWSKI (B.). — COURS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A L'USAGE DES ÉLÈVES DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT. Trois volumes in-8°. Tome I : Sections coniques, 1894. — Tome II : Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques, 1895. — Tome III : Géométrie dans l'espace avec une Note sur les Transformations en Géométrie, par *E. Borel*, 1896. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Le *Bulletin* n'a pas l'habitude de rendre compte des livres

([1]) HERTZ, *Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Electrodynamik;* Werke, t. I, p. 295.

destinés à l'enseignement secondaire; il serait légitime de faire quelquefois exception à cette règle pour les livres destinés à l'enseignement de la classe de Methématiques spéciales, puisque cet enseignement est habituellement donné dans les Universités étrangères et que, sans doute, il prendra quelque jour une place modeste dans les nôtres, avec un but très différent de celui qu'on cherche à atteindre dans nos lycées. Quoi qu'il en soit, et malgré tout le mérite du *Cours de Géométrie analytique* de M. Niewenglowski, nous n'aurions probablement pas parlé de cet excellent Livre, dont il est bien inutile de recommander l'auteur au public français, sans la *Note sur les transformations en Géométrie* que M. Niewenglowski a placée à la fin du dernier Volume et qu'il avait demandée à M. Borel, son ancien élève. A la vérité, cette Note est écrite pour les élèves de Mathématiques spéciales et l'auteur a pris grand soin de n'y introduire aucune notion qui ne fût pas à leur portée; mais, par son esprit, elle dépasse singulièrement les limites des programmes, et l'auteur n'y cache pas l'intention qu'il a d'ouvrir à ceux qui le liront un monde d'idées nouvelles, et non d'ajouter à leurs connaissances une masse de petits faits sans connexion. Les jeunes gens qui étudieront la Note de M. Borel n'y trouveront sans doute rien qui, pour leurs examens, leur soit immédiatement utile, mais quelques-uns y apprendront peut-être que la science n'est pas bornée aux propriétés du triangle, ou même des coniques, et y puiseront le secret désir d'explorer un jour ces vastes régions qu'on leur découvre. Malgré leurs soucis strictement professionnels, qui sont parfois si écrasants, les maîtres de nos Lycées gardent la préoccupation d'éveiller et de surveiller les vocations scientifiques de ceux qui passent entre leurs mains; c'est un honneur auquel ils entendent ne pas renoncer, et, s'il en était besoin, la publication du Livre de M. Niewenglowski en serait une nouvelle preuve.

Après quelques généralités sur les transformations qui conduisent le lecteur à la notion de groupe, de substitution transformée par une autre substitution, d'isomorphisme, d'invariance d'un groupe, etc., M. Borel établit les propriétés élémentaires du groupe projectif et de ses principaux sous-groupes (groupe linéaire, groupe des mouvements). Passant ensuite aux transformations ponctuelles, il étudie l'inversion sphérique et plane (symétrie),

puis le groupe (G) formé par la combinaison des transformations S (inversion sphérique), P (inversion plane), D (déplacement), H (homothétie), SP, SD, HD. La définition analytique du groupe (G) amène à considérer les transformations homographiques de cinq variables qui laissent invariante une forme quadratique et amène naturellement aux coordonnées pentasphériques. L'étude des transformations corrélatives amène à considérer les transformations par polaires réciproques par rapport à une quadrique et par rapport à un complexe linéaire, puis à la notion du groupe (G) constitué par l'ensemble des transformations corrélatives et des transformations homographiques, transformations qui laissent invariable l'ensemble des droites de l'espace. M. Borel arrive ensuite à la définition générale des transformations de contact, pour étudier plus spécialement cette belle transformation, due à M. Lie, qui fait correspondre les sphères aux droites; on remarquera, dans cette étude, la façon dont il fait ressortir le rôle des éléments de contact *opposés*. Enfin, un dernier paragraphe est consacré aux transformations dans l'espace à plus de trois dimensions; l'auteur y introduit la notion des plans générateurs d'une quadrique générale et montre comment s'interprètent, de ce nouveau point de vue, les résultats précédemment obtenus. De nombreux et intéressants exercices sont joints à cette Note, de manière à bien faire ressortir l'importance des belles théories que M. Borel a su esquisser d'une façon singulièrement élégante. J. T.

POINCARÉ. — Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894, rédigées par MM. *Rouyer* et *Baire*; 1 vol. in-8°, 316 p. Paris, Carré, 1895.

Ces Leçons sont consacrées à l'étude de la propagation de la chaleur par conductibilité, qui a fait l'objet d'un Ouvrage célèbre de Fourier. L'auteur s'est proposé d'exposer la méthode que ce géomètre a suivie pour édifier sa théorie, et d'en compléter les résultats.

Le premier Chapitre contient les considérations d'ordre phy-

sique qui vont servir de base à la théorie. En premier lieu, l'expérience montre qu'il n'y a pas échange de chaleur entre deux parties d'un corps éloignées l'une de l'autre, mais seulement entre deux portions contiguës du corps. En second lieu, Fourier admet que la quantité de chaleur cédée par une molécule à une autre ne dépend que de la différence des températures et non des températures elles-mêmes.

Dans ces conditions, une molécule m_0 cède pendant le temps dt à une molécule m_1 une quantité de chaleur

$$dQ = \varphi(p)(V_0 - V_1)\,dt;$$

V_0 et V_1 sont les températures des molécules m_0 et m_1; p est leur distance, et $\varphi(p)$ est une certaine fonction, négligeable dès que p est supérieur à une limite ε très petite.

Si l'on n'admettait pas l'hypothèse de Fourier, il faudrait employer la formule

$$dQ = \varphi(p, V_0)(V_0 - V_1)\,dt.$$

Vient ensuite la définition du flux de chaleur. Si l'on considère un élément de surface $d\omega$, infiniment grand par rapport à ε, mais très petit en valeur absolue, une molécule m_0 située d'un côté de l'élément cède de la chaleur à une molécule m_1 située de l'autre côté; considérons tous les couples de molécules tels que $(m_0 m_1)$ et faisons la somme des quantités de chaleur correspondantes; on obtient ainsi le *flux de chaleur* qui traverse l'élément $d\omega$.

Le reste du premier Chapitre est consacré à l'évaluation du flux de chaleur, par deux méthodes différentes. On trouve l'expression suivante :

$$dQ = -K\frac{dV}{dn}\,dt\,d\omega;$$

$\frac{dV}{dn}$ est la dérivée de la température prise suivant la normale à l'élément ζ; K est une constante si l'on adopte l'hypothèse de Fourier: ce serait une fonction de la température dans le cas contraire.

Dans le Chapitre II, on applique les considérations précédentes à un parallélépipède élémentaire, et en évaluant de deux manières la quantité de chaleur qui y entre, on arrive à l'équation différen-

tielle du mouvement de la chaleur dans un corps homogène et isotrope. Dans l'hypothèse de Fourier, cette équation a une forme linéaire

$$\frac{dV}{dt} = k\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right),$$

k est une constante.

C'est en somme l'étude de cette équation qui fait le principal objet du cours. Il y a deux problèmes qui se posent :

Problème des températures variables. — *On se donne la distribution des températures à l'instant initial; on veut savoir ce qu'elle est devenue au bout d'un temps quelconque.*

Problème des températures stationnaires. — *On admet qu'au bout d'un certain temps l'équilibre calorifique est établi, et l'on cherche quelle sera alors la distribution des températures.*

Pour que ces deux problèmes soient déterminés, il faut se donner, outre la distribution initiale, des conditions à la surface; on admet que, le corps étant placé dans une enceinte, chaque élément $d\omega$ de sa surface perd une quantité de chaleur

$$H\, d\omega\, dt(V - V_0);$$

H est une constante pour chaque élément $d\omega$; V est la température de cet élément, et V_0 la température de l'enceinte au voisinage de l'élément.

On démontre qu'étant données les conditions analytiques du problème, chacun d'eux ne peut avoir qu'une solution.

Après ces généralités, nous passons au premier exemple traité par Fourier, le problème des températures stationnaires dans un solide rectangulaire indéfini; c'est l'objet du Chapitre III.

Pour fixer les idées, donnons-nous les conditions suivantes : le solide est limité par les plans $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$; on a

Pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$ . . . . $V = 0$,

» $y = \infty$ . . . . $V = 0$.

» $y = 0$ . . . . $V = f(x)$.

On montre que le problème se résout simplement dans deux cas particuliers.

Si $f(x) = \sin 2mx$, on a

$$V = e^{-2my} \sin 2mx.$$

Si $f(x) = \cos(2m-1)x$, on a

$$V = e^{-(2m-1)y} \cos(2m-1)x.$$

On est alors conduit, dans le cas où $f(x)$ est une fonction quelconque, à chercher à représenter cette fonction par une série de la forme

$$(1) \qquad a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + \ldots + b_2 \sin 2x + b_4 \sin 4x + \ldots.$$

Si la chose est possible, la solution du problème sera fournie par la série

$$V = a_1 \cos x e^{-y} + a_3 \cos 3x e^{-3y} + \ldots + b_2 \sin 2x e^{-2y} + b_4 \sin 4x e^{-4y} + \ldots.$$

Il sera nécessaire, bien entendu, d'examiner si cette série est convergente, et de vérifier qu'elle représente bien une fonction satisfaisant aux conditions du problème.

Dans tous les cas, on est conduit, par l'étude de cet exemple, à étudier la représentation d'une fonction définie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ par une série trigonométrique de la forme (1).

On ramène facilement ce problème au suivant : *Représenter une fonction définie entre* $-\pi$ *et* π *par une série trigonométrique de la forme générale :*

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots.$$

L'étude de cette question fait l'objet de la fin du Chapitre III et du Chapitre IV. Dans ce dernier Chapitre, on démontre que la représentation est possible si la fonction satisfait à la condition de Dirichlet, c'est-à-dire si elle peut être considérée comme la différence de deux fonctions dont chacune reste constamment finie et n'est jamais croissante. Ensuite, on étudie les propriétés des séries que l'on vient d'obtenir, au point de vue des discontinuités.

Dans le Chapitre V, nous passons au problème des tempéra-

tures variables dans une armille, c'est-à-dire dans un circuit fermé de section infiniment petite. L'équation du mouvement de la chaleur est dans ce cas

$$\frac{dV}{dt} + aV = k\frac{d^2V}{dx^2},$$

x étant la longueur du fil comptée à partir d'une certaine origine. Un changement de variable simple conduit à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{dx^2},$$

la longueur du circuit étant alors 2π.

U doit être une fonction périodique de x de période 2π, et se réduire pour $t = 0$ à une fonction donnée $f(x)$.

On aperçoit comme solution particulière de l'équation (2) les fonctions

$$\cos nx\, e^{-n^2t},$$
$$\sin nx\, e^{-n^2t}.$$

On en déduit que si $f(x)$ est développable par la formule

$$f(x) = \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

la solution du problème sera

$$U = \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) e^{-n^2t}.$$

Cette fonction U est holomorphe par rapport à x et à t pour toutes les valeurs positives de t; elle vérifie d'ailleurs toutes les conditions du problème.

Il est possible de transformer de différentes manières l'expression trouvée pour U. En premier lieu, le calcul des coefficients a_n et b_n montre que l'on peut écrire

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z)\,dz}{2\pi}\,\Theta,$$

avec

$$\Theta = 1 + 2\sum \cos n(x - z) e^{-n^2t}.$$

On est ainsi ramené à la fonction Θ de Jacobi, qui peut se transformer d'après la théorie des fonctions elliptiques; on peut écrire

$$\Theta = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z-2n\pi)^2}{4t}}.$$

Chapitre VI. — Le problème des températures variables est ainsi résolu pour un circuit de longueur finie; il est naturel de se demander ce que deviennent les formules finales, lorsque la longueur du circuit croît indéfiniment. On va montrer dans ce qui suit que ces fonctions correspondent alors au cas d'un fil indéfini.

La solution de Fourier pour le cas d'un fil indéfini repose sur une transformation des séries trigonométriques, qui conduit à considérer l'intégrale de Fourier.

On démontre que l'on peut représenter une fonction $f(x)$ définie entre $-\infty$ et $+\infty$ et satisfaisant à la condition de Dirichlet par l'intégrale

$$\int_0^{\infty} [\varphi(q) \cos q x + \psi(q) \sin q x] \, dq,$$

en posant

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\cos q z}{\pi} \, dz,$$

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\sin q z}{\pi} \, dz.$$

Le Chapitre VII est consacré à quelques propriétés de l'intégrale de Fourier qui vient d'être définie. On y démontre que les intégrales

$$\int_0^{\infty} \varphi(q) \cos q x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \varphi(q) \sin q x \, dx$$

sont des fonctions holomorphes de x, sauf pour $x = 0$, en supposant que la fonction $\varphi(q)$ s'annule quand q croît indéfiniment, et l'on étudie les singularités de ces fonctions pour $x = 0$.

Chapitre VIII. — La méthode qui vient d'être employée pour intégrer l'équation

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2 U}{dx^2},$$

peut s'appliquer à d'autres équations linéaires qu'on rencontre en Physique mathématique, en particulier à l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2},$$

et à l'équation des télégraphistes

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + U.$$

On est conduit, par ce qui précède, à appliquer une méthode uniforme à ces trois équations. On cherche à y satisfaire au moyen d'une fonction de la forme

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q, t) e^{iqx}\, dq.$$

La forme de la fonction φ est déterminée, en premier lieu par l'équation différentielle, en second lieu par les conditions initiales; pour $t = 0$, U doit se réduire à une fonction donnée $f(x)$. On suppose que cette fonction $f(x)$ est mise sous la forme d'une intégrale de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(q) e^{iqx}\, dq.$$

On a alors la condition

$$\varphi(q, 0) = \theta(q).$$

On obtient ainsi la solution des trois problèmes.

Vient ensuite la discussion de quelques exemples particuliers, puis une comparaison des effets produits par une perturbation initiale, dans les trois modes de propagation de la chaleur, du son et de l'électricité.

Chapitre IX. — Après la solution de Fourier, qui vient d'être exposée, l'auteur traite le problème du fil indéfini par la méthode de Laplace; on part de la solution particulière

$$U = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$

On trouve que la solution qui, pour $t = 0$, doit se réduire à $f(x)$ est

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que les deux solutions de Fourier et de Laplace sont identiques.

Cette solution de Laplace peut s'étendre au cas d'un solide indéfini dans tous les sens. On a, comme solution particulière de l'équation

$$\frac{dU}{dt} = \Delta U,$$

la fonction

$$U = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4t}},$$

et l'on en déduit la solution

$$V = \iiint \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{8\sqrt{\pi^3 t^3}} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

l'intégrale étant étendue à l'espace tout entier.

Chapitre X. — Comme nouvel exemple, considérons le problème du refroidissement d'une sphère, en supposant qu'à l'instant initial la température dépende seulement de la distance au centre. On ramène le problème à l'intégration de l'équation

$$(3) \qquad \frac{dU}{dt} = \frac{d^2U}{dr^2},$$

avec les conditions suivantes :

U sera une fonction de r définie entre 0 et 1 qui, pour $r = 1$, satisfait à l'équation

$$(4) \qquad \frac{dU}{dr} = (1 - h)U,$$

et pour $t = 0$, se réduit à

$$r.f(r).$$

h est une constante comprise entre 0 et 1.

On va chercher à appliquer la méthode de Fourier, c'est-à-dire à exprimer U par une série dont les termes seront des intégrales particulières de l'équation (3) satisfaisant, en outre, à l'équation (4).

On trouve, comme solution particulière, la fonction

$$U = e^{-\mu^2 t} \sin \mu r,$$

dans laquelle μ doit satisfaire à l'équation transcendante

$$(5) \qquad \tan g \mu = \frac{1}{1-h} \mu.$$

Cette équation est discutée dans les paragraphes suivants; on reconnaît qu'elle a une infinité de racines positives μ_1, μ_2, ..., μ_n, ...

On est alors conduit au résultat suivant : S'il est possible de développer la fonction $rf(r)$ en une série de la forme

$$A_1 \sin \mu_1 r + A_2 \sin \mu_2 r + \ldots + A_n \sin \mu_n r + \ldots,$$

la solution du problème sera

$$U = A_1 e^{-\mu_1^2 t} \sin \mu_1 r + A_2 e^{-\mu_2^2 t} \sin \mu_2 r + \ldots + A_n e^{-\mu_n^2 t} \sin \mu_n r + \ldots.$$

La question est donc ramenée au développement d'une fonction s'annulant pour $r = 0$ suivant les fonctions particulières $\sin \mu r$.

Si l'on admet que le développement est possible, il est facile de déterminer les coefficients; mais Fourier n'a pas démontré la possibilité du fait. Pour établir ce point d'une manière rigoureuse, il faut recourir à une méthode donnée par Cauchy.

Il est nécessaire, pour l'exposition de cette méthode, de définir et d'évaluer les valeurs asymptotiques des fonctions; c'est l'objet des deux Chapitres suivants. Dans le Chapitre XI, on étudie principalement les valeurs asymptotiques des fonctions de la forme suivante :

$$P_1 e^{i\alpha_1 z} + P_2 e^{i\alpha_2 z} + \ldots + P_n e^{i\alpha_n z},$$

où les P sont des polynomes entiers en z, et les α des quantités réelles. Dans le Chapitre XII, on étudie les intégrales définies de

la forme

$$\int_a^b f(x)e^{i\alpha x}\,dx.$$

Enfin, dans le Chapitre XIII on montre, en appliquant les résultats précédents, que, sous certaines conditions, une fonction peut être développée en série procédant suivant les exponentielles $e^{-i\mu x}$, les μ étant les racines, en nombre infini, d'une certaine équation transcendante que l'on peut choisir arbitrairement.

En particulier, on peut retrouver la série de Fourier, en prenant l'équation

$$e^{i\mu\pi} - e^{-i\mu\pi} = 0.$$

Pour résoudre le problème du refroidissement de la sphère, on doit considérer l'équation

$$\operatorname{tang}\mu = A\mu.$$

Chapitre XIV. — Après avoir ainsi donné la solution complète d'un certain nombre de cas particuliers, nous abordons maintenant le problème général du refroidissement d'un corps quelconque; mais ici nous perdrons en rigueur ce que nous gagnerons en généralité.

La résolution du problème est basée sur l'existence des fonctions qu'on appelle *fonctions harmoniques,* qui jouissent des propriétés suivantes :

Si U est une fonction harmonique relative à un corps déterminé, on a, à l'intérieur du corps,

$$\Delta U + kU = 0,$$

k étant une certaine constante, et à la surface

$$\frac{dU}{dn} + hU = 0,$$

h étant la constante donnée dans l'énoncé du problème.

On démontre, par un procédé qui rappelle la démonstration du principe de Dirichlet donnée par Riemann, qu'il existe une infinité de fonctions U, et l'on en donne les propriétés les plus simples.

Comme application, on détermine les fonctions U dans le cas du parallélépipède rectangle.

Dans le Chapitre XV, se trouvent exposées les propriétés générales des fonctions U et des constantes k qui leur correspondent; en particulier, on montre qu'il est possible de déterminer des limites inférieures pour ces quantités k.

Nous arrivons ensuite à l'application des fonctions U au problème de Fourier. Il faut trouver une fonction V telle que l'on ait

$$\frac{dV}{dt} = \Delta V,$$

à l'intérieur du corps;

$$\frac{dV}{dn} + hV = 0,$$

à la surface, et

$$V = V_1(x, y, z),$$

pour $t = 0$.

Si l'on peut développer V_0 en série procédant suivant les fonctions harmoniques

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + \ldots,$$

on vérifie que la solution est

$$V = A_1 U_1 e^{-k_1 t} + A_2 U_2 e^{-k_2 t} + \ldots + A_n U_n e^{-k_n t} + \ldots.$$

La question étant ainsi ramenée au développement de la fonction V_0 suivant les fonctions U, il est facile de déterminer les coefficients A. Il resterait alors à démontrer que, si l'on pose

$$V = A_1 U_1 e^{-k_1 t} + \ldots + A_n U_n e^{-k_n t} + R_n,$$

le reste R_n tend vers 0 quand n croît indéfiniment. C'est ce qui n'est pas démontré. On montre seulement que l'intégrale

$$\iiint R^2\, dt,$$

tend vers zéro.

L'auteur indique ensuite une méthode, fondée sur une généralisation de la méthode de Cauchy, que l'on pourrait essayer d'employer pour démontrer en toute rigueur la possibilité du développement.

Chapitre XVI. — Comme application de la théorie générale, nous considérons le cas d'une sphère de rayon 1, la température étant distribuée d'une manière quelconque dans le corps.

Il est utile de définir, à ce propos, les polynomes et les fonctions sphériques.

Un polynome sphérique est un polynome II homogène en x, y, z, et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \text{II} = 0.$$

Si l'on transforme les coordonnées x, y, z en coordonnées polaires r, θ, φ, on a

$$\text{II}_n = r^n . \text{X}_n.$$

X_n est une fonction des angles θ et φ que l'on appelle *fonction sphérique*.

On va montrer qu'une fonction arbitraire des deux angles θ et φ est développable suivant les fonctions sphériques; pour cela l'auteur commence par rappeler de quelle manière Laplace a été conduit à ce résultat, par des considérations relatives au potentiel; puis il expose la méthode que Dirichlet a donnée pour établir la proposition rigoureusement.

Chapitre XVII. — Supposons, d'après cela, qu'une fonction harmonique U, relative à la sphère, soit développable par les fonctions sphériques. Soit

$$\text{U} = \Sigma\, \varphi_n(r) . \text{II}_n.$$

On montre facilement que chaque fonction φ doit satisfaire à une équation différentielle du second ordre,

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\,\frac{n+1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} + k\varphi = 0.$$

En outre, on doit avoir la condition

$$\frac{d\varphi}{dr} + (n+h)\varphi = 0,$$

pour $r = 1$.

Il faut résoudre la question suivante : Développer suivant les

fonctions U une fonction arbitraire V de r, θ et φ; la question se ramène au développement d'une fonction arbitraire de r, définie entre 0 et 1 au moyen des fonctions φ.

Avant de traiter cette question, l'auteur indique un nouveau problème, celui du refroidissement d'un cylindre de révolution, qui va nous conduire à des résultats analogues. En considérant les coordonnées semi-polaires r, ω, z, on trouve des fonctions U de la forme

$$Z(z).\varphi(r).\text{H}.$$

Z est égal à $\sin\mu z$ ou $\cos\mu z$, μ étant racine d'une équation déterminée. H est un polynome sphérique, et φ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2n+1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+k'\varphi=0,$$

ainsi qu'à l'équation à la limite

$$\frac{d\varphi}{dr}+(n+h)\varphi=0.$$

pour $r=1$.

Chapitre XVIII. — Ainsi, les deux cas particuliers qui précèdent conduisent à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2n+1}{r}\frac{d\varphi}{dr}+k\varphi=0,$$

qui se ramène à

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2n+1}{x}\frac{d\varphi}{dx}+\varphi=0.$$

Le paramètre n est un entier dans le cas du cylindre et la moitié d'un entier impair dans le cas de la sphère.

Le dernier Chapitre est consacré à l'intégration de cette équation et à l'étude des valeurs asymptotiques de ses intégrales. Enfin, on démontre le seul point qui reste à établir, c'est-à-dire la possibilité du développement d'une fonction arbitraire V(r) définie entre 0 et 1 suivant les fonctions φ.

Maurice d'OCAGNE, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale. 1 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Les Leçons que publie M. Maurice d'Ocagne s'adressent aux élèves du cours préparatoire de l'École des Ponts et Chaussées. Il faut donc tenir compte du cadre dans lequel l'auteur était tenu de se renfermer et du but précis qu'il devait poursuivre : initier de futurs ingénieurs aux principes essentiels de la Géométrie infinitésimale et aux grands problèmes qui constituent l'actualité dans cette science. L'auteur ne pouvait songer à recourir aux grandes méthodes générales qui exigent un temps qu'on ne peut pas toujours demander à de jeunes esprits impatients de se spécialiser dans des recherches d'un autre ordre. L'auteur a su choisir avec beaucoup de sagacité des méthodes plus simples qui devaient l'amener exactement au but qu'il voulait atteindre.

Nous ne dirons rien de la première Partie du Livre, entièrement occupée par la Géométrie descriptive et qui contient, en quatre Chapitres, les théories classiques des projections cotées, de la perspective axonométrique, des ombres et de la perspective linéaire. L'ordre et la méthode font tout le prix de ces quatre Chapitres, dont le fond se trouve à peu près imposé par l'usage, fixé lui-même par les nécessités de la pratique.

La seconde Partie, la Géométrie infinitésimale, offrait, comme nous l'avons déjà dit, plus de prise à l'initiative personnelle de l'auteur.

Après avoir rappelé en un préambule les principes de la méthode infinitésimale en Géométrie et en Analyse, l'auteur traite la théorie des courbes planes.

Il la ramène toute à trois formules fondamentales, utilisées déjà par M. Mannheim dans son *Cours de l'École Polytechnique*. Il convient de noter le soin qu'a pris M. d'Ocagne de préciser dans ces formules la question des signes. Ces précautions ne sont pas, comme certains le pourraient croire, le fait d'un esprit hanté de l'amour de la forme; ces tendances vers le vide ne sauraient être

imputées à un savant aussi pénétré des convenances pratiques que l'est l'ingénieux rénovateur des abaques.

En réalité, ces précautions sont indispensables dès que l'on veut passer aux plus modestes applications et l'étudiant qui veut résoudre son problème n'est pas moins à même d'en reconnaître l'utilité que le géomètre qui poursuit ses recherches.

Les deux premières des formules dont nous parlons ont trait à la question suivante :

Une droite tangente en un point M à une courbe (M) coupe en un point A une seconde courbe (A), sous un certain angle α ; il s'agit de trouver les deux relations qui lient l'angle α, le segment MA, ainsi que les différentielles de MA, des arcs des courbes (M) et (A) et de l'angle que fait MA avec une droite fixe.

Ces deux formules généralisent, comme on voit, celles qui, en coordonnées polaires, relient entre eux le rayon vecteur, l'angle polaire, les différentielles de ces quantités, celle de l'arc de la courbe et l'angle sous lequel la courbe est coupée par le rayon vecteur.

Enfin, dans la troisième formule fondamentale, on suppose que l'on ait mené d'un point A d'une courbe (A) des tangentes à deux courbes fixes (M), (M_1) et l'on se propose d'évaluer la différentielle de l'angle de ces deux tangentes.

Ces trois formules sont d'une démonstration facile et s'adaptent avec une souplesse remarquable à la démonstration d'un grand nombre de propositions qui en ressortent comme autant de cas particuliers. Avec beaucoup d'élégance, M. d'Ocagne en a tiré la théorie des normales et des développées, ainsi que plusieurs propositions concernant des enveloppes de droites assujetties à certaines conditions.

Nous signalerons entre autres l'intéressante application aux sections isogonales et à la fibre moyenne d'une voûte, dont la considération a été introduite par M. Jean Resal.

La théorie des courbes gauches, qui remplit le Chapitre suivant, sera complétée ultérieurement par l'étude des développables qui s'y rattachent, quand on aura exposé les propriétés générales des surfaces. L'auteur a consacré quelques développements étendus

à l'étude de l'hélice, dont on connaît le rôle important dans quantité d'applications pratiques.

L'étude des *surfaces en général* est l'objet d'un Chapitre important.

De la définition du plan tangent, l'auteur passe, par une extension naturelle, aux enveloppes en général, et comme il aime, avec raison, à illustrer d'exemples les théories générales, il applique aussitôt cette notion à la démonstration du théorème de Malus relatif aux rayons réfléchis.

Dans l'étude de la courbure, M. d'Ocagne suppose la surface rapportée à son plan tangent, et sur la forme réduite de l'équation de la surface il étudie sa forme et montre comment la discussion géométrique amène nécessairement l'indicatrice de Dupin, les transports asymptotiques et les couples de tangentes conjuguées.

Il déduit les théorèmes d'Euler et de Meusnier de considérations purement géométriques et montre quels liens les rattachent à l'indicatrice de Dupin.

C'est aussi par les moyens de la Géométrie pure que sont exposées les propriétés des axes de courbure de Sturm, les formules de M. J. Bertrand et d'Ossian Bonnet.

A propos de la mesure de la courbure de la surface en un point, on trouvera définies la courbure totale de Gauss, la courbure moyenne de Sophie Germain, et enfin la courbure introduite par M. Casorati et qui est représentée par la demi-somme des carrés des inverses des rayons de courbure principaux. Toutes ces expressions généralisent à certains points de vue la notion analogue relative aux courbes; en se plaçant à des points de vue nouveaux, on obtiendra d'autres formes de généralisation. Cependant, la courbure de Gauss a pour elle cette propriété capitale de rester invariable dans une déformation de la surface.

Ce Chapitre se termine par un paragraphe sur les lignes tracées sur une surface. La définition de la courbure et de la torsion géodésiques occupent naturellement la première place.

La formule de M. Bertrand et celle d'Ossian Bonnet donnent chacune une expression de la torsion géodésique que l'auteur ne manque pas de faire connaître. Les lignes de courbure et leur rôle dans les systèmes orthogonaux, les lignes asymptotiques, les

lignes conjuguées, les lignes géodésiques sont tour à tour définies et étudiées.

Enfin, désireux de ne laisser ignorer à ses auditeurs aucun des grands problèmes qui occupent les géomètres de ce siècle, l'auteur les initie à la théorie des surfaces minima et à celle de la déformation.

Le Chapitre qui termine l'Ouvrage traite des surfaces de nature spéciale; il offrira naturellement des applications variées des théories précédentes.

Nous trouvons d'abord les surfaces enveloppes de sphères, et en particulier la cyclide de Dupin, les surfaces de révolution.

Viennent ensuite les surfaces gauches. La distribution du plan tangent le long d'une génératrice donne lieu à une question de sens et de signe, qui peut être une cause d'embarras dans les épures et que l'auteur a tenu à éclaircir avec netteté. Si, en effet, le point de contact se déplace dans un sens déterminé sur la génératrice rectiligne, pour un observateur traversé des pieds à la tête par le point mobile, le plan tangent pourra paraître tourner soit à gauche, soit à droite; de là une question de signe pour le paramètre de distribution. M. d'Ocagne a insisté comme il convenait sur ce point délicat.

Nous retrouvons un soin analogue à propos des surfaces gauches à cône directeur de révolution et, en particulier, des hélicoïdes gauches. Dans la théorie des surfaces, on trouvera une élégante détermination de l'indicatrice pour un point quelconque de la surface. Ces hélicoïdes jouent un rôle particulièrement important dans les applications; de là l'étude soignée et détaillée qu'en a faite l'auteur.

C'est aux surfaces développables que sont consacrés les deux derniers paragraphes du Livre. Leur théorie vient compléter celle des courbes gauches auxquelles elles sont liées et dont elles sont les réciproques sur voie de dualité. L'application aux surfaces d'égale pente était tout indiquée dans un cours professé devant de futurs ingénieurs.

Nous pensons cependant avoir fait ressortir que ces Leçons s'adressent aussi aux amis de la Géométrie désireux de s'initier aux faits et aux problèmes essentiels de la Géométrie infinitési-

male. Conçues consciencieusement, écrites avec ordre et clarté, elles prendront une place honorable parmi nos meilleurs Ouvrages d'enseignement. G. Koenigs.

MÉLANGES.

SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES;

Par M. Émile BOREL.

On sait que la règle des signes de Descartes permet, connaissant les signes des coefficients dans une équation algébrique entière, et sachant, en outre, que certains coefficients sont nuls, de fixer une limite supérieure du nombre des racines réelles de cette équation. Par exemple, a, b, c étant des nombres positifs, l'équation

$$x^{17} - ax^{13} - bx^9 + c = 0$$

a, *au plus*, trois racines réelles. Je me propose de compléter ce théorème en faisant voir que l'on peut choisir les nombres a, b, c de manière que ce nombre maximum soit atteint. En d'autres termes, le théorème de Descartes exprime *tout* ce que l'on peut dire sur la réalité des racines d'une équation algébrique, lorsqu'on connaît seulement les signes des coefficients non nuls.

Considérons, en effet, un polynome de degré m dans lequel le coefficient de x^m est réduit à l'unité et le coefficient de x^{m-q} nul ou égal à $\pm 3^{q(2m-q-1)}$. Il est aisé de voir que, pour

$$x = \pm 3^{2m-2p-1},$$

c'est le terme en x^{m-p} qui donne son signe, s'il n'est pas nul. En effet, la valeur absolue du terme en x^{m-q} est alors

$$3^{(m-q)(2m-2p-1)+q(2m-q-1)} = 3^{m(m-1)+(m-p)^2-(p-q)^2},$$

et l'on en conclut que, en prenant positivement le terme en x^{m-p} et négativement tous les autres, la valeur du polynome est

supérieure à

$$3^{m(m-1)+(m-p)^2}\left[1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3^4}-\frac{2}{3^9}-\dots\right],$$

et la quantité entre crochets est manifestement positive.

Ce point établi, la proposition énoncée se démontre très aisément, car il suffit de substituer tous les nombres $x=\pm 3^{2m-2p-1}$ pour déceler l'existence d'un nombre de racines réelles égal au maximum indiqué par le théorème de Descartes. Nous avons ainsi donné le moyen de choisir les coefficients non nuls, dans une équation où l'on connaît seulement leurs signes, de manière que ce maximum soit effectivement atteint. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, le théorème de Descartes fait connaître immédiatement le signe des racines.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.



TOME XX; 1896. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

	Pages.
BARBERA (L.). — Teorica delle equazioni differenziali duple...........	23
BIERMANN (O.). — Elemente des höheren Mathematik................	153-155
BOCHER (M). — Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.	67-72
BRAHY. — Exercices méthodiques de Calcul intégral.................	281
CAPELLI (ALFREDO). — Lezioni di Algebra complementare............	273-274
CARLI (A.) et FAVARO (A.). — Bibliografia Galileiana................	283-286
ELLIOT (E.-B.). — An introduction to the algebra of Quantics........	217-218
FINCK (Dr K.). — Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot..................	278-279
GRASSMANN (H.). — Gesammelte mathematische und physikalische Werke..	281-282
GREENHILL (A.). — Les fonctions elliptiques et leurs applications.....	283
GUNDELFINGER (S.). — Vorlesungen aus der analytische Geometrie der Kegelschnitte..	249-250
HENKE (R.). — Ueber die Methode der kleinsten Quadrate............	85
HUYGHENS (CHR.). — Œuvres complètes...........................	121-131
JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (t. III).....	236
KLEIN (F.). — The Evanston colloquium............................	299-302
KLEIN (F.). — Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire.	283
KLEIN (F.). — Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie...	65-66
KRAUSE (M.). — Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse..	132-139
KRONECKER. — Werke...	155-156
LAZZERI (G.) et BASSANI (A.). — Elementi di Geometria.............	66-67
MAGGI (G.-A.). — Principii della theoria matematica del movimento dei corpi..	260-263
Mathematical papers read at the International Mathematical Congress.	297-299

Pages.

MÉRAY (CHARLES). — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques........ 11-22
NIEWENGLOWSKI (B.). — Cours de Géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles du Gouvernement........ 308-310
NEPERUS. — Mirifici logarithmorum canonis constructio........ 81-85
NEUMANN (C.). — Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die electrischen Wirkungen........ 303-308
D'OCAGNE (MAURICE). — Cours de Géométrie descriptive et Géométrie infinitésimale........ 323-34
D'OVIDIO (E.). — Geometria analitica........ 211-212
PADÉ. — Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques. 22
PAINLEVÉ (P.). — Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications........ 274-275
PAPELIER (G.). — Leçons sur les coordonnées tangentielles........ 273
PASCAL (E.). — Teoria delle Funzioni ellittiche........ 277
PESCI (G.). — Trattato elementare di Trigonometria piana e sferica.... 249
PESCI (G.). — Appendice al trattato elementare di Trigonometria piana e sferica........ 249
PLUECKER (JULIUS). — Gesammelte Wissenschaftliche Abhandlungen.. 277-278
POINCARÉ (H.). — Théorie analytique de la propagation de la chaleur.. 310-322
POINCARÉ (H.). Les oscillations électriques........ 5-11
RESAL (H.). — Traité de Mécanique générale........ 23
RITTER (FRÉDÉRIC). — François Viète........ 204-211
SAUVAGE (L.). — Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes........ 256-260
STÄCKEL (P.) et ENGEL (FR.). — Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss........ 279-281
TANNERY (J.) et MOLK (J.). — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques (t. II)........ 185-204
TEIXEIRA (G.). — Curso de Analyse infinitesimal. Calculo differencial.. 308
TISSERAND (F.) — Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal (2e édition)........ 276
WIRTINGER (W.). — Untersuchungen ueber Thetafunctionen........ 250-255
ZEUTHEN (H.-G.). — Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter........ 105-108
ZEUTHEN (H.-G.). — Note sur l'histoire des Mathématiques........ 24-28

MÉLANGES.

ADAM (HENRI). — Calcul de Mons. Des Cartes ou Introduction à la Géométrie, 1638........ 221-248
BOREL (ÉMILE). — Sur le théorème de Descartes........ 327-329
BOSCHA. — Christian Huygens........ 33-64
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE........ 31, 104, 120, 152, 216, 271, 293, 329
DELASSUS (ÉT.). — Sur les séries de puissances et les fonctions majorantes........ 73-80
DOLBNIA (J.). — Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome........ 156-184

Pages.
Hadamard (J.). — Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler.. 263-266
Hamy (M.). — Note sur la série de Lagrange........................ 213-216
Hermite (Ch.). — Sur une formule de M. G. Fontené................ 218-221
Kluyver. — Sur les valeurs que prend la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, pour s entier positif et impair........................ 116-119
Lemaire (Ed.). — Sur les séries entières à plusieurs variables indépendantes........................ 286-293
Méray (Ch.). — Nouveaux exemples d'interpolations illusoires....... 266-271
Meyer (Fr.). — Rapport sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Deuxième partie........................ 139-152
Petrovitch (M.). — Sur les fonctions symétriques et périodiques des diverses déterminations d'une fonction algébrique.................. 108-114
Pokrovsky (P.). — Sur les fonctions ultra-elliptiques à deux arguments. 86
De Saint-Germain. — Note sur le pendule sphérique.................. 114-116
Vessiot. — Sur l'étude d'une courbe algébrique autour d'un de ses points........................ 29-31

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XX.

2060 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XX. — ANNÉE 1896.

(TOME XXXI DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XVI; 1892.

Zorawski (*K.*). — Sur les invariants de déformation. Une application de la théorie des groupes de Lie. (1-64).

Il s'agit des quantités qui ne changent pas lorsqu'on déforme la surface, telles que la courbure totale de Gauss, les paramètres différentiels de Beltrami, ou la courbure géodésique. De telles quantités ne doivent dépendre de la forme de la surface que par les coefficients E, F, G de l'élément linéaire. De plus, elles ne doivent pas être altérées par un changement de coordonnées curvilignes.

I. L'auteur rappelle un certain nombre de propositions empruntées à la théorie des groupes continus infinis, lesquelles, en particulier, permettront de ramener les groupes de la question à certains groupes finis.

II. La surface étant rapportée à des coordonnées curvilignes x, y, effectuons sur ces coordonnées un changement de variables quelconque. En calculant les nouvelles valeurs de E, F, G, les transformations ainsi définies seront celles d'un certain groupe infini qu'on peut appeler le *groupe de Gauss*. Si, en même temps que les coefficients E, F, G, on exprime en fonction des nouvelles variables une ou plusieurs fonctions de point, on obtient des transformations dont l'ensemble sera un *groupe de Beltrami;* car c'est à de pareilles transformations que se rapportent les paramètres différentiels de cet auteur. Les transformations qui s'appliquent aux quantités E, F, G et à l'équation d'une courbe tracée sur la surface forment un troisième groupe le *groupe de Minding*. Enfin, en faisant entrer en ligne de compte à la fois des coefficients de l'élé-

ment linéaire, des fonctions de point et des équations de courbes, on a le *groupe général*.

Les quantités cherchées sont les invariants différentiels de ces groupes et, pour les rechercher, on devra, d'après la méthode de Lie, prolonger les groupes et déterminer les invariants des groupes ainsi prolongés.

Or, une transformation infinitésimale quelconque étant effectuée sur x, y, on calcule aisément les changements infiniment petits de E, F, G, ce qui donne la transformation infinitésimale la plus générale du groupe de Gauss. Considérant ensuite une fonction dont l'accroissement infinitésimal est connu, on détermine les accroissements de ses différentes dérivées. Ces résultats permettent de former les transformations infinitésimales des groupes de Gauss, de Beltrami, de Minding et du groupe général prolongés.

III. On peut dès lors écrire les systèmes complets auxquels doivent satisfaire les invariants différentiels des différents ordres; mais il importe de savoir combien d'équations sont indépendantes dans un quelconque de ces systèmes.

En commençant par le groupe de Gauss, on reconnaît que le système correspondant à l'ordre $n+1$ comprend d'une part les équations du système correspondant à l'ordre n modifiées par la présence de termes supplémentaires, d'autre part des équations nouvelles. Celles-ci revêtent une forme très simple et l'on voit aisément qu'elles sont indépendantes.

Il en résulte que toutes les équations du système de l'ordre $n+1$ sont distinctes s'il en est ainsi pour le système d'ordre n. Cette remarque ramène la question du nombre des équations indépendantes à l'étude des systèmes correspondant aux premiers ordres de différentiation.

On reconnaît ainsi qu'il y a, pour $n = 0$, 3 équations indépendantes sur 4; pour $n = 1$, 9 sur 10; pour $n = 2$, 17 sur 18; pour n au moins égal à 3, $(n+1)(n+4)$ équations toutes indépendantes, de sorte que le nombre des invariants indépendants pour $n \geqq 3$ est $n-1$.

IV. En employant une méthode analogue pour les autres groupes prolongés, on constate que les systèmes complets correspondants sont tous composés d'équations indépendantes. Pour les invariants de Beltrami (m désignant le nombre des fonctions de point introduites) on trouve ainsi $(n+1)m$ invariants d'ordre n. Les invariants correspondants à $m > 1$ s'expriment toujours en fonction de ceux qui ne comprennent qu'une seule fonction soumise à la transformation; mais il faut pour cela introduire des invariants d'ordres supérieurs à celui de l'invariant à exprimer.

Les invariants de Minding sont au nombre de 1 pour chaque ordre à partir du second, sauf le quatrième qui en comporte deux. Enfin le groupe général ne fournit aucun invariant qui ne puisse s'exprimer à l'aide des précédents.

V. Pour calculer effectivement les invariants demandés, il faut procéder à l'intégration des systèmes complets. Quelques remarques générales permettent de diviser la difficulté en intégrant les équations successivement.

VI. Appliquant à la recherche des invariants des ordres les moins élevés, on retrouve comme invariant gaussien la courbure totale, comme invariants de Beltrami les paramètres différentiels connus, comme invariant de Minding la courbure géodésique. Ces invariants avaient été obtenus précédemment par des méthodes qui n'exigeaient point d'intégration, mais sur lesquelles la méthode

précédente a l'avantage de fournir tous les invariants indépendants et eux seuls.

Kobb (*G.*). — **Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.** (65-140).

L'auteur généralise aux intégrales doubles les méthodes relatives au calcul des variations qui appartiennent à M. Weierstrass, et dont il faudrait peut-être avoir connaissance pour apprécier à toute leur valeur les résultats obtenus par M. Kobb.

I. On cherche les maxima et minima de l'intégrale

$$I = \iint F(x, y, z;\ x', y', z';\ x'', y'', z'')\, du\, dv \tag{1}$$

(où x', y', z'; x'', y'', z'' sont les dérivées premières de x, y, z par rapport à u et v respectivement) étendue à l'intérieur d'une certaine courbe fermée $F(u, v) = 0$ le long de laquelle les valeurs de x, y, z sont données. Mais on suppose que cette intégrale ne dépend que de la forme de la surface lieu du point x, y, z et non du système de coordonnées curvilignes u, v choisi sur cette surface. Il faut pour cela que la fonction F satisfasse aux équations aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{aligned} F &= x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} = x''\frac{\partial F}{\partial x''} + y''\frac{\partial F}{\partial y''} + z''\frac{\partial F}{\partial z''},\\ 0 &= x'\frac{\partial F}{\partial x''} + y'\frac{\partial F}{\partial y''} + z'\frac{\partial F}{\partial z''} = x''\frac{\partial F}{\partial x'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + z''\frac{\partial F}{\partial z'}.\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Cela posé, comparant l'intégrale I à une intégrale infiniment voisine correspondant au remplacement de x, y, z par $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ [où ξ, η, ζ sont nuls sur la courbe limite $F(u, v) = 0$], la première variation δI se met par la méthode ordinaire sous la forme

$$\iint (\Gamma_1 \xi + \Gamma_2 \eta + \Gamma_3 \zeta)\, du\, dv,$$

où

$$\Gamma_1 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right), \quad \ldots.$$

C'est ici qu'interviennent les équations (2); en différentiant ces équations on arrive à démontrer que l'on a

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} G, \qquad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} G, \qquad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} G,$$

où G est une certaine fonction des dérivées partielles de F; de sorte que l'expression de δI se transforme en

$$\left\{\begin{aligned} \delta I &= \iint G w\, du\, dv,\\ w &= \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \zeta.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Une condition nécessaire pour que δI soit nul est que $G = 0$ sur toute la surface cherchée Σ ou du moins sur chaque portion régulière de Σ. Si d'ailleurs cette surface offre des lignes de discontinuité, on reconnaît que $\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{du}{ds}$ et les quantités analogues doivent rester continues.

II. Une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre est-elle déterminée par la condition de passer par un contour donné? Cette question a été résolue par M. Picard pour les équations linéaires. La méthode de M. Picard s'étend aux équations non linéaires, mais linéaires cependant par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Soit à cet effet

$$(4)\qquad \Phi(x) = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + F\left(u, v, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

une telle équation; x et $x+\xi$ deux intégrales infiniment voisines passant par le même contour : on considérera l'intégrale double

$$\iint \xi[\Phi(x+\xi) - \Phi(x)]\,du\,dv,$$

étendue à l'intérieur du contour. On arrive aisément à exprimer la partie principale de cette intégrale par une autre où la quantité sous le signe $\iint$ est une forme quadratique en ξ, $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}$. Cette dernière devra, pour que l'on ait nécessairement $\xi = 0$, être une forme définie.

Les mêmes considérations s'étendent au cas de plusieurs équations à plusieurs fonctions inconnues. Ici nous partirons des équations $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$ et nous considérerons l'intégrale double

$$(5)\qquad \iint (\xi\,\delta\Gamma_1 + \eta\,\delta\Gamma_2 + \zeta\,\delta\Gamma_3)\,du\,dv,$$

laquelle peut s'écrire

$$(5)'\qquad \iint w\,\delta G\,du\,dv,$$

à cause de l'équation $G = 0$ vérifiée sur la surface primitive Σ. En se servant des résultats de la première partie, d'après lesquels les dix-huit quantités $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y'}, \ldots; \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x''\,\partial y''}, \ldots; \frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial x''}, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\,\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial y''}\right), \ldots$ sont égales aux carrés et aux produits deux à deux des quantités

$$\alpha = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \qquad \beta = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \qquad \gamma = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

multipliés respectivement par des facteurs F_1, F_2, F_3, on met cette intégrale sous la forme

$$\iint\Big[F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + L_{11}\xi^2 + L_{22}\eta^2 + L_{33}\zeta^2$$
$$+ 2L_{12}\xi\eta + 2L_{13}\xi\zeta + 2L_{23}\eta\zeta\Big]\,du\,dv.$$

Or on constate par des calculs analogues à ceux de (I) que L_{11}, L_{12}, ... sont également proportionnels aux carrés et aux produits deux à deux de α, β, γ. En désignant par F_4 le facteur de proportionnalité, il vient

$$\int\int w\, dG\, du\, dv = \int\int \left[F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2 F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right) du\, dv.$$

On en déduit les conditions cherchées pour que la forme qui figure sous le signe $\int\int$ soit définie. On est ainsi de nouveau conduit à l'équation

$$(6) \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1 \frac{\partial w}{\partial u} + F_3 \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_2 \frac{\partial w}{\partial v} + F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\right) + F_4 w = 0,$$

qui détermine les surfaces G (solutions de $G = 0$) infiniment voisines de Σ. Toute intégrale de cette équation, égalée à 0, fournit sur cette dernière surface un contour en dehors duquel la propriété de maximum ou de minimum cesse nécessairement.

III. Comme variation infiniment petite de l'intégrale, nous pouvons prendre l'intégrale I′ obtenue en coupant (suivant un contour fermé K) la surface Σ par une surface régulière quelconque Γ et substituant à la portion de Σ intérieure à K la surface formée par : 1° une portion de surface G infiniment voisine limitée à son intersection K′ avec la surface Γ; 2° la bande infiniment étroite de Γ comprise entre K et K′.

La différence $I' - I$, ou du moins sa partie principale, s'exprime par une intégrale prise le long de K. Si l'on désigne par l la distance de deux points correspondants des deux contours, par ω l'angle que cette distance fait avec la tangente à K, cette intégrale est de la forme

$$\int \mathcal{C}\, l \sin\omega\, ds,$$

où $\mathcal{C}$ est une fonction de x, y, z ainsi que de leurs dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes sur la surface Σ d'une part et sur la surface Γ de l'autre. Il faut dès lors, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que la fonction $\mathcal{C}$ garde un signe invariable, quels que soient le contour K et la surface Γ, ce qui se traduit par une inégalité analogue à celles qui figurent dans la IIe Partie.

Inversement cette condition, jointe à celles qui ont été données en (II), suffit pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum; autrement dit, l'intégrale I prise sur Σ est alors plus petite (s'il s'agit d'un minimum) que la même intégrale prise sur une surface quelconque Γ infiniment voisine et passant par le même contour. Ceci se voit en coupant la surface Γ par une série de surfaces G infiniment voisines les unes des autres. Si K est une des lignes d'intersection, l'intégrale prise d'une part sur la portion annulaire de Γ comprise entre K et le contour donné, d'autre part sur la portion de surface G intérieure à K varie avec la surface G considérée. Or de ce fait que $\mathcal{C}$ est d'un signe invariable résulte que cette intégrale varie constamment dans le même sens lorsque la surface G se rapproche de Σ, par suite qu'il y a bien maximum ou minimum. Ce raisonnement, établi d'abord lorsque Γ est régulière, se généralise aisément au cas où la surface Γ est composée d'un nombre fini de surfaces régulières.

Lohnstein (*Th.*). — Notice sur une méthode pour l'inversion numérique de certaines transcendantes. (141-142).

La méthode exposée par M. Runge, dans le Tome XV du même journal, pour le calcul numérique des transcendantes inverses avait déjà été appliquée par K. Schellbach (*Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen,* Berlin, 1864), sous une forme moins simple et moins parfaite, il est vrai.

Lilienthal (*R. von*). — Sur la théorie de la courbure des surfaces. (143-152).

Emploi de notations particulières et introduction des rayons de courbure géodésiques des lignes de courbure. Application de la notation exposée à la courbure définie par M. Casorati (même Journal, t. XIV). Démonstration, dans cette notation, de l'interprétation géométrique proposée par cet auteur et étude de quelques expressions analogues.

Volterra (*Vito*). — Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. (153-215).

Lamé a étudié, dans ses leçons sur l'élasticité, l'hypothèse d'un centre d'ébranlement unique dans la propagation de la lumière à travers un milieu biréfringent.

Chaque onde issue de l'origine à l'origine des temps étant ressentie en un point quelconque x, y, z à deux époques différentes λ_1, λ_2 correspondant au passage de chacune des nappes de la surface des ondes, on en déduit pour les équations de l'Optique une intégrale de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} u = X_1[F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)] + X_2[F_1(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)], \\ v = Y_1[F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)] + Y_2[F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)], \\ w = Z_1[F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)] + Z_2[F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)], \end{cases}$$

u, v, w étant les composantes cherchées du déplacement, les X, Y, Z étant certaines fonctions déterminées de x, y, z, les F, φ des fonctions arbitraires des variables $t+\lambda_1$, $t+\lambda_2$; $t-\lambda_1$, $t-\lambda_2$ respectivement. Mais il n'est pas exact que, suivant l'opinion de Lamé, ces expressions puissent représenter la vibration provenant d'un centre d'ébranlement. Cela tient à ce que Lamé n'a pas remarqué la polydromie des fonctions X, Y, Z.

I. Les équations de l'Optique

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial W}{\partial y} - b^2\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial U}{\partial z} - c^2\dfrac{\partial W}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\dfrac{\partial V}{\partial x} - a^2\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

(où U, V, W sont les composantes de la rotation due aux déplacements u, v.

w) peuvent s'obtenir en annulant la variation d'une intégrale. Cette circonstance permet de les transformer en coordonnées curvilignes quelconques u_1, u_2, u_3, transformation qui peut au reste s'opérer directement.

II. Aux équations E ainsi obtenues correspondent d'autres équations E' qu'on peut appeler *conjuguées* des premières, de sorte que chaque solution du système E donne une solution du système E' et réciproquement. Mais les solutions ainsi correspondantes ne sont pas quelconques. On reconnaît aisément que les solutions de E qui se rattachent par la voie dont nous venons de parler à des solutions de E' sont celles qui correspondent à des vibrations transversales.

Le système E se rapporte à l'hypothèse de Neumann, le système E' à l'hypothèse contraire de Fresnel.

III. M. Weber a représenté les coordonnées des points de la surface des ondes par des produits de fonctions elliptiques de deux paramètres (les modules étant différents pour chaque paramètre) et de deux manières différentes : l'une qui permet de représenter par des paramètres réels u_2, u_3 la nappe extérieure de la surface, l'autre qui représente par des paramètres réels $\overline{u_2}$, $\overline{u_3}$ la nappe intérieure. Si maintenant nous considérons l'espace comme découpé par les nappes extérieures (intérieures) de surface d'ondes homothétiques et concentriques, le rapport d'homothétie étant désigné par $u_1(\overline{u_1})$, on aura pour l'espace des coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3, $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3})$. Ce sont ces coordonnées que l'auteur nomme *coordonnées de Weber* de première (deuxième) espèce et relativement auxquelles il écrit les équations de Lamé.

Mais il y a lieu d'observer que la coordonnée $u_3(\overline{u_3})$ est discontinue, les surfaces de discontinuité étant formées par les parties que découpent dans le plan des xz les parallèles aux axes optiques menées par l'origine.

IV. On obtient aisément des intégrales des équations ainsi transformées tant en coordonnées de première espèce qu'en coordonnées de seconde espèce et en les additionnant on trouve des intégrales I de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} u = u_\alpha f(t+u_1) + u_\beta \varphi(t+\overline{u_1}), \\ v = v_\alpha f(t+u_1) + v_\beta \varphi(t+\overline{u_1}), \\ w = w_\alpha f(t+u_1) + w_\beta \varphi(t+\overline{u_1}), \end{cases}$$

où u_α, v_α, w_α; u_β, v_β, w_β sont indépendants de t. On constate d'ailleurs que ce sont les seules intégrales des équations (2) appartenant à ce type spécial.

Ces intégrales (au fond équivalentes à celles de Lamé) correspondent à des vibrations transversales et l'on en déduit des intégrales des équations conjuguées.

V. Mais, en vertu de la discontinuité, remarquée précédemment, de la troisième coordonnée, les composantes du déplacement ainsi trouvé présentent une polydromie autour des droites T_1, T_2 menées par l'origine parallèlement aux axes optiques : deux d'entre elles changent de signe quand on revient au point de départ après avoir tourné autour d'une de ces droites; sur ces droites mêmes, ces composantes sont indéterminées.

Donc, contrairement à l'opinion de Lamé, les vibrations ainsi représentées ne peuvent résulter d'un centre unique d'ébranlement, elles ne peuvent être

produites que par une couche de centres distribués sur une surface telle qu'on doive nécessairement la rencontrer quand on tourne autour de T_1 ou de T_2.

D'ailleurs en supposant que les expressions I représentent la vibration produite par un centre d'ébranlement, on pourrait leur appliquer le principe d'Huygens. Or les expressions auxquelles on arrive ainsi et qui sont celles de Mme Kovalewski, ne vérifient pas les équations (2), ce qui provient de la circonstance qui vient d'être signalée.

VI. Introduisant deux solutions différentes des équations de Lamé (ou de leurs conjuguées), on peut écrire des formules analogues à celle de Green. En prenant les précautions nécessaires en raison de la polydromie constatée dans les numéros précédents, on peut en déduire un théorème qui correspond à celui que Kirchhoff a donné comme généralisation du principe d'Huyghens.

VII. $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ étant la solution précédemment obtenue des équations (2), les intégrales triples

$$\int [u(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)]\,\psi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\int [v(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)]\,\psi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\int [w(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)]\,\psi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

ne donnent pas, ainsi qu'on l'a vu en (V), des solutions de ces mêmes équations. Mais les intégrales doubles analogues où η est supposé nul, le point (ξ, ζ) variant dans une certaine portion du plan des xz, sont des solutions et correspondent à des vibrations transversales, du moins en se bornant à la moitié de l'espace située au-dessus de ce plan. D'ailleurs on peut introduire dans cette solution des fonctions arbitraires de trois variables en introduisant ξ et ζ non dans une fonction nouvelle, mais dans les fonctions arbitraires qui figurent aux formules (3).

Ces expressions restent finies au voisinage du plan $y = 0$ et l'on peut en déterminer les limites à l'aide des propositions données en (VI).

VIII. On peut éliminer une des fonctions inconnues entre les équations (2) et la condition de transversalité, et le numéro précédent donne des solutions du système S ainsi obtenu. A ces solutions on pourra adjoindre leurs dérivées dans lesquelles on pourra changer les fonctions arbitraires, de sorte qu'on aura pour le système S une solution composée de fonctions finies, monodromes et continues dans toute la moitié de l'espace donnée par $y > 0$, et dépendant de quatre fonctions arbitraires de trois variables, en un mot présentant les caractères d'une intégrale générale, sans qu'il soit rigoureusement démontré que l'on peut obtenir ainsi toute intégrale.

IX. On trouve en théorie électromagnétique de la lumière que les équations de l'Électrodynamique dans un milieu non conducteur qui est électriquement anisotrope et magnétiquement isotrope se ramènent aux équations de Lamé; et là même où il n'y a pas isotropie magnétique, mais simplement coïncidence entre les axes magnétiques et électriques, en partant des équations données par Hertz, on arrive au même résultat.

Enfin, on peut supposer le milieu conducteur, sous la condition d'admettre

que les axes relatifs à la conductibilité coïncident encore avec les précédents. Les équations se ramènent aux équations de Lamé par un changement de variables simple.

Koch (H. von). — Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. (217-295).

Les résultats du travail inséré au Tome XV du même journal sont rendus absolument généraux moyennant un certain nombre de principe relatifs aux déterminants infinis.

I. Principes sur les déterminants infinis.

1. *Convergence du déterminant.* — Un tableau à double entrée, indéfini dans tous les sens

$$A_{i,k} \, (i, k = -\infty, \ldots, +\infty),$$

où l'on nomme *éléments diagonaux* ceux pour lesquels $i = k$, est dit un déterminant de la *forme normale* si le produit des éléments diagonaux et la série des éléments non diagonaux convergent tous deux absolument. On peut d'ailleurs ramener au déterminant de la forme normale un déterminant tel que : 1° le produit des termes diagonaux converge absolument; 2° il existe une suite de quantités $x_i (i = -\infty, \ldots, +\infty)$ rendant convergente la série

$$\sum \sum A_{ik} \frac{x_i}{x_k} \qquad (i, k = -\infty, \ldots, +\infty; \, i \neq k).$$

Un cas particulier important est celui de $x_i = x^i$.

Si de telles conditions sont remplies, on peut définir la valeur du déterminant. Cette valeur ne change pas si l'on prend pour élément origine un élément diagonal quelconque.

Le déterminant reste convergent lorsqu'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par des quantités finies. Il change de signe par l'interversion de deux lignes ou de deux colonnes; il s'annule lorsqu'il a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles. On peut le développer suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque; plus généralement, on peut définir les mineurs de tous les ordres et étendre aux déterminants infinis la règle de Laplace, la décomposition d'un déterminant en somme d'un nombre fini ou infini de déterminants, le théorème de la multiplication, les propriétés des déterminants adjoints.

Si les éléments du déterminant sont fonctions analytiques d'une variable indépendante ρ et si le déterminant est uniformément convergent, il représentera également une fonction analytique de ρ et l'on pourra en prendre la dérivée par la même règle que s'il s'agissait d'un déterminant ordinaire.

2. *Systèmes infinis d'équations linéaires.* — Un système d'un nombre infini d'équations linéaires homogènes à une infinité d'inconnues, dont le déterminant est de la forme normale, n'admet de solution non nulle que si ce déterminant est égal à zéro.

Les mineurs diagonaux tendant vers 1 lorsque leur ordre augmente indéfiniment, il existe nécessairement un mineur d'ordre fini différent de zéro et l'on peut appliquer le théorème de Rouché.

II. Application aux équations différentielles linéaires.

3. *Expression des intégrales.* — Prenant, comme dans son précédent travail, l'équation

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)\,y = 0$$

(dont les coefficients sont holomorphes à l'intérieur d'une couronne circulaire C qui a son centre à l'origine et comprend le point $x = 1$) et substituant pour l'intégrale cherchée un développement de la forme

$$(2) \qquad y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda},$$

M. Helge von Koch multiplie les équations précédemment écrites pour la détermination des coefficients g par des quantités dont le produit est convergent de manière à transformer leur déterminant $\Omega(\rho)$ en un autre $D(\rho)$ qui est une fonction entière de ρ. Une difficulté se trouve ainsi écartée, celle qui est relative aux singularités de la fonction Ω.

Soit ρ' une racine de $D(\rho)$; cette racine peut être simple ou multiple d'ordre μ. Dans ce dernier cas, on considère les mineurs de $D(\rho)$. Soit $r\,(r \leq \mu)$ l'ordre du premier mineur qui ne s'annule pas pour $\rho = \rho'$, les mineurs des premier, deuxième, etc., $r - 1^{\text{ième}}$ ordre admettant la racine ρ' avec les ordres de multiplicité respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$. Les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$ et les différences $\mu_1 - \mu_2 = \nu_1$, $\mu_2 - \mu_3 = \nu_2$, $\ldots$, $\mu_{r-1} = \nu_{r-1}$ vont en décroissant. μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$ sont dits les *nombres caractéristiques* relatifs à la racine ρ'.

Si ρ' est racine simple, la résolution des équations en g donnera une intégrale correspondant à cette racine. ρ' étant racine multiple, les équations en g auront r solutions indépendantes qui donneront pour l'équation (1) r intégrales indépendantes de la forme (2), c'est-à-dire autant qu'on doit en trouver si les nombres ν sont tous égaux à 1 $(r = \mu)$.

Supposons maintenant $r < \mu$, on remarquera que non seulement les r intégrales dont nous venons de parler, mais encore leurs dérivées par rapport à ρ' jusqu'à l'ordre $\mu - 1$, satisfont à l'équation donnée. Seulement les $\mu_1 - 1$ premières dérivées de la première intégrale, les $\mu_2 - 1$ premières dérivées de la seconde, etc. sont identiquement nulles, de sorte qu'il reste en tout μ solutions dont $\mu - r$ contiennent des termes logarithmiques. Considérant successivement les différentes racines de $D(\rho)$ on a bien ainsi toutes les solutions cherchées.

Application est faite au cas classique où toutes les intégrales sont régulières.

4. *Les invariants.* — Les résultats ainsi obtenus concordent de tout point avec ceux que faisaient prévoir les travaux de M. Fuchs. L'équation $D(\rho) = 0$ n'est autre que l'équation fondamentale déterminante $F(\omega) = 0$ moyennant le changement d'inconnue $e^{2i\pi\rho} = \omega$.

Or les coefficients des différentes puissances de ρ dans $D(\rho)$ sont des séries entières par rapport aux coefficients des fonctions $P_2(x), \ldots, P_n(x)$ qui entrent dans l'équation donnée. Il en est par suite de même des quantités que M. Poincaré appelle *invariants*, c'est-à-dire des coefficients de l'équation fondamentale qui sont des fonctions linéaires et homogènes de $D(0)$, $D'(0)$, $\ldots$, $D^{(n)}(0)$.

Dans chacune de ces fonctions les coefficients sont des polynomes en πi dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Application à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x}\right) y = 0.$$

Poincaré (*H.*). — Sur la polarisation par diffraction. (297-339).

I. Fizeau a constaté que la réflexion sur des fentes métalliques produit des phénomènes remarquables de polarisation qu'il a attribués à l'interférence des rayons réfléchis avec ceux qui n'ont pas subi de réflexions. M. Gouy, et après lui M. Hurmuzescu, ont fait des expériences analogues dans des conditions plus simples et plus accessibles au calcul, lequel peut alors servir à donner une idée au moins approximative des phénomènes. C'est ce que fait M. Poincaré en employant le langage de la théorie électromagnétique, les raisonnements étant d'ailleurs identiquement les mêmes dans la théorie élastique. Il désigne par X, Y, Z les composantes de la force électrique (vibration lumineuse de Fresnel), par α, β, γ celles de la force magnétique (vibration lumineuse de Neumann). Il ne considère d'ailleurs jamais que celle de ces deux forces qui est parallèle à l'axe des z (bord de l'écran) et dont par suite les deux premières composantes sont nulles.

II. Les résultats de M. Gouy sont obtenus en se servant d'un écran métallique en forme de biseau très aigu sur l'arête duquel on concentre la lumière à l'aide d'une lentille. On trouve alors les lois suivantes :

1° A l'intérieur de l'ombre géométrique la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction, et cela d'autant plus que la déviation est plus grande;

2° A l'extérieur de cette ombre la lumière est polarisée dans le plan de diffraction. Cette polarisation est nulle avec la déviation et atteint son maximum vers 30° ou 40°.

De plus la lumière intérieure à l'ombre géométrique est colorée, tandis que la lumière polarisée dans le plan de diffraction reste blanche. On constate d'ailleurs entre ces deux lumières une différence de marche.

Pour étudier la question par le calcul, nous simplifierons encore en supposant :

1° Que les ondes incidentes sont cylindriques, de sorte que les composantes des vibrations ne dépendent pas de z (l'axe des z étant le bord de l'écran);

2° Que l'écran se comporte vis-à-vis des ondes électromagnétiques comme un conducteur parfait, ce qui revient à supposer qu'il a un pouvoir réflecteur très grand;

3° Que l'angle du biseau est infiniment petit;

4° Que son tranchant est parfait.

III. Supposons d'abord la lumière polarisée dans le plan de diffraction. Envisageant la vibration Z qui, si la lumière est homogène, peut se mettre sous le forme $Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$, nous voyons que Z_0, Z_1, qui ne dépendent que de

x, y, doivent satisfaire à l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \alpha^2 Z = 0,$$

la longueur d'onde étant $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Passant aux coordonnées polaires ρ, ω, on reconnaît que, dans nos hypothèses, Z se développe en série de Fourier suivant les sinus des multiples de $\frac{n\omega}{2}$

$$Z = \sum P_n \sin \frac{n\omega}{2},$$

P_n étant une fonction de ρ et t linéaire et homogène en $\cos pt$, $\sin pt$. Or l'équation à laquelle doit satisfaire P_n montre que cette quantité est une fonction de Bessel (la variable étant $\alpha\rho$); mais dès que ρ est très grand par rapport à la longueur d'onde, on peut remplacer ces fonctions par leurs valeurs asymptotiques et écrire

$$(2)\qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin \frac{n\omega}{2},$$

A_n étant une fonction linéaire de $\cos pt$, $\sin pt$.

Considérons d'autre part la lumière totale comme résultant du faisceau incident, que l'on peut représenter par

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin \frac{n\omega}{2} = \frac{f(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right),$$

où les B_n doivent être regardés comme connus, et des faisceaux s'éloignant du bord de l'écran, représentés par

$$\begin{aligned} Z = &\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin \frac{n\omega}{2} \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin \frac{n\omega}{2}. \end{aligned}$$

La formule (2) montre que C_n et D_n se déduisent de la connaissance de B_n. Si l'on prend pour faisceau incident un faisceau d'intensité constante entre deux plans $\omega = \alpha$ et $\omega = \beta$, de sorte que

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha < \omega < \beta, \\ 0 \text{ hors de ces limites,} \end{cases}$$

le calcul montre que Z se composera de trois parties : l'une relative au faisceau incident, la seconde au faisceau réfléchi; la troisième $\psi_2(\omega) \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$ représente dès lors la lumière diffractée. La racine carrée de l'intensité de cette lumière est donc

$$(3)\qquad \psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{tang} \frac{\omega - \alpha + \pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\omega + \beta - \pi}{4}}{\operatorname{tang} \frac{\omega - \beta + \pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\omega + \alpha - \pi}{4}} \right|.$$

2e Partie

Cette intensité peut devenir infinie, mais cela tient à la manière toute théorique dont nous avons pris notre faisceau incident, $f(\omega)$ étant discontinue.

Supposons en second lieu la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction. Nous introduirons alors la vibration γ que nous soumettrons à une analyse analogue à la précédente, mais aboutissant à un résultat différent : on trouve

$$(4) \qquad \psi_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{tang} \dfrac{\omega - \alpha + \pi}{4} \operatorname{tang} \dfrac{\omega + \alpha - \pi}{4}}{\operatorname{tang} \dfrac{\omega - \beta + \pi}{4} \operatorname{tang} \dfrac{\omega + \beta - \pi}{4}} \right|.$$

La non-coïncidence des formules (3), (4) montre qu'à un faisceau incident naturel correspond un faisceau diffracté polarisé. Pour β très voisin de α, le rapport des deux intensités sera

$$\frac{\cos \dfrac{\omega + \alpha}{2} - \cos \dfrac{\omega - \alpha}{2}}{\cos \dfrac{\omega + \alpha}{2} + \cos \dfrac{\omega - \alpha}{2}},$$

ce qui montre que l'on a :

Entre l'écran et le faisceau direct (diffraction intérieure) de la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction; entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi (diffraction extérieure) de la lumière polarisée dans le plan de diffraction.

Ces résultats sont conformes à l'observation. Au contraire, sur d'autres points il y a désaccord. On rendra compte de ces désaccords en abandonnant les hypothèses trop simples qui ont servi de point de départ.

IV. Cessons d'admettre que l'angle du biseau est infiniment petit, de sorte que les deux plans limites sont $\omega = 0$ et $\omega = \lambda\pi$, λ étant un peu plus petit que 2. On aura des séries analogues à celles de tout à l'heure, mais procédant suivant les sinus des multiples de $\frac{\omega}{\lambda}$ et non suivant les sinus des multiples de $\frac{\omega}{2}$. La marche générale du calcul n'est d'ailleurs pas influencée par ce changement, non plus que les conséquences finales.

V. Pour tenir compte du fait que l'écran n'est pas un conducteur parfait, on reprend d'abord le cas de la réflexion d'une onde plane sur une surface métallique plane. Si nous prenons comme axe des x la normale à la surface réfléchissante; comme plan des xy le plan d'incidence que nous supposons tout d'abord être le plan de polarisation, il est aisé de voir que la condition que $Z = 0$ dans le voisinage de la surface doit être remplacée par $\frac{\partial Z}{\partial x} = -\delta Z$, où Z est l'exponentielle imaginaire dont la partie réelle donne la vibration et δ un nombre à partie réelle positive.

Un calcul analogue se fait relativement à γ, pour le cas où le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence.

Dans le cas où δ est très grand, on retrouve le cas simple qui vient d'être étudié. Alors à un rayon incident naturel correspond un rayon naturel réfléchi, mais l'interférence de ces deux rayons produit de la lumière polarisée. Il en est de même, avec des différences de degré, pour le cas général.

Dans les expériences de M. Gouy, la surface réfléchissante, qui est celle du

tranchant, loin d'être plane, a un rayon de courbure très petit. C'est la dérivée normale $\frac{\partial Z}{\partial n}$ qui joue alors le rôle dévolu plus haut à $\frac{\partial Z}{\partial x}$. En appliquant le principe d'Huygens à un volume limité par : 1° l'écran; 2° un cylindre de révolution ayant pour axe le bord et de rayon très grand, on arrive a trouver que tout se passe plus ou moins exactement comme il a été indiqué en (III) et (IV), les différences étant d'autant moins marquées que le pouvoir réflecteur est plus considérable. En particulier, la polarisation sera plus intense pour les couleurs qu'affecte la lumière réfléchie par le métal dont est formé l'écran; ce qui expliquerait les colorations offertes par la composante lumineuse la plus forte (polarisée perpendiculairement au plan de diffraction), mais expliquerait plus difficilement comment l'autre composante paraît blanche.

VI. Il est difficile de tenir compte du fait que le biseau est arrondi. On peut se faire une idée grossière de l'influence de ce fait en considérant le biseau comme coupé par une face intermédiaire. Certaines discordances entre la théorie et les faits observés tiennent à la forme du biseau.

Les questions examinées en (V) et (VI) doivent faire l'objet d'un travail ultérieur.

Pincherle (S.). — Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation différentielle linéaire. (341-364).

On appelle *intégrale distinguée* d'une équation linéaire aux différences finies, la variable indépendante étant n, celle dont l'ordre d'infinitude est le plus petit possible pour n infini. Lorsque l'équation est du second ordre, l'étude de l'intégrale distinguée ramène à la notion de fraction continue.

Soit l'équation de récurrence

$$a_r(n)\,p_{n+r} + a_{r-1}(n)\,p_{n+r-1} + \ldots + a_0(n)\,p_n = 0, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$a_h(n) = a_{h.m}(n+h)_m + a_{h.m-1}(n+h)_{m-1} + \ldots + a_{h.1}(n+h)_1 + a_{h-0}$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, r),$$
$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

p_n étant la suite à déterminer. Il est aisé de voir que la série

$$U(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n t^n \tag{2}$$

satisfait à une équation de la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (a_{0-k}t^r + a_{1-k}t^{r-1} + \ldots + a_{r-k})\,t^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} = t^\mu R(t) \tag{3}$$

ou

$$\Delta(U) = t^\mu R(t),$$

en désignant par ΔU le premier membre de (3) et par $R(t)$ un polynome entier de degré $r-1$ qui dépend de l'intégrale particulière de l'équation (1) que l'on considère.

Si nous supposons que l'équation $a_r(n) = 0$, qui est l'équation fondamentale déterminante relative à $\Delta(U) = 0$ pour le point singulier $t = 0$, n'admet pas de racine entière, l'équation sans second membre n'admettra pas d'intégrale uniforme à l'origine; par conséquent l'équation (3) en admettra une et une seule représentée par la série (2). Le rayon de convergence de cette série sera le module d'une des racines de l'équation

$$(4) \qquad a_{0-m}t^r + a_{1-m}t^{r-1} + a_{2-m}t^{r-2} + \ldots + a_{r-m} = 0,$$

en général de la plus petite. Il sera le plus grand possible, c'est-à-dire égal au module de la plus grande racine, si l'on a affaire à l'intégrale distinguée de l'équation (1).

M. Pincherle définit ensuite la transformation de Heine

$$\mathrm{H}[f(t)] = \varphi(u) = \int_{(c)} \frac{f(t)\,dt}{(t-u)},$$

l'intégration étant opérée le long d'un contour qui part de l'infini et y revient, et applique cette transformation (en la modifiant pour que l'intégrale ait un sens) à la solution U_i de l'équation $\Delta(U) = 0$ qui se reproduit, multipliée par une constante différente de l'unité, par une rotation autour de la racine simple α_i de l'équation (4). On obtient ainsi une fonction qui satisfait à une équation de la forme (3) et qui est holomorphe dans le cercle de rayon $|\alpha_i|$. Si α_1 est la plus grande racine de l'équation (4), U_1 est l'intégrale distinguée de l'équation (1).

Après avoir défini l'*équation récurrente inverse* de l'équation (1), qui jouit de cette propriété que les deux équations (4), correspondant à deux équations récurrentes inverses, ont leurs racines inverses les unes des autres, M. Pincherle applique aux cas de $r = 1$ (équation hypergéométrique généralisée de M. Goursat) et de $r = 2$ (généralisation de la fraction continue de Gauss).

L'équation récurrente inverse intervient dans le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les polynomes d'un système récurrent. Nous pouvons en effet supposer que les coefficients de l'équation (1), sauf $a_{0,k}$ et a_{r-k}, soient des fonctions du premier degré d'une variable r, de sorte que p_n soit un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré en x. L'équation récurrente inverse se composera de polynomes de degrés croissants par rapport à une variable z. Les racines α de l'équation (4) seront des fonctions analytiques de x.

La quantité $\dfrac{1}{z-x}$ se développe en une somme de $r-1$ séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_h(n-h)\, q_{n-h}(z)\, p_n(x),$$

où $b_h(n)$ est un polynome de degré m en n. Si $q_n(z)$ est l'intégrale distinguée de l'équation inverse, comme les rapports $\dfrac{q_{n+1}}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ ont respectivement pour limites $|\alpha_1|$ et $\left|\dfrac{1}{\alpha_1}\right|$, cette série est convergente pour $|\alpha_1(z)| < \rho$, $|\alpha_1(x)| > \rho$. On en déduit à la manière ordinaire le développement d'une fonction analytique quelconque en série de polynomes p_n dans une aire limitée par une courbe $|\alpha_1(x)| = \text{const.}$

Folie (*F.*). — Expression complète et signification véritable de la nutation initiale. Démonstration qui en résulte de la fluidité intérieure du globe. Conséquences analytiques de celle-ci dans les formules de l'Astronomie. (365-384).

L'axe de rotation de la Terre ne coïncidant pas exactement avec un axe principal d'inertie, il en résulte une nutation (nutation initiale), dont le caractère diurne, signalé par Laplace, avait été contesté par Oppolzer et les astronomes qui l'ont suivi. Ce caractère apparaît cependant nettement dans l'étude géométrique du mouvement.

En désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre, écrits dans l'ordre ascendant, par θ l'inclinaison de l'axe de C (appelé axe *géographique*) sur l'axe de l'écliptique fixe, par λ l'angle que la perpendiculaire commune à ces deux droites fait avec l'axe vernal fixe, on trouve pour $\Delta\theta$ et $\sin\theta\,\Delta\lambda$ des formules où entrent quatre sortes de termes : 1° un terme constant figurant dans le seul $\Delta\lambda$ et qui correspond à la précession; 2° des termes ayant une période très peu différente du jour sidéral, la différence étant négative pour les unes, positive pour les autres, mais ces derniers étant, par rapport aux premiers, très petits de l'ordre de la quantité

$$\varkappa = \frac{1}{4}\,\frac{(B-A)(B+A-C)}{B(C-B)};$$

ces termes correspondent à ce que M. Folie appelle la *nutation initiale;* 3° des termes ayant pour période le *demi*-jour sidéral, qui donnent la *nutation diurne;* 4° des termes ayant des périodes beaucoup plus longues et dépendant des positions du Soleil, de la Lune, etc. Ils donnent la nutation *annuelle.*

Si l'on compare les observations d'une étoile à son passage supérieur et au passage inférieur suivant, les quantités relatives à la nutation annuelle n'auront pas varié sensiblement; il en sera de même des quantités relatives à la nutation diurne, puisqu'elle a pour période un demi-jour sidéral. Ces termes peuvent alors s'éliminer et il ne reste que ceux qui concernent la nutation initiale et qui, par des observations répétées, permettent d'en déterminer les éléments.

La nutation diurne, elle, n'est possible que si la Terre est fluide intérieurement. Or, dans ce cas, les travaux de M. Ronkar (*Ac. Belg.* 1888) montrent que les choses se passent différemment pour les mouvements à longue période et pour ceux qui ont une période très courte. Dans les premiers, l'écorce et le noyau se comportent comme s'ils étaient solidaires; dans les seconds, comme si l'écorce était entièrement indépendante du noyau, de sorte que les moments d'inertie A, B, C ont, dans les deux cas, des significations différentes.

On ne peut donc pas transporter dans les calculs relatifs à la nutation initiale les valeurs de A, B, C tirées de la théorie de la précession et de la nutation. La période de 305 jours pour le déplacement du pôle à la surface de la Terre, que l'on avait calculée par ce moyen, est inexacte et l'observation montre qu'il y a lieu de lui substituer une période de 336,5 jours.

Cette constatation, en montrant que les valeurs de $\frac{C-A}{A}$ correspondant à la précession et à la nutation initiale sont différentes, établit la fluidité du globe et rend très probable l'existence de la nutation diurne.

Dans ces conditions, les déterminations de la constante de l'aberration sont toutes à reprendre et l'on peut s'expliquer qu'elles aient donné jusqu'ici des résultats si peu acceptables.

Mittag Leffler (*G.*). — Sophie Kovalewski. Notice biographique. (385-392).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. X, 1893 (1).

Sauvage. — Compléments à la théorie des diviseurs élémentaires. (9-42).

On connaît la proposition fondamentale de la théorie des formes bilinéaires : Étant données deux formes bilinéaires aux mêmes $2n$ variables

$$f = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \qquad \varphi = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

si le déterminant de la forme f n'est pas nul, la nouvelle forme

$$F = fs + \varphi,$$

où s est une indéterminée, peut s'écrire

$$F = \sum_{i=1}^{i=\rho} [(s_i - s)(\xi\eta)_{e_i} + (\xi\eta)_{e_i-1}];$$

$(s_e - s_i)^{e_i}$ est l'un quelconque des ρ diviseurs élémentaires du déterminant de la forme F; le symbole $(\xi\eta)$ représente l'expression

$$\xi_0\eta_{e-1} + \xi_1\eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0;$$

les ξ sont des fonctions linéaires, indépendantes et à coefficients constants de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et les η des fonctions analogues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si les déterminants des formes f et φ sont nuls tous les deux, on peut appliquer le théorème aux deux formes φ et $f_1 = mf + n\varphi$, si toutefois l'on peut déterminer deux nombres m et n tels que la forme f_1 ait un déterminant différent de zéro.

Le seul cas où l'on ne sache pas réduire la forme F est donc celui où le déterminant de cette forme est identiquement nul. C'est le cas que traite M. Sau

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XVIII$_2$, p. 205.

vage, en supposant, pour plus de généralité, que tous les mineurs de ce déterminant soient identiquement nuls jusqu'à ceux de l'ordre π exclusivement.

En suivant la voie indiquée par M. Darboux (*Journal de Mathématiques*, 1874), il parvient à la proposition suivante, qui résout le problème proposé :

Étant données deux formes bilinéaires f et φ aux mêmes $2n$ variables, on peut former deux combinaisons distinctes

$$mf + n\varphi, \qquad m'f + n'\varphi,$$

au moyen de quatre constantes m, m', n, n' dont le déterminant ne soit pas nul, de manière que la forme

$$F = (mf + n\varphi)s + (m'f + n'\varphi),$$

qui renferme une indéterminée s, soit réductible à plusieurs groupes de termes à variables indépendantes ayant respectivement les formes

$$y_1\overline{x}_1 + \ldots + y_p\overline{x}_p,$$
$$x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_q\overline{y}_q,$$
$$-(s - s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Les symboles $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ ont les significations que voici :

$$\overline{x}_k = x_k + s x_{k+1}, \qquad \overline{y}_i = y_k + s y_{k+1};$$

les diviseurs $(s - s_i)^{e_i}$ sont les diviseurs élémentaires d'un certain déterminant de degré $\beta \leq n - \varpi - \Sigma p - \Sigma q$ que l'auteur enseigne à former; enfin les nombres $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_i$ sont les degrés respectifs en s des relations à coefficients indépendants qui relient les dérivées partielles de F.

M. Sauvage rattache sans peine à ce théorème celui de M. Darboux, en vertu duquel deux formes quadratiques P et Q étant données, on peut toujours en former deux combinaisons linéaires distinctes de manière que la forme

$$(mP + nQ)s + (m'P + n'Q)$$

soit décomposable en plusieurs groupes de termes ayant respectivement les formes suivantes :

$$x'_1\overline{x}_1 + \ldots + x'_p\overline{x}_p,$$
$$-(s - s_i)(\xi\xi)_{e_i} - (\xi\xi)_{e_i - 1},$$

où les variables x', $\overline{x}$ et ξ sont indépendantes.

La même proposition générale fournit aussi la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes f et φ puissent être ramenées à deux formes f' et φ'.

Les formules de réduction des formes bilinéaires ou quadratiques, étant tout à fait générales au point de vue algébrique, peuvent être compliquées d'imaginaires dont il convient de se débarrasser dans les questions portant sur des formes à coefficients réels, notamment dans les questions de Géométrie analytique. C'est ce dernier problème qui occupe l'auteur dans la dernière partie de son Mémoire.

Mangeot. — Sur la détermination des axes dans les courbes du troisième ordre. (43-44).

Pour que la cubique $f(x, y) = 0$ (coordonnées rectangulaires) ait un axe, il faut et il suffit que l'expression $b\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y}$, où a et b désignent les deux constantes,

$$a = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$
$$b = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

admette un facteur F de la forme

$$F = bx + ay + \text{const.},$$

et l'équation de l'axe est $F = 0$.

Dans le cas où a et b sont simultanément nuls, la condition pour que la courbe admette au moins un axe est

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}, -\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ représentant l'ensemble des termes du troisième degré de $f(x, y)$.

Lorsqu'on a en même temps $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, la courbe admet trois axes, définie par l'équation

$$\varphi(y - \beta, \alpha - x) = 0.$$

Stouff. — Sur les lignes asymptotiques de quelques surfaces algébriques. (45-52).

M. Stouff s'est proposé de déterminer les surfaces sur lesquelles les lignes asymptotiques forment deux systèmes analytiquement distincts; le déterminant de l'équation du second degré qui donne les directions des asymptotes de l'indicatrice doit être alors le carré d'une fonction n'ayant qu'une valeur en chaque point de la surface, mais pouvant en avoir deux aux points situés en dehors. Ce déterminant n'est autre que le hessien à un facteur carré près. Ce hessien augmenté du premier membre de l'équation de la surface multiplié par un facteur convenable devra être un carré parfait.

Dans le cas des surfaces du second ordre, le hessien est une constante; les deux systèmes de génératrices rectilignes sont séparés par les signes + et — affectant la racine carrée du hessien.

Cette propriété s'étend à des surfaces du troisième ordre enveloppées par des quadriques.

Incidemment l'auteur obtient une classe étendue de surfaces du troisième ordre dont les lignes asymptotiques peuvent être déterminées à l'aide des fonctions elliptiques. Une partie de ces surfaces possèdent la propriété dont il s'agit.

Vessiot. — Sur une classe d'équations différentielles. (53-64).

Les équations du premier ordre qu'étudie M. Vessiot sont celles qui possèdent ce que l'on peut appeler des *systèmes fondamentaux* d'intégrales. Ces équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

jouissent de cette propriété que leur intégrale générale x s'exprime en fonction d'un certain nombre d'intégrales particulières $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par une formule, connue ou inconnue,

$$(2) \qquad x = f(x_1, \ldots, x_n \mid a),$$

qui subsiste lorsqu'on y remplace ces intégrales par n autres intégrales particulières quelconques.

L'auteur montre que ces équations se ramènent, par un changement de fonctions, à des équations linéaires du premier ordre avec ou sans second membre, ou à des équations de Riccati.

Il parvient à ce résultat par une application de la théorie des groupes. Il fait voir que, dans la formule (2), on peut supposer la constante d'intégration a choisie de telle façon que l'équation

$$(3) \qquad a' = f(x_1, \ldots, x_n \mid a)$$

définisse un groupe aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$.

Or, M. Lie a démontré qu'il n'y a que trois types de groupes à un paramètre : le groupe linéaire homogène, le groupe linéaire général et le groupe projectif. Donc, par un changement de variables convenable

$$a = \varphi(c), \qquad a' = \varphi(c'),$$

l'équation (3) prendra l'une des trois formes

$$c' = c\theta(x_1, \ldots, x_n),$$
$$c' = c\theta_1(x_1, \ldots, x_n) + \theta_2(x_1, \ldots, x_n),$$
$$c' = \frac{c\theta_1(x_1, \ldots, x_n) + \theta_2(x_1, \ldots, x_n)}{c\theta_3(x_1, \ldots, x_n) + \theta_4(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Cela revient à dire que l'équation (2), qui définit l'intégrale générale de l'équation (1), prend, par le changement de fonction et de constante

$$x = \varphi(X), \qquad a = \varphi(c),$$

l'une des trois formes

$$X = c\alpha(t), \qquad X = c\alpha_1(t) + \alpha_2(t), \qquad X = \frac{c\alpha_1(t) + \alpha_2(t)}{c\alpha_3(t) + \alpha_4(t)},$$

et que par suite le changement de fonction $x = \varphi(X)$, appliqué à l'équation (1), fournit bien une équation linéaire sans second membre ou avec un second membre, ou une équation de Riccati.

La réciproque de ce théorème est vrai. Elle montre que le nombre n des intégrales est 1, 2 ou 3. De là trois sortes d'équations que M. Vessiot caractérise de la manière suivante :

1° Les équations de la première classe sont celles où les variables sont séparées;

2° Les équations de la deuxième classe sont celles dont le second membre $F(x, t)$ est intégrale d'une équation linéaire du second ordre, dont les coefficients ne dépendent que de x et telle que le déterminant fonctionnel de deux intégrales en soit une intégrale. Elles s'intègrent par deux quadratures;

3° Les équations de la troisième classe sont celles pour lesquelles F est intégrale d'une équation linéaire du troisième ordre, à coefficients en x, identique à sa transformée au déterminant fonctionnel de deux intégrales. Une telle équation peut être ramenée, par des calculs algébriques, à une équation de Riccati.

Riquier. — De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. (65-16, 123-150, 167-181).

Ce travail étendu porte sur l'existence des intégrales dans un système d'équations différentielles comprenant un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes. Les plus simples de tous sont les systèmes complètement intégrables d'équations différentielles totales du premier ordre. En ce qui concerne les systèmes partiels, M. Bourlet a réussi à réduire un système différentiel quelconque à une forme du premier ordre pour laquelle on peut affirmer la convergence des développements des intégrales.

Allant plus loin dans cette voie, M. Riquier effectue la réduction d'un système quelconque à un système complètement intégrable d'ordre égal ou supérieur à 1, et présentant, avec certaines particularités, la forme entière par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

La notion capitale dans la théorie de M. Riquier est celle de système différentiel *harmonique*. Voici comment l'auteur conçoit et définit un pareil système :

A chacune des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et à chacune des fonctions inconnues $u, v, \ldots$ il fait correspondre p entiers, positifs, nuls ou négatifs, qu'il nomme *cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$* de cette quantité. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues et désignant par q un terme pris à volonté dans la suite $1, 2, \ldots, p$ il appelle *cote $q^{\text{ième}}$* de cette dérivée l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes homologues de toutes les variables des différentiations.

Cela posé, le système différentiel sera dit *harmonique* si, grâce à un choix convenable de p et des cotes de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ il remplit à la fois les conditions suivantes :

1° Chacune des équations a pour premier membre une certaine dérivée de quelque fonction inconnue, et les seconds membres de ces équations sont *olotropes* dans quelque système de cercles tracés dans les plans des $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et des dérivées de $u, v, \ldots$ envisagées comme variables indépendantes;

2° Les diverses dérivées des fonctions inconnues qui figurent dans chacun des seconds membres ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre. En outre si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, par $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant dans le second, les différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c - c',$$

ne sont pas toutes nulles, et la première qui ne s'évanouit pas est positive;

3° Aucun des premiers membres ni aucune de leurs dérivées ne figure dans le second membre d'aucune des équations données.

Les systèmes *harmoniques* de M. Riquier renferment, comme cas particulier, les systèmes *canoniques* de M. Bourlet.

Cherchant si, pour un système harmonique, il existe quelque groupe d'intégrales *ordinaires* répondant à des conditions initiales données, M. Riquier trouve qu'il est nécessaire que certaines relations, qu'il nomme *ultimes*, s'accordent numériquement par rapport aux conditions initiales dont il s'agit.

Mais il peut arriver que la concordance des relations ultimes subsiste indépendamment des données initiales.

Quand il en est ainsi, le système harmonique est dit *passif*. L'auteur enseigne les caractères auxquels on reconnaîtra la *passivité* d'un tel système. Les systèmes harmoniques passifs sont ceux qui jouent le premier rôle dans les recherches de l'auteur.

Un système harmonique et passif quelconque admet, en effet, un groupe d'intégrales ordinaires et un seul répondant à des conditions initiales données.

Par intégrales *ordinaires* il faut entendre celles qui remplissent à la fois les deux conditions suivantes : 1° elles sont olotropes à l'intérieur de quelque système de cercles et les valeurs qu'elles acquièrent entre ces limites, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures aux cercles d'olotropie des seconds membres; 2° la substitution de ces intégrales opérées entre les mêmes limites transforme en identités les diverses équations du système.

De tout système harmonique passif on peut d'ailleurs déduire un système d'ordre égal jouissant d'importantes propriétés pour l'énumération desquelles nous devons renvoyer au travail de l'auteur.

Après avoir achevé l'étude détaillée de ces systèmes différentiels particuliers, l'auteur revient aux systèmes quelconques, et arrive enfin au résultat qui était le but de ses efforts :

Étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers olotropes dans un système de cercles;

Ou bien ce système n'admet aucune solution;

Ou bien il équivaut à quelque système fini que l'on en peut déduire sans intégration;

Ou bien enfin son intégration se ramène, par des calculs qui ne comportent aucune intégration, à un système harmonique passif.

On peut encore pousser la réduction plus loin et ramener un système différentiel quelconque à une suite de systèmes harmoniques passifs ne contenant chacun qu'une seule fonction inconnue.

Mangeot. — Sur les éléments de la courbure des courbes et surfaces. (86-89).

L'auteur donne des règles pour déterminer les éléments de la courbure d'une surface ou d'une courbe gauche. On remplacera, au point considéré, la surface ou les deux surfaces dont la courbe est l'intersection par une ou par deux quadriques ayant avec cette ou ces surfaces, un contact d'ordre égal ou supérieur à 2. Dès lors :

1° Pour avoir les centres de courbure principaux et les tangentes principales

en un point simple M, d'une quadrique définie par son équation, il suffit d'exprimer que, par l'intersection de la quadrique et d'une sphère qui la touche en M, on peut faire passer un cône ayant son sommet en M et tangent à la quadrique. Le centre de la sphère et l'arête de contact du cône avec le plan tangent sont un centre de courbure principal et la tangente principale correspondante de la quadrique;

2° Pour avoir le cercle osculateur en un point ordinaire M de la courbe d'intersection de deux quadriques définies analytiquement, il suffit d'exprimer que, par l'intersection de chacune d'elles avec une sphère qui la touche en M, on peut faire passer un cône ayant son sommet au point M et tangent à la courbe en ce point. Le cercle commun aux deux sphères ainsi déterminées est le cercle cherché.

Kapteyn. — Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel. (91-122).

Le calcul des résidus de Cauchy se prête très facilement, comme le montre M. Kapteyn, à la démonstration des propriétés fondamentales des fonctions de Bessel. De ce calcul, l'auteur déduit les expressions suivantes de ces fonctions

$$\mathrm{I}_n(z) = \mathcal{E}_{(0)} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t^{n+1}}\,dt,$$

$$\mathrm{I}_n(z) = (-1)^n \mathcal{E}_{(0)} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{n-1} = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_r e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{n+1}\,dt.$$

Il en tire immédiatement les deux relations capitales auxquelles elles satisfont

$$\frac{d\mathrm{I}_n(z)}{dz} = \frac{1}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) - \mathrm{I}_{n+1}(z)],$$

$$n\mathrm{I}_n(z) = \frac{z}{2}[\mathrm{I}_{n-1}(z) + \mathrm{I}_{n+1}(z)].$$

Il fait voir ensuite avec quelle facilité se fait, grâce au calcul des résidus, la sommation de certaines séries dont les termes sont composés avec des fonctions de Bessel.

En terminant il donne une démonstration nouvelle de la formule de développement d'une fonction en une série de fonctions de Bessel et en une série de carrés de fonctions de Bessel.

Tikhomandritzky. — Esquisse d'une méthode pour déterminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles. (150-165).

L'auteur revient sur un problème déjà résolu par M. Nöther et par M. Raffy, et il le résout par une méthode plus simple que celles qu'ont employées ces deux géomètres.

Quelles que soient les singularités d'une courbe, il suffit d'appliquer convenablement la méthode du plus grand commun diviseur pour calculer le

genre au moyen de simples divisions, et pour déterminer les courbes adjointes par des divisions et des résolutions d'équations du premier degré.

Duhem. — Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. (183-230).

Moyennant certaines hypothèses, l'auteur trouve pour expression du potentiel thermodynamique interne d'un système hétérogène

$$\mathrm{F} = \int \mathrm{G}\, d\mathrm{V} + \frac{\mathrm{E}}{2}\int\int \mathrm{F}\, d\mathrm{V}\, d\mathrm{V}'.$$

Chacune des intégrations s'étend au volume entier du système; G dépend des variables (température, densité, etc.) qui définissent l'état du système en un point de l'élément $d\mathrm{V}$; F dépend des propriétés de la matière en un point de l'élément $d\mathrm{V}$ et en un point de l'élément $d\mathrm{V}'$, sauf de la température de ces deux points.

Le cas le plus simple de l'hydrostatique est celui où les éléments du fluide n'exercent les uns sur les autres aucune action. Alors la fonction F est nulle et G se réduit à une fonction de ρ et de T.

Un autre cas plus général est celui où l'on a $\mathrm{F} = \rho\rho'\,\psi(r)$, ρ et ρ' étant les densités des deux éléments $d\mathrm{V}$, $d\mathrm{V}'$ et r leur distance. Dans ce cas deux éléments fluides de masses dm, dm' exercent, l'un sur l'autre, une action répulsive $-\,dm\,dm'\,\dfrac{d\,\psi(r)}{dr}\cdot$ A ce cas se rapporte la théorie de la figure des planètes.

Un cas plus général, non étudié jusqu'ici, mais indiqué par M. Faye pour expliquer la formation de la queue des comètes, est celui où l'on a

$$\mathrm{EF} = \rho\rho'\,\psi(\rho, \rho', r).$$

Ce cas est tout à fait différent de ceux qu'on envisage généralement en Hydrostatique, où l'on suppose implicitement que dans les actions mutuelles les densités ne figurent pas dans la fonction ψ.

Les deux éléments dm, dm' exercent l'un sur l'autre, dans l'hypothèse générale envisagée par M. Duhem, une force répulsive égale à

$$-\,dm\,dm'\,\frac{\partial}{\partial r}\,\psi(\rho, \rho', r).$$

Mais cette force ne représente pas à elle seule l'action totale de la particule dm' sur la particule dm; il faut y joindre une influence tendant à accroître la densité de l'élément dm, influence représentée par le terme

$$-\,\frac{\partial}{\partial \rho}\,\psi(\rho, \rho', r)\,dm\,dm'.$$

L'introduction de ce nouvel élément amène à des conclusions qui ne sont pas celles de l'hydrostatique classique. Voici ces conclusions, purement négatives.

La densité du fluide en un point n'est pas déterminée par la seule connaissance de la pression au même point.

Les surfaces d'égale pression ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale pression.

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

Elliot. — Mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse. (231-252).

Les équations différentielles du mouvement d'un point libre sollicité par l'action de forces dérivant d'un potentiel U, et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, sont :

$$(1)\qquad \frac{d^2x_i}{dt^2} + k\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si l'on fait le changement de variables

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, q_3),$$

ces équations prennent la forme

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) + k\frac{dT}{dq'_h} - \frac{dT}{dq_h} = \frac{\partial U}{dq_h} \qquad (h = 1, 2).$$

Ces dernières, au nombre de deux seulement, conviennent au mouvement d'un point sur une surface polie et déterminent les deux paramètres q_1, q_2 en fonction du temps. Dans le cas du mouvement sur une courbe, il n'y aura qu'une équation.

On peut ramener les équations (2) à la forme canonique, c'est-à-dire faire un changement de variables tel que ces équations coïncident avec celles des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles dont il suffira, d'après la méthode de Jacobi, de trouver une intégrale complète pour écrire les équations du mouvement.

Il suffit de substituer aux variables q'_h de nouvelles variables p_h, définies par

$$p_h = e^{kt}\frac{\partial T}{\partial q'_h}.$$

En effectuant les calculs de substitution, on arrive au système canonique

$$\frac{dp_h}{dt} = -e^{kt}\frac{\partial(T - U)}{\partial q_h},$$

$$\frac{dq_h}{dt} = e^{kt}\frac{\partial(T - U)}{\partial p_h}.$$

Si maintenant l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + e^{kt}(T - U) = 0,$$

à $n+1$ variables t, q_1, q_2, ..., q_n, et qu'on en suppose connue une intégrale

$$V(t, q_1, \ldots, q_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

à n constantes arbitraires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, les q_h seront déterminées en fonction de t par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = \varepsilon'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ε' désignent de nouvelles constantes arbitraires.

M. Elliot indique les formes particulières que revêt l'équation aux dérivées partielles dans le cas du mouvement sur une surface et dans celui du mouvement sur une courbe.

Dans le premier cas, l'élément linéaire de la surface étant représenté par

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

l'équation aux dérivées partielles peut être écrite

$$\frac{G\dfrac{\partial W^2}{\partial u^2} - 2F\dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v} + E\dfrac{\partial W^2}{\partial v^2}}{EG - F^2} + 2kW - 2U = 0;$$

une intégrale complète donne u et v par les formules

$$e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \varepsilon', \qquad \varepsilon^{kt}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} = \varepsilon'_1.$$

Dans le cas d'une courbe dont l'élément est $ds^2 = E\,du^2$, on trouve l'équation différentielle

$$\frac{1}{E}\frac{dW^2}{du^2} + 2kW - 2U = 0.$$

La formule qui définit le paramètre u en fonction de t est

$$e^{kt}\frac{\partial W^2}{\partial \varepsilon} = \varepsilon'.$$

M. Elliot indique divers cas où l'intégration est possible. Par exemple, lorsque le mobile est assujetti à rester sur une surface développable et qu'il n'y a pas de force autre que la résistance, on peut toujours trouver les équations finies du mouvement.

Caspary. — Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de première espèce. (253-294).

M. Caspary prend pour point de départ la définition que M. Weierstrass a donnée des fonctions hyperelliptiques : si l'on désigne par s_1, s_2 des variables et par A_0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des constantes, les fonctions hyperelliptiques de première espèce sont définies par les expressions

$$P_\mu = \sqrt{(s_1 - a_\mu)(s_2 - a_\mu)},$$

$$P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu} = \frac{P_\mu P_\nu}{s_1 - s_2}\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\mu)(s_1 - a_\nu)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\mu)(s_1 - a_\nu)}\right],$$

$$(\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \quad \mu \gtrless \nu),$$

où les indices α, β, δ, ε désignent, dans un ordre quelconque, o, 1, 2, 3, 4, et où R_x représente le polynôme

$$A_0(s_x - a_0)(s_x - a_1)(s_x - a_2)(s_x - a_3)(s_x - a_4) \quad (x = 1, 2).$$

De cette définition, M. Caspary déduit immédiatement ce théorème fondamental, que les quinze fonctions hyperelliptiques de première espèce, P_μ, $P_{\mu\nu}$ sont proportionnelles aux quinze éléments a_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$), p_h, ν_h ($h = 1, 2, 3$) d'un système orthogonal.

Il comprend sous ce nom les neuf coefficients a_{mn} d'une substitution orthogonale de F déterminant + et les six différentielles

$$p_h = -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}),$$
$$\nu_p = + a_{k_1}da_{l_1} + a_{k_2}da_{l_2} + a_{k_3}da_{l_3}.$$

C'est sur le théorème qui vient d'être rappelé que l'auteur s'appuie pour établir les nombreuses relations algébriques qui lient les fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Stouff. — Les lois de réciprocité et les sous-groupes du groupe arithmétique. (295-314).

L'idée qui, dans ce Travail, a servi de guide à M. Stouff se trouve dans les recherches de Sylvester relatives à la loi de réciprocité ordinaire pour les nombres réels. Malheureusement cette loi de réciprocité ne donne pas un moyen simple de définir des sous-groupes, car elle exige, pour reconnaître le caractère d'une substitution, un développement en fraction continue.

Il faut alors avoir recours aux lois de réciprocité des nombres complexes données déjà en partie par Gauss et Eisenstein.

Ces lois se rattachent, comme le montre M. Stouff, à une théorie importante, celle des substitutions linéaires.

L'auteur envisage le groupe G de substitutions à coefficients réels

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \beta \equiv 0 \pmod 3.$$

Ce groupe admet pour substitutions génératrices

$$T(z, z+3), \qquad U\left(z, \frac{z}{z+1}\right).$$

M. Stouff fait d'abord usage de la loi de réciprocité cubique, qui introduit le symbole [—], dans le sens où l'entend Eisenstein.

Il considère l'expression $\left[\dfrac{3(a+b\rho)}{c+d\rho}\right]$ où

$$c \equiv 0 \pmod 3, \qquad d \equiv 1 \pmod 3.$$

Nous ne relaterons que l'un des cas examinés par M. Stouff, celui où le caractère du numérateur $3(a+b\rho)$ est 2.

Soit alors K le sous-groupe de G, formé des substitutions pour lesquelles β est divisible par 9. Si l'on suppose une substitution S de K exprimée au moyen

des substitutions T et U,

$$S = T^{a_1} U^{b_1} \dots T^{a_n} U^{b_n},$$

et qu'on désigne par $r_1, r_2, \dots, r_n$ le nombre total des substitutions T qui se trouvent respectivement *à la droite* des exposants $b_1, b_2, \dots, b_n$ de U, les substitutions S pour lesquelles

$$b_1 r_1 + b_2 r_2 + \dots + b_n r_n$$

est congru (mod 3) forment un groupe R.

C'est la construction de ce groupe R que M. Stouff avait en vue, et il en trouve en même temps le caractère arithmétique :

Pour qu'une substitution à coefficients entiers réels de déterminant 1 appartienne au groupe R, il faut et il suffit que

$$\beta \equiv 0 \pmod 9$$

et que, prenant au hasard un système de deux nombres complexes

$$[3(a + b\rho), \quad c + d\rho],$$

$$a \equiv 2, \qquad b \equiv 1, \qquad c \equiv 0, \qquad d \equiv 1 \qquad (\text{mod } 3),$$

on ait

$$\left[\frac{3\alpha(a + b\rho) + \beta(c + d\rho)}{3\gamma(a + b\rho) + \delta(c + d\rho)}\right] = \left[\frac{3(a + b\rho)}{c + d\rho}\right].$$

La possibilité de définir un sous-groupe R à l'aide des deux nombres complexes $3(a + b\rho)$, $c + d\rho$ tient essentiellement, comme le fait remarquer l'Auteur, aux congruences imposées au second de ces deux nombres.

La théorie des restes biquadratiques fournit des résultats analogues.

Les lois de réciprocité d'ordre supérieur se prêteraient aussi à des développements semblables, et peut-être conduiraient-elles à des groupes qui ne fussent pas à congruences.

Fitte. — Sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut. (315-318).

M. Fitte complète les résultats obtenus par M. L. Geoffroy (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, p. 215), en intégrant les équations aux dérivées partielles dont ce dernier n'avait pas indiqué les solutions.

Si l'on rapporte les divers points du fluide en mouvement aux coordonnées polaires z, r, θ, les surfaces dont la résistance normale est, à un moment donné, la même en tous les points, sont définies par l'équation

$$\left[n + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] = b^2 \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

où b et n sont des constantes, dont la première représente le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire de rotation.

Une solution complète de cette équation est

$$z = h\theta + \frac{1}{b}\int \sqrt{[(n + h)^2 - b^2]r^2 - b^2 h^2}\,\frac{dr}{r} + k,$$

2da Parte

h et k désignant des constantes. De cette solution complète, qui représente un hélicoïde réglé, on déduit l'intégrale générale sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} z = h\theta + \dfrac{1}{b}\displaystyle\int \sqrt{[(n+h)^2 - b^2]r^2 - b^2h^2}\,\dfrac{dr}{r} + \varphi(h), \\ 0 = \theta + \dfrac{1}{b}\displaystyle\int \dfrac{(n+h)r^2 - b^2h}{\sqrt{[(n+h)^2 - b^2]r^2 - b^2h^2}}\,\dfrac{dr}{r} + \varphi'(h), \end{cases}$$

où $\varphi(h)$ représente une fonction arbitraire du paramètre h.

Si l'on imprime aux surfaces (1) un mouvement hélicoïdal continu autour de l'axe des x, de manière que le rapport n reste constant, la résistance normale restera nulle en tous les points.

Quant aux surfaces dont la résistance de frottement est la même en tous les points, elle sont définies par l'équation

$$(r^2 + n^2 - c^2)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{n^2 - c^2}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 - 2n\frac{\partial z}{\partial \theta} + r^2 - c^2 = 0,$$

qui admet comme solution complète l'hélicoïde

$$z = h\theta + \int \sqrt{\frac{(2nh + c^2 - r^2)r^2 - (n^2 - c^2)h^2}{r^2 + n^2 - c^2}}\,\frac{dr}{r} + k,$$

dont on déduit aisément l'intégrale générale.

M. Fitte montre que les surfaces telles que la résistance normale et la résistance du frottement en tous les points soient liées par une relation donnée, sont représentées par une équation aux dérivées partielles, dont une solution complète est toujours un hélicoïde.

Adam. — Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes. (319-358).

Les équations des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ont été données par M. Darboux, qui s'est borné au cas général, cas où les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône.

M. Adam s'attache au cas particulier où les plans de ces lignes de courbure enveloppent un cylindre.

Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, qui s'introduisaient dans l'expression des coordonnées de la surface se réduisent à des fonctions de première espèce lorsque le sommet du cône s'éloigne à l'infini. Par un calcul, qui constitue une application intéressante des fonctions H et Θ, M. Adam parvient à exprimer les coordonnées X, Y, Z au moyen des fonctions elliptiques sn, cn, dn, isolées ou engagées sous le signe $\int$, et d'une fonction arbitraire :

$$X = 2i\cos\lambda\,\frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}} + k^2\int \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\cos\lambda + V\sin\lambda)\,dv_1,$$

et

$$Y = 2i \sin\lambda \frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}} + k^2 \int \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1,$$

$$Z = 2\frac{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}} \frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}} + \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}.$$

Dans ces formules u et v_1 sont deux paramètres; la relation $v_1 = \text{const}$ représente les lignes de courbure planes C du premier système, V est une fonction arbitraire de v_1 et λ une autre fonction de v_1 liée à V de telle façon que

$$d\lambda = \frac{i}{\operatorname{sn} iv_1} V\,dv_1.$$

Quant à la ligne de courbure plane C, si on la rapporte dans son plan, à $O'x$ et à $O'z$ parallèle à Oz, les coordonnées de ses points auront pour expression

$$x = 2i \frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}},$$

$$z = Z.$$

M. Adam détermine ensuite les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Si l'on met à part les surfaces moulures de Monge, qui répondent à la question, les lignes de courbure de chacun des deux systèmes doivent être dans des plans parallèles à une droite fixe, et les deux droites fixes correspondantes doivent être rectangulaires. Les surfaces de cette nature, qui sont isothermiques, peuvent être regardées comme engendrées de la manière suivante :

On prend deux coniques focales l'une de l'autre et situées dans deux plans rectangulaires; on considère deux sphères dont les centres décrivent respectivement ces deux coniques et dont les rayons varient suivant deux lois quelconques; le plan radical de ces deux sphères enveloppe la surface demandée.

Les deux coniques focales peuvent être : 1° une ellipse et une hyperbole; 2° deux paraboles.

En donnant au module des fonctions elliptiques qui figurent dans les expressions des coordonnées la valeur zéro, on obtient deux catégories de surfaces comprenant, la première les cyclides et la seconde les surfaces minima d'Ossian Bonnet et la surface minima d'Enneper.

Les cyclides sont les seules surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes pour lesquelles les plans des lignes de courbure de l'un des systèmes passent par une droite fixe.

L'auteur cherche enfin à dégager des résultats généraux qu'il a obtenus les équations des surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système. Il montre qu'à part les surfaces minima de Bonnet, il n'existe pas de surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

Riquier. — Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à un système complètement intégrable du premier ordre. (359-386).

Dans son précédent Mémoire, M. Riquier a montré comment on peut, de deux manières différentes, mais toujours par de simples résolutions d'équations, combinées avec les différentiations, ramener un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable, qu'il a nommée *harmonique* et dont l'ordre est, en général supérieur à 1.

L'auteur montre actuellement que la réduction peut être poussée plus loin, et que par de simples différentiations il est possible de ramener un système harmonique et complètement intégrable d'ordre quelconque à un système harmonique et complètement intégrable d'ordre quelconque, possédant, en outre, la forme harmonique par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

Supplément.

Perchot. — Sur les mouvements des nœuds et du périgée de la Lune et sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons. (3-94).

La théorie de la Lune est d'une importance capitale en Mécanique céleste, mais elle laisse encore beaucoup à désirer.

Les recherches de M. Poincaré sur le problème des trois corps ont, en effet, montré le peu de rigueur des anciennes méthodes et nous ont appris qu'aucun des développements auxquels elle conduisent n'est convergent. Mais, en même temps, M. Poincaré a donné une théorie générale des solutions périodiques et des solutions asymptotiques qui permettent de calculer plus rapidement et plus exactement que par le passé les coefficients de certaines inégalités.

C'est en appliquant la première de ces théories que M. Perchot a calculé, dans une première approximation, les coefficients des principales inégalités périodiques des longitudes du nœud ascendant et du périgée de la Lune Pour point de départ, il a pris les équations canoniques qui ont servi à Delaunay.

Dans la première partie de son travail, il indique d'autres équations canoniques qui définissent le mouvement relatif de la Lune par rapport à un système d'axes animé de deux rotations correspondant aux mouvements séculaires des nœuds et du périgée.

Sautreaux. — Sur une question d'Hydrodynamique. (95-182).

Le problème du mouvement d'un jet fluide, posé par Helmholtz, puis traité par Kirchhoff, n'a été jusqu'ici résolu que dans un assez petit nombre de cas.

Dans la plupart des problèmes de Physique mathématique, les conditions aux limites s'expriment par des équations linéaires qui permettent de décomposer la difficulté. Mais ici la condition aux limites renferme les carrés des dérivées partielles, ce qui rend la question plus difficilement abordable.

Kirchhoff n'étudie que le mouvement dans le plan d'un liquide soustrait à

toute action extérieure; il se sert des propriétés de la représentation conforme d'un plan sur un plan. M. Sautreaux consacre la première Partie de son travail à l'exposition de la méthode de Kirchhoff et des résultats auxquels elle l'a conduit. Dans la seconde Partie, il rend compte de ses recherches personnelles. C'est cette seconde Partie que nous analysons ici.

Les équations du mouvement permanent dans le plan sont

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] - \mathrm{F} + \mathrm{C}_1 = 0,$$

où φ désigne le potentiel des vitesses, F celui des forces qui agissent en un point de fluide, p la pression, ρ la densité et C_1 une constante.

L'intégrale générale de la première équation est

$$\lambda = f(z) + f_1(z_1)$$

où

$$z - x + iy, \qquad z_1 = x - iy.$$

On voit alors facilement que le carré de la vitesse a pour expression

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 4f'(z)f_1'(z_1).$$

Or, la surface libre du jet qui sort du réservoir est à la fois trajectoire, car la vitesse normale y est nulle, et surface de niveau, puisque la pression extérieure est constante. Si donc p_0 représente la pression extérieure, on doit avoir pour tous les points de la surface de la veine fluide, en désignant par C une valeur constante bien déterminée du potentiel des vitesses, les quatre équations simultanées

$$f(z) = f_1(z_1) + \mathrm{C},$$

$$x + iy = z, \qquad x - iy = z_1,$$

$$\frac{p_0}{\rho} + \mathrm{C}_1 = \mathrm{F} - 2f'(z)f_1'(z).$$

D'une manière générale, on pourra se donner $f_1(z_1)$ par exemple, puis éliminer z_1 entre la première et la dernière de ces quatre équations; on parviendra à une équation différentielle dont la résolution permettra de déterminer $f(z)$. Si $f_1(z)$ n'est pas bien choisi, le procédé ne fournira que des surfaces libres imaginaires. Aussi l'auteur en indique-t-il un autre.

Il fait d'abord une restriction (qu'il lève plus tard), en supposant que f et f_1 représentent la même fonction; puis il substitue aux deux variables z et z_1 les deux variables w, w_1 définies par les équations

$$f(z) = w, \qquad f(z_1) = w_1,$$

ou inversement

$$z = \chi(w), \qquad z_1 = \chi(w_1).$$

Si les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, F a la valeur gx; et, si l'on pose

$$\frac{p_0}{\rho} + \mathrm{C}_1 = -k,$$

les quatre équations qui définissent la surface libre deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} w = w_1 + C, \\ z = x + iy = \chi(w), \\ z_1 = x + iy = \chi(w_1), \\ \dfrac{2}{\chi'(w)\,\chi'(w_1)} = gx + k = \dfrac{g}{2}\,[\chi(w) + \chi(w_1)] + k. \end{cases}$$

Par l'élimination de w_1, la dernière se transforme en

$$(2)\qquad \frac{2}{\chi'(w)\,\chi'(w - C)} = \frac{g}{2}\,[\chi(w) + \chi(w - C)] + k.$$

Le problème est ramené à la détermination d'une fonction χ satisfaisant à cette dernière relation.

Posant

$$\chi'(w)\,\chi'(w - C) = F'(w),$$

on peut former une équation du second degré, ayant pour racines $\chi'(w)$ et $\chi'(w - C)$, équation qui, à cause de la relation (2), doit avoir la forme

$$U^2 - F'(w)\,U + \frac{2}{\frac{g}{2}\,F(w) - k} = 0.$$

Si les deux racines U', U'' jouent le même rôle, il est facile de voir que $F(w)$ doit être une fonction périodique de $2C$.

Si l'on fait

$$F(w) + \frac{2k}{g} = \theta^2(w),$$

qu'on suppose que $\theta(w)$ admette $-C$ pour *demi-période* et qu'on résolve l'équation du second degré, on trouve

$$\chi'(w) = \theta(w)\,\theta'(w) + \frac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \frac{4}{g}}}{\theta(w)},$$

$$\chi'(w - C) = \theta(w)\,\theta'(w) - \frac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \frac{4}{g}}}{\theta(w)}.$$

L'intégration de ces deux dérivées introduira deux constantes, qui ont évidemment même valeur, et l'on détermine cette valeur commune en substituant dans l'équation (2) les expressions de $\chi(w)$, $\chi(w - C)$.

Finalement, si l'on tire les valeurs de x, y des deux relations

$$x + iy = \chi(w), \qquad x - iy = \chi(w - C),$$

on a pour les coordonnées d'un point de la surface libre

$$x = \theta^2(w) - \frac{2k}{g},$$

$$y = \int \frac{\sqrt{\frac{4}{g} - \theta^4(w)\,\theta'^2(w)}}{\theta(w)}\,dw.$$

Du cas qui vient d'être traité, M. Sautreaux déduit facilement celui où il n'y a pas de forces extérieures agissant sur le fluide.

En se donnant $\theta(w)$, on détermine tout le mouvement du fluide. On peut appliquer à la relation qui lie z et w la méthode de Kirchhoff et déduire le domaine de z de celui de w. M. Sautreaux reprend à ce point de vue les exemples donnés par Kirchhoff.

Il termine en montrant que sa propre méthode analytique peut encore être appliquée à d'autres cas où le liquide obéit à l'action de forces autres que la pesanteur, par exemple au cas où les molécules fluides subissent une attraction ou une répulsion émanant de l'axe de y et fonction de x seulement, et au cas où elles sont soumises à une force centrale.

REVUE D'ARTILLERIE ([1]).

Tome XXXIII; octobre 1888-mars 1889.

Moch (*G.*). — Expériences américaines sur le frettage des bouches à feu. (48-67, 256-282, 447-461, 12 fig., 27 tabl.).

Suite du Travail inséré au t. XXXII.

II. Essai d'une frette martelée et trempée. III. Essai d'une frette-tourillon en acier, forgée, trempée et recuite.

Deuxième Partie. — Assemblage et désassemblage d'un tronçon de canon fretté de 8 pouces.

Troisième Partie. — Assemblage et désassemblage d'un tronçon de canon à fils d'acier, système Woodbridge.

Ray (*L.*). — Calcul approximatif de la Table de tir d'une arme à l'étude. (428-446, 6 tabl.).

Ce Mémoire a particulièrement pour objet la comparaison des angles de projection observés dans le tir des pièces de la marine avec les angles donnés dans les tables de tir.

Ply (*G.*). — Étude sur l'organisation du service technique dans les manufactures d'armes. (5-47, 101-142, 211-243, 297-332, 61 fig.).

Suite du Travail inséré au t. XXXII (344-390, 409-436, 505-535, 2 fig.).

Les trois derniers Chapitres contiennent d'importants développements sur la

---

([1]) Voir *Bulletin*, XI, 74; II_2, 127; IV_2, 206; V_2, 231; VII_2, 86; VIII_2, 79; XI_2, 51 et XIV_2, 37.

théorie mathématique de plusieurs machines-outils, et notamment du balancier à friction, des machines à fraiser et à reproduire, et de divers organes mécaniques.

Ray (*L.*). — Choix des formules à employer pour le calcul des Tables de tir. (158-170, 1 fig.).

Essai comparatif de diverses formules représentatives de la résistance de l'air, suivant les limites de la vitesse initiale.

Monteux (*B.*). — Emploi du liquide comprimé dans les freins hydrauliques. (333-350, 1 fig.).

L'étude détaillée des différentes actions qui se passent dans le jeu des freins hydrauliques amène à cette conclusion importante et peut être inattendue, que la résistance constante et la régularité du fonctionnement ne peuvent être obtenues que par l'emploi d'un liquide comprimé. Cela tient à ce que la compressibilité n'est pas négligeable, et à ce que la condition de continuité n'est vraie que pour un liquide conservant la même densité pendant toute la durée du recul, c'est-à-dire, avec un liquide comprimé avant le tir et maintenu à une pression constante.

Tome XXXIV; avril-septembre 1889.

Chapel. — Sur la *Balistique* de M. Siacci. (47-52).

Compte rendu bibliographique du récent *Traité de Balistique* publié par M. Siacci, et indication de développements originaux de l'auteur sur un grand nombre de questions nouvellement étudiées.

Putz (*G.*). — Sur la perforation des plaques de blindage. (138-163, 193-226, 7 fig., 5 tabl., 2 pl.).

Traduction d'un Mémoire contenant les principes généraux de la théorie admise à Essen et les formules proposées par Krupp pour résoudre les problèmes relatifs à la perforation.

I. Étude théorique des phénomènes de la perforation.

II. Comparaison de diverses formules empiriques de perforation. Examen de quelques cas particuliers. Discussion des formules du général Froloff. Avantage de la formule de Krupp. Formules données par Krupp pour certains cas particuliers.

III. Forme rationnelle d'une équation de perforation. Formules de Krupp (1880) et de Madsen et Inglis. Nouvelle formule proposée par Krupp. Représentation graphique de ces formules.

Chapel. — Sur quelques procédés nouveaux de calcul graphique. (330-343, 9 fig.).

Exposé de la résolution graphique des principaux problèmes qui se présentent dans l'analyse usuelle.

Vallier (*E.*). — De la solution des problèmes du tir courbe et de l'angle de plus grande portée. (427-460, 18 tabl.).

Étude sur un Ouvrage de M. Zaboudski. Résumé des méthodes et emploi des tables.

Tome XXXV; octobre 1889-mars 1890.

Roulin (*L.*). — La balistique intérieure en Angleterre. (216-226, 1 fig.).

Analyse d'un Traité de balistique intérieure publié par M. J.-A. Longridge, et dans lequel sont exposées pour la première fois en Angleterre les recherches et les découvertes de M. Sarrau.

Siacci (*F.*). — Sur la solution exacte du problème balistique. 493-497).

Le problème balistique est ramené aux quadratures lorsque la résistance peut être exprimée par cv^n, et l'on a construit des Tables qui donnent la solution pour $n = 2, 3, 4$. D'autre part, des formules très simples peuvent servir à résoudre la même question; mais ces formules contiennent une fonction β qui n'est connue jusqu'à présent que par les limites entre lesquelles elle varie.

Une expression de β en fonction de V (vitesse initiale), φ (angle de projection) et X (portée) existe nécessairement, mais elle ne peut être qu'une fonction transcendante.

L'auteur propose une expression de la fonction β en une série ordonnée suivant les puissances décroissantes du coefficient balistique, et pour $n = 3$. La comparaison numérique, faite avec les Tables de Bashfort, montre que les différences portent seulement sur le troisième chiffre décimal. C'est plus qu'il n'en faut pour avoir les plus grandes portées à un mètre près.

Ces formules prépareront la voie à des tentatives de développement de la série dans le cas général.

Tome XXXVI, avril-septembre 1890.

Vallier (*E.*). — Sur les méthodes actuelles de balistique. (42-62, 153-173, 1 fig., 2 tabl.).

Les formules de balistique, pour le calcul des divers éléments d'une Table de tir ou la préparation d'une expérience, se sont, depuis une quinzaine d'années notamment, tranformées et simplifiées. Il a semblé intéressant de rapprocher ces nouvelles méthodes, d'en exposer les principes et d'étudier en même temps quel est leur degré d'approximation et dans quelle voie on peut chercher à en accroître encore la simplicité ou la précision.

Pour des vitesses initiales moindres que 240 mètres, les Tables de Siacci ou de Braccialini résolvent la question du tir courbe.

Pour le cas, plus fréquent, de vitesses initiales comprises entre 240 et 600 mètres, on s'accorde à admettre que la méthode Siacci convient dans le tir de plein fouet. Pour le tir au-dessus de 14°, les Tables de Zaboudski semblent donner la solution la plus rapide actuellement, avec toute l'exactitude désirable.

Pour les vitesses initiales supérieures à 600 mètres, dans le cas du tir de plein fouet, les Tables de Siacci, ou encore les logarithmes balistiques déduits de la loi du carré, si la vitesse d'arrivée ne descend guère au-dessous de 400 mètres, donnent la solution du problème. Pour les angles supérieurs, il est possible, surtout avec les petits calibres, que les Tables Zaboudski ne soient pas assez précises.

Enfin, pour une étude particulière, la méthode des vitesses, dont l'auteur a indiqué le principe et qu'il développe dans un Chapitre spécial, donnera toutes les solutions du problème (vitesse, angle de chute, portée, etc.).

Touche (*P.*). — Sur le calcul de la résistance de l'air. (131-144, 3 fig.).

Exposé de la méthode de calcul de la résistance de l'air contre un projectile se mouvant le long de son axe, et comparaison des résultats numériques ainsi obtenus avec ceux que l'expérience a donnés.

Évaluation de la dépression à l'arrière du projectile.

Estienne (*J.-E.*). — Étude sur les erreurs d'observation. (235-259, 8 fig.).

Le présent Mémoire a pour objet de prouver que la meilleure valeur à adopter, comme mesure d'une quantité dont l'expérience a fourni des valeurs entachées d'erreurs accidentelles est, *dans tous les cas*, la valeur *médiane*, fournie par la règle suivante :

On range par ordre de grandeur les valeurs obtenues; quand leur nombre est impair, celle du milieu est la valeur médiane; quand leur nombre est pair, on a pour valeur médiane les deux du milieu et toute valeur intermédiaire.

I. Démonstration de la règle. II. La règle de la valeur médiane est indépendante de la loi des erreurs appliquée à l'exclusion de toute autre règle, quelle que soit cette loi. III. Conséquences de la règle de la valeur médiane.

L'auteur ne s'est pas proposé de faire des applications de sa théorie, mais il termine en établissant que son adoption permettra d'abréger la durée du Concours de tir.

Lombard (*E.*). — Quelques questions de tir indirect de siège. (325-356, 411-427, 21 fig., 3 tabl.).

Applications des principes élémentaires des probabilités aux méthodes à suivre pour le réglage du tir.

Tome XXXVII; octobre 1890-mars 1891.

Vaucheret (*V.*). — Régime des bouches à feu. (363-376, 1 fig.).

Les Tables de tir se rapportent à certaines conditions moyennes qui sont loin d'être réalisées dans tous les cas où l'on est appelé à en faire usage.

Les divergences portent à la fois sur la forme de la trajectoire moyenne et sur la grandeur des déviations qui caractérisent le groupement des trajectoires particulières autour de la trajectoire moyenne.

Leur ensemble constitue ce qu'on appelle *le régime de la bouche à feu.*

L'auteur examine ce qui a trait à la trajectoire moyenne et il étudie particulièrement le régime en portée.

Hartmann (*G.-H.-C.*). — Expériences de photographie balistique. Applications à l'étude des variations de la vitesse du son. (62-81, 397-421, 493-508, 18 fig., 2 pl., 6 tabl.).

Les premières expériences de photographie des projectiles d'artillerie ont été faites en 1887 et en 1888, à Pola et à Meppen, par MM. Mach et Salcher. Leurs résultats, présentés à l'Académie des Sciences de Vienne, se trouvent décrits dans ce Mémoire, qui se termine par un exposé des différentes théories qui ont été successivement émises pour expliquer le fait, bien reconnu, de la variation de vitesse du son dans le tir.

Vallier (*E.*). — Note complémentaire sur les méthodes actuelles de balistique. (273-276).

Dans le Travail précédemment publié, l'auteur avait indiqué des formules pour déterminer les éléments du point de chute d'une trajectoire uniquement à l'aide des vitesses calculées en divers points.

Cette Notice additionnelle a pour objet de faire connaître différentes améliorations à la méthode des vitesses.

Tome XXXVIII, avril-septembre 1891.

Zaboudski. — Supplément à la solution des problèmes du tir courbe. (45-56, 13 tabl.).

Pour permettre de résoudre les problèmes du tir dans le cas des grandes vitesses initiales, l'auteur a prolongé ses Tables balistiques jusqu'à une valeur de l'argument $\frac{V}{k}$ égale à 2,5.

Genay (*L.*). — Notes sur la navigation. (401-428, 27 fig.).

Ce Travail a pour but l'étude des lois de la traversée d'un cours d'eau, en supposant qu'un batelier partant d'un point d'une rive dirige sa nacelle 1° en

cherchant à dériver le moins possible sans s'occuper du point où il abordera; 2° en manœuvrant pour aborder à un point de la rive opposée dans le moins de temps possible.

Tome XXXIX, octobre 1891-mars 1892.

Ce Volume ne renferme pas de Mémoires sur des applications des Sciences mathématiques.

Tome XL; avril-septembre 1892.

Vallier (*E.*). — Sur les conditions de stabilité des projectiles oblongs. (5-28, 101-111, 1 fig.).

La détermination de la dérivation considérée en elle-même est plutôt une satisfaction analytique qu'elle ne constitue un résultat bien utile, puisqu'une légère correction de pointage faite à l'aide de la planchette des dérives annule son influence, et que l'on en demande toujours la valeur à l'expérience. Ce qui est plus utile à analyser, c'est la question de la tenue du projectile, car cette tenue peut faire varier très notablement la valeur de la résistance de l'air, et entraîner les pertes de portée ou de vitesses.

Dans une serie de recherches basées sur les travaux d'Athanase Dupré, l'auteur a obtenu une solution rationnelle de la question.

Mais, si ces diverses études ont pu rendre compte de divers résultats balistiques, le mode d'évaluation des actions gazeuses, à l'aide d'une formule exponentielle, rendait impraticable l'examen plus approfondi des conditions du mouvement lorsque le projectile oblong ne restait pas couché sur la trajectoire.

M. de Sparre a repris récemment cette théorie, et moyennant une certaine simplification, il a pu calculer les diverses composantes de l'action de l'air sur un projectile, lorsque ce dernier fait avec la tangente un angle δ assez petit pour que les termes en δ^2 soient négligeables.

L'auteur utilise ces données et ces résultats et il se propose de pousser plus loin l'approximation dans l'étude des oscillations du projectile pendant le parcours d'un arc déterminé.

Gentil. — Niveau conchylioïde. (220-253, 23 fig.).

Étude d'un dispositif de niveau de pointage basé sur l'emploi et sur les propriétés de la courbe représentée par les équations

$$x\cos n\omega + y\sin n\omega = a\sin\omega,$$
$$ny\cos n\omega - nx\sin n\omega = a\cos\omega.$$

Cette courbe est telle que, si on la fait tourner uniformément autour d'un point donné, la tangente qu'on peut lui mener d'un point C, également donné, tourne autour de C d'un mouvement exactement proportionnel.

Uchard (*A.*). — Remarques sur les lois de la résistance de l'air. (309-331, 405-419, 14 fig.).

La loi de la résistance de l'air est bien représentée par des vitesses comprises entre zéro et 600 mètres par la formule empirique de M. Hélie, et l'on peut admettre que cette résistance est proportionnelle :

1° Au carré de la vitesse du projectile; 2° à la densité de l'air; cette densité étant elle-même une fonction de la vitesse qui augmente depuis zéro jusqu'à une valeur limite, de telle sorte que pour une vitesse infiniment petite ou très grande, la densité de l'air devenant constante, on a la loi du carré.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude spéciale de la formule susmentionnée et à l'influence de la vitesse initiale d'un corps sur sa chute dans l'air.

Longridge (*J.-A.*). — L'artillerie de l'avenir et les nouvelles poudres. (352-368, 440-465, 5 fig., 4 tabl.).

Traduction, par M. G. Moch, d'une brochure publiée par M. Longridge, dans laquelle est étudiée l'application des nouvelles poudres aux canons à grande puissance.

Tome XLI; octobre 1892-mars 1893.

Longridge (*J.-A.*). — L'artillerie de l'avenir et les nouvelles poudres. (48-65, 136-156, 4 fig., 6 tabl.).

Fin du Mémoire commencé au tome XL.

Vallier (*E.*). — Méthodes et formules de balistique expérimentale. (230-250, 401-430, 512-552, 12 tabl.).

L'auteur s'est proposé de réunir dans le présent Travail les méthodes, formules et Tables numériques qui lui ont semblé se prêter le mieux à la solution des divers problèmes d'artillerie.

La plupart de ces règles ou formules sont données sans démonstration, en raison de leur notoriété, ou discutées dans des Notes spéciales annexées au Travail.

La première Partie, seule insérée dans ce Volume, est consacrée à la balistique extérieure et aux effets des projectiles.

Principales subdivisions. — I. Loi admise pour la résistance de l'air. — II. Mouvement rectiligne. — III. Solution des problèmes du tir (9 problèmes traités). — *Note A.* — Sur la solution du problème balistique. — IV. Solution pratique des problèmes du tir à l'aide des fonctions secondaires (11 problèmes traités). — *Note B.* — Emploi des Tables Zaboudski.

Soreau (*R.*). — Note sur la détermination en grandeur et en position de la flèche des trajectoires (469-473, 2 tabl.).

Cette question trouve une intéressante application notamment dans le tir d'artillerie contre les ballons.

Tome XLII; avril-septembre 1893.

Vallier (*E.*). — Méthodes et formules de balistique expérimentale. (68-98, 186-219, 462-483, 635-650, 1 fig., 57 tabl.).

Suite du Travail paru au tome XLI.

Principales subdivisions. — IV (suite). Tables des fonctions balistiques secondaires.—V. Tir courbe (7 problèmes traités). — VI. Méthode expérimentales. *Note C.* — Sur la détermination des fonctions expérimentales entre des limites données. — *Note D.* — Sur l'emploi des interrupteurs acoustiques.

Laurent (*P.*). — Nouvelle Table balistique. (301-320, 12 tabl.).

On a parfois, dans l'étude d'un avant-projet de bouche à feu et d'affût, à résoudre le problème que voici : « Étant donnés la vitesse initiale et l'angle de tir, trouver la portée ». Les Tables balistiques de Siacci permettent de résoudre ce problème, mais pas d'une façon directe. Il y en a aussi de M. Braccialini, mais qui s'appliquent seulement aux vitesses initiales comprises entre 150 et 650 mètres. Mais aujourd'hui, les vitesses de 810 à 850 mètres sont normalement atteintes, et celle de 1000 mètres a même été dépassée. L'auteur a donc jugé nécessaire de donner une plus grande extension à la Table, et il a pris comme limites 150 et 1100 mètres. Ces Tables, ainsi que celles de Siacci, ont l'inconvénient d'exiger encore une double interpolation.

Tome XLIII; octobre 1893-mars 1894.

Vallier (*E.*). — Méthodes et formules de balistique expérimentale. (128-153, 241-268, 297-309, 467-474).

Suite du Travail inséré aux tomes XL et XLI.

Principales subdivisions. — VII. Établissement des Tables de tir. — *Note E.* — Sur le choix d'une clef pour l'établissement des Tables de tir. — VIII. Formulaire de balistique intérieure. — IX. Effets des projectiles. *Note F.* — De l'attaque des cuirassés par l'artillerie. — Rectifications et errata.

Tome XLIV; avril-septembre 1894.

Filloux (*L.*). — Étude géométrique du frettage en fils d'acier. (105-117, 11 fig.).

Étude graphique de la résistance d'un tube ordinaire fretté par un tube théorique, ce dernier étant ainsi défini :

Système composé de frettes infiniment minces emboîtées les unes sur les autres avec des serrages tels que, pour une pression interne donnée, toutes les frettes aient des tensions égales entre elles, dont la valeur commune soit la charge de sécurité du métal.

Laurent (*P.*). — De l'influence de l'inclinaison des filets de la vis de culasse sur la résistance de l'écrou. (412-428, 493-513, 5 fig.).

Première Partie. — I. Valeurs des composantes des forces élastiques. — II. Variations des composantes élastiques. — III. Forces élastiques principales.

Tome XLV; octobre 1894-mars 1895.

Laurent (*P.*). — De l'influence de l'inclinaison des filets de la vis de culasse sur la résistance de l'écrou. (60-83, 135-158, 374-389, 15 fig.).

Suite du Travail inséré au tome XLIV.

Deuxième Partie. — I. Valeurs des forces élastiques. — II. Variations des composantes des forces élastiques. — III. Comparaison des composantes des forces élastiques dans le cas de la bague frettée et de la bague non frettée. — IV. Résumé des formules. — V. Forces élastiques principales. — VI. Résumé. — VII. Variations des forces élastiques avec le coefficient de frottement. — VIII. Module de sécurité à adopter.

Hartmann (*L.*). — Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. (97-118, 225-248, 336-353, 429-452, 554-573, 91 fig., 4 pl.).

L'étude de la distribution du travail élastique dans les corps solides a été jusqu'ici exclusivement réservée à l'Analyse mathématique. Le présent Mémoire est purement descriptif, mais il renferme l'indication des résultats d'un très grand nombre d'expériences sur la déformation des métaux. Ces expériences ont révélé la production de réseaux de lignes géométriques dont le tracé a été rendu visible sur la surface, préalablement polie, des métaux.

Principales subdivisions du Mémoire. — I. Déformations produites par la traction des métaux. Lames minces. Prismes. Cylindres. — II. Déformations produites par la compression des métaux. Solides comprimés entre leurs bases. Plaques minces. Prismes. Cylindres. Sphères. Solides comprimés entre des portions égales de leurs bases. Appuis traversant partiellement les bases. Appuis intérieurs aux bases. Plaques minces. Cylindres. Prismes. Solides comprimés entre l'une de leurs bases et une portion de l'autre base. Solides comprimés entre des portions inégales de leurs bases. Déformations résultant de la compression par choc. Déformations produites par la compression des métaux à haute température. Systèmes de cassures dans les corps plastiques. Déformations intérieures des corps comprimés. Preuves expérimentales de l'obliquité et de la discontinuité des déformations intérieures. Succession et développement des déformations de compression. Lois relatives à la compression des corps solides. — III. Déformations produites par la flexion des métaux. Flexions symétriques. Barreau reposant sur deux appuis et soumis à l'action d'une force isolée.

Zaboudski. — Valeur de la résistance de l'air dans le cas de grandes vitesses initiales. (119-128, 1 tabl.).

Traduction d'une Note sur les diverses formules adoptées pour la représentation de la loi de la résistance de l'air, suivant la vitesse initiale du projectile.

Chapel. — Note sur la loi de la résistance de l'air. (129-134, 453-459, 574-587, 4 fig., 1 tabl.).

S'il est une loi physique faite pour déconcerter l'expérimentateur et pour le mettre en garde contre les dangers de l'extrapolation, c'est à coup sûr celle de la résistance de l'air au mouvement des projectiles.

Tout a été surprise dans la recherche de cette loi et, à chaque extension nouvelle donnée aux limites de l'expérience, on s'est trouvé en face de résultats inattendus, se refusant invariablement à entrer dans les formules qui avaient été déduites des recherches précédentes et que l'on tendait à considérer comme l'expression définitive de la loi.

Actuellement, la formule proposée, d'après les derniers résultats de l'expérience, serait très voisine de la suivante :

$$R = V^2\left[0.267 + 0.123 \sin 17 (V - 340)^{\frac{1}{3}}\right].$$

L'auteur de cette Note a préconisé aussi la formule plus simple

$$R = V^2\left[a + \frac{2bK(V-u)}{1+K^2(V-u)^2}\right],$$

u désignant la vitesse normale du son dans l'air, ou 340 mètres.

La conclusion de ce Travail est ici exprimée sous une forme assez intéressante : « Les Tables de tir existantes, dans les limites de vitesses qu'elles comportent, renferment les Tables de tir de tous les canons passés, présents et à venir, résultat qui ne saurait surprendre, puisque chacune de ces Tables contient implicitement la loi de résistance ».

H. B.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ [1]. — 3e série.

Tome XIII, 1894.

Lévy (*Lucien*). — [C1c] [2] Conférence faite aux élèves de

---

[1] Voir *Bulletin*, XIX$_2$, p. 117.

[2] Les indications entre crochets sont celles de l'*Index du répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

l'École Polytechnique (Cours de M. Jordan); sur les *changements de variables*. (5-22).

Ce développement repose principalement sur le théorème ci-après : « Si par un procédé quelconque on a trouvé entre les différentielles premières et secondes une identité de la forme

$$d^2u = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 + D\,d^2x + E\,d^2y,$$

on a

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad E = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'auteur en fait application à divers exemples d'intégrations. Il étudie ensuite la transformation de Legendre, les transformations de contact, et comme application, la transformation d'Ampère.

Audibert. — [D3*g*] Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1893); solution de la question d'Analyse. (22-27).

Intégrale d'une fonction de variable imaginaire. Emploi de la théorie des lacets.

Blazeievski (R.). — [K16*a*] Sur un problème de Géométrie plane. (28-40).

Relations entre les distances d'un point du plan aux sommets d'un triangle; théorèmes sur les bissectrices; étude du problème de la détermination d'un triangle, connaissant les longueurs de ses bissectrices. Une Note finale contient quelques éclaircissements et développements de calcul.

Appell (P.). — [K6*a*] Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle. (41-43).

Recherche des conditions qui doivent exister entre les neuf cosinus des angles que fait un système de trois axes avec un autre, pour que les deux systèmes forment des trièdres trirectangles, ou pour que l'un d'eux forme un trièdre trirectangle.

Audibert. — [$M^3 5 h\alpha$] Concours pour les bourses de licence en 1893. (44-47).

Sur les éléments d'une courbe gauche unicursale.

Auric. — [H5α] Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. (47-52).

Rectification de la solution classique ordinaire, qui donne prise à des objections, et qui, d'après l'auteur, est plutôt symbolique que pratique.

Andoyer. — [R7*a*] Sur la dynamique du point. (52-65).

Un point étant soumis à une force dérivant d'un potentiel U, l'auteur imagine qu'on oblige le même point à décrire la même trajectoire sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel U′, fonction de U. Il déduit de là des équations qui peuvent servir très souvent à ramener l'étude du mouvement d'un point sur une courbe fixe à celle du mouvement d'un point libre, et il en donne divers exemples.

Laffite (*Pierre*). — [V9] Auguste Comte examinateur d'admission à l'École Polytechnique. (65-80, 113-120, 405-428, 462-482).

Notice historique des plus intéressantes sur les conditions dans lesquelles le célèbre fondateur de la Philosophie positive fut nommé examinateur (1837), fonction qu'il remplit pendant sept années. Indications sur la manière dont Auguste Comte avait organisé son système d'examens. Il y a là un véritable modèle à suivre, au point de vue de la conscience aussi bien que de la raison. Mais ce qui fait assurément le plus grand attrait de cette Notice, ce sont les nombreuses notes d'examens de Comte lui-même, indiquant à la fois les questions posées, et ses appréciations raisonnées sur les réponses à lui faites par les candidats.

On doit regretter, avec M. Laffite, que les questions posées par des examinateurs tels que Poinsot et Ampère, par exemple, n'aient pas été également conservées, et féliciter les *Nouvelles Annales* d'avoir donné bon accueil à d'aussi précieux documents.

Amigues (*E*.). — [L^1 17*a*] Intersection de deux coniques. (81-91).

Méthode absolument algébrique; l'article est divisé comme il suit : Solutions, discussion générale, discussion complémentaire dans le cas où les deux équations données sont à coefficients réels.

Cazamian (*A*.). — [L^1 2*b*] Sur le problème du Concours général de 1893. (92-97).

Propriétés d'une conique et d'un triangle conjugué.

Tissot (*A*.). — [L^1 7*a*] Formules relatives aux foyers des coniques (97-98).

Expressions des coordonnées des foyers et de l'équation de chaque directrice.

Barbarin (*P*.). — [L^2 2*d*] Sur l'enveloppe d'un plan. (99-100).

Il s'agit du plan qui découpe dans un cône du deuxième degré un volume limité de grandeur constante.

Réveille (*J.*). — [L^1 18 $d\beta$] Note sur une propriété de l'hyperbole équilatère. (100-102).

Sur le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Cesàro (*E.*). — [$M^1 e$] Sur une Note de Géométrie infinitésimale. (102-106).

Remarques sur les *spirales sinusoïdes*, signalées par plusieurs auteurs. M. Cesàro en donne l'équation intrinsèque, et aussi celle de leurs développées, et il indique plusieurs propriétés que présentent ces courbes.

Correspondance. — M. Cesàro : Extrait d'une Lettre à M. Rouché, concernant des observations de M. Bioche relatives à l'étude intrinsèque des surfaces réglées. (106-107).

Pellet (*A.-E.*). — [A3 $i\beta$] Sur les équations réciproques et les équations du quatrième degré. (108-112).

Remarques sur les équations réciproques, permettant de ramener une équation du quatrième degré à être paire, ou réciproque, par une substitution linéaire. Application à des transformations d'intégrales.

Sondat (*P.*). — [L^1 1 c] Corrélation entre les hexagones de Pascal et de Brianchon. (121-126).

Considérations sur les points de Steiner, de Kirkman et de Brianchon, au moyen d'une figure dénommée par l'auteur *sexlatère*.

Jaggi (*E.*). — [A3 b] Sur la résolution algébrique des équations. (126-138).

En supposant que les coefficients d'une équation puissent acquérir des valeurs différentes, l'auteur cherche une formule unique pour les n racines, formule qui devra, par certains changements dans les quantités qui y entrent, donner successivement chacune de ces racines. Il applique ensuite sa méthode aux équations des 2e, 3e et 4e degrés.

E. G. — [M^2 3 d] Sur les droites qu'on peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre. (138-144).

Génération d'une surface de 3e classe par les plans passant par les points homologues de trois divisions homographiques. Classification des 27 droites qui peuvent être placées sur une telle surface. Passage aux surfaces du 3e ordre au moyen de la transformation par polaires réciproques.

Bienaymé (*A.*). — [M^1 5 a] Sur une génération des courbes

planes unicursales du troisième et du quatrième ordre. (144-155).

Application des divisions homographiques; transformation d'une proposition de Chasles; propriétés nouvelles, entraînant une nouvelle description des courbes unicursales du 3e ordre; exemples; description d'une conique; courbes du 4e ordre.

Lemoine (*E.*). — [K21 *a* 5] Considérations sur la Géométrographie. (155-160).

Examen de quelques critiques, accompagné d'éclaircissements et d'exemples destinés à faire complètement comprendre l'esprit de la méthode.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1893. — Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Première Sciences (enseignement moderne), Rhétorique, Seconde classique, Seconde moderne, Troisième classique, Troisième moderne : Énoncés des compositions. (160-167).

Worontzoff. — [D1 *b*] Sur le développement en séries des fonctions implicites. (167-184).

Cet article, très condensé, se compose presque exclusivement de développements de calcul se refusant par leur nature même à toute analyse.

Astor (*A.*). — [M^{1}5*a*] Sur quelques propriétés des cubiques unicursales. (184-198).

Démonstration, par voie élémentaire, de cette propriété qu'une cubique unicursale a trois points d'inflexion réels ou un seul, suivant que le point double est isolé ou non. Quelques propositions nouvelles sur les tangentes menées à la courbe par l'un de ses points.

D'Ocagne (*M.*). — [E5] Calcul d'une intégrale définie. (198-202).

Le problème dont il s'agit et qui a une grande importance dans certaines questions de probabilités consiste dans la détermination de l'intégrale double de $-\infty$ à $+\infty$ de la différentielle $e^{\varphi(u_1, u_2)}\, du_1\, du_2$ répondant aux systèmes de valeurs de u_1, u_2 tels que $u_1 + u_2 = t$; $\varphi(u_1, u_2)$ représente une fonction du 2e degré à deux variables. L'intégrale en question peut s'écrire sous la forme $f(t)\, dt$, et l'auteur détermine la fonction f.

Appell (*P.*). — [P2*a*] Courbes autopolaires. (206-210).

Une conique Σ est autopolaire par rapport à une conique S quand elle coïncide avec sa polaire réciproque par rapport à S. L'auteur donne l'équation gé-

nérale des coniques autopolaires par rapport à une conique déterminée, puis étend la notion dont il s'agit aux courbes quelconques et même à l'espace.

Hioux (*V.*) — [P2*a*] Sur les quadriques autopolaires. (211-215).

Extension aux quadriques de certains des résultats de M. Appell contenus dans l'article précédent.

Auric. — [K10*e*] Note sur le problème du billard circulaire. (215-218).

Connaissant une circonférence O et deux points A et B, il s'agit de trouver sur la circonférence un point M tel que $\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$.

Cazamian (*A.*). — [$L^1$17*e*] Sur quelques théorèmes de la Géométrie des coniques. (218-230).

Conséquences obtenues par une série de transformations, du théorème suivant : « L'enveloppe d'une droite coupant harmoniquement deux cercles est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles ». Les propositions qu'en déduit l'auteur sont nombreuses et intéressantes; nous nous contenterons de citer la dernière : « Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par l'orthocentre du triangle ».

Saint-Germain (*A. de*). — [R9*a*] Problème sur le frottement. (230-235).

Il s'agit du système formé par un disque circulaire pesant et une barre homogène pesante s'appuyant sur ce disque par une extrémité dans un plan vertical.

Genty. — [$L^2$10*e*] Solution, par la Géométrie vectorielle, de la question proposée au Concours général de 1892 pour la classe de Mathématiques spéciales. (235-242).

Propriété d'une quadrique circonscrite à un ellipsoïde. Les notations de la Géométrie vectorielle permettent à M. Genty d'obtenir simplement la solution et d'établir incidemment plusieurs autres propositions.

Tarry (*G.*). — [P1*e*] Théorème. (242-243).

Propriétés des figures *affines* (figures homographiques dans lesquelles les droites à l'infini se correspondent).

Valdès (*E.*). — [$M^1$5*c*α] Sur la strophoïde. (243-263).

Réunion de nombreuses propriétés de cette courbe; étude des points remarquables. On remarquera notamment les propositions sur les cercles tangents

et les cercles osculateurs, et aussi les diverses générations de la strophoïde examinées par l'auteur à la fin de l'article.

Cazamian (*A*.). — [M¹5cα] Note sur la strophoïde. (263-265).

Conséquence de ce fait que la courbe reste semblable à elle-même dans un mode particulier de projection.

Cazamian (*A*.). — [L¹11] Sur l'hyperbole équilatère et sur ses inverses. (265-280).

L'auteur établit les propriétés de la strophoïde et de la lemniscate, en les regardant comme transformées par inversion de l'hyperbole équilatère. Il donne aussi plusieurs propriétés de l'hyperbole, et étend plusieurs propositions à toutes les cubiques unicursales dont les tangentes au point double sont rectangulaires.

Cazamian (*A*.). — [L¹10b] Sur quelques propriétés de la parabole et de ses inverses. (281-283).

Propriétés qui sont surtout relatives aux cercles osculateurs à la parabole et à la cissoïde.

Dariès (*G*.). — [O2k] Sur la détermination des trajectoires orthogonales de quelques familles de courbes planes dont l'équation est donnée en coordonnées bi-polaires. (283-292).

Propriétés simplement établies, permettant d'obtenir les trajectoires orthogonales en coordonnées bi-angulaires. Applications à plusieurs exemples, dont quelques-uns ont été proposés à la Licence et se rapportent, soit à des propriétés purement géométriques, soit à des questions de Mécanique.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1894. — Énoncés des compositions. (296-298).

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1894. — Énoncés des compositions. (299-300).

Cazamian (*A*.). — [M¹5a] Application de la méthode de transformation par polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales. (300-308).

Après quelques remarques d'ordre général sur les cubiques unicursales, l'auteur établit un Tableau intéressant donnant, en regard de théorèmes connus sur les cubiques cuspidales, les propositions corrélatives correspondantes.

Cazamian (*A*.). — [L¹10d] Solution géométrique de la compo-

sition de Mathématiques du Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1887. (308-316).

Sur une famille de paraboles tangentes à deux axes rectangulaires.

Cazamian (*A*.). — [$L^1 10d$] Propriétés de la parabole et solution géométrique du Concours d'admission à l'École navale en 1893. (316-322).

Propriétés d'une parabole et d'un hyperbole équilatère.

Cazamian (*A*.). — [$L^1 1d$] Remarques sur le théorème de Frégier. (322-324).

L'auteur constate que le théorème de Frégier n'est autre que la transformée par polaires réciproques de cette propriété de la parabole : le lieu des sommets des angles droits circonscrits est la directrice.

Cazamian (*A*.). — [$L^1 2b$] Sur un théorème de M. Faure. (324-348).

Extension d'un théorème de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique. Démonstration d'une autre proposition, intimement liée à la première. Diverses formes des énoncés, et nombreuses conséquences, relatives aux faisceaux de coniques, à des triangles conjugués particuliers, à la transformation par dualité des énoncés primitifs. Démonstration géométrique du premier théorème.

Postnicoff (*M*.). — [$M^1 6l$] Recherches sur les courbes planes du quatrième ordre. (348-377).

Après avoir établi un théorème préliminaire d'Algèbre, relatif à des équations linéaires à deux variables, l'auteur étudie l'équation générale du 4ᵉ degré, examine la recherche du centre, en supposant les axes rectangulaires, et arrive par des calculs un peu longs, mais au fond assez simples, à une discussion et à un essai de classification des courbes du 4ᵉ ordre. Il y a lieu de signaler dans cet article quelques défauts de rédaction, au point de vue de la forme; défauts bien excusables sous la plume d'un étranger, mais qu'il eût été désirable de faire disparaître au moment de l'impression.

Cazamian (*A*.). — [$L^2 14b$] Théorème sur les quadriques. (378-380).

Cette Note forme une suite à l'article *Sur un théorème de M. Faure* (*voir* plus haut).

Correspondance. — M. A. Cazamian (Extrait d'une Lettre à M. Brisse) : à propos d'une Note de M. Astor et de propriétés du trèfle équilatéral. (384-386).

Cazamian (*A.*). — [L^1 16 *b*] Sur les points d'une conique situés sur un même cercle. (386-394).

Conséquences de la relation $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2m\pi$ entre les anomalies excentriques de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle.

Cazamian (*A.*). — [L_2 17 *g*] Sur les quadriques inscrites dans la même développable. (395-399).

Extension à l'espace du théorème de Desargues; transformation par dualité; conséquences et applications.

Genty (*L.*). — [L^2 14] Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'Agrégation en 1893. (399-404).

Questions relatives à un hyperboloïde à une nappe, et au cône, enveloppe des plans normaux aux génératrices menés par un point donné.

Carvallo (*E.*). — [O 4 *b*] Observations sur les examens d'admission à l'École Polytechnique. (429-434).

Ces observations portent sur la recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Critique de presque toutes les démonstrations géométriques données.

Bourlet (*C.*). — [L^2 17 *a*] Conditions pour que deux quadriques aient une génératrice commune. (434-442).

La condition est que le premier membre de l'équation en λ relative aux deux surfaces soit carré parfait. Démonstration directe de cette proposition.

Astor (*A.*). — [R 8 *c* α] Note de Mécanique. (442-461).

Mouvement d'un solide pesant, homogène et de révolution, fixé par un point de son axe, et assujetti à s'appuyer sur un cercle fixe dont l'axe passe par le point de suspension. Cette étude est faite successivement, en négligeant les résistances passives, puis en tenant compte du frottement dans de certaines conditions hypothétiques déterminées.

Leinekugel (*G.*). — [L^1 20 *c* α] Note de Géométrie. Sur une parabole intimement liée à une conique donnée et à un point donné de son plan. (482-488).

Examen de propriétés d'une parabole rencontrée et étudiée incidemment par l'auteur en traitant, à un point de vue purement géométrique, la question du concours général de l'année 1889 (voir *Nouv. Ann.*, 3[e] série, t. VIII).

Ilott (*S.*). — [K 11 *e*] Sur un problème proposé par M. E. Amigues. (488-490).

Sur une suite de cercles inscrits successivement dans des triangles curvilignes. Expression des rayons; somme des aires.

Audibert. — [K 16 *f*] Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1894. (491-493).

Un ancien Élève de Mathématiques spéciales. — [K 16 *f*] Solution géométrique de la même question. (493-498).

Questions relatives à l'hyperboloïde engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires passant par deux droites fixes.

Caffin (G.). — [L^1 18 *d*] Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1894. (498-501).

Propriétés d'une famille de coniques.

Correspondance. — M. M. d'Ocagne (Extrait d'une Lettre) : Nouvelle forme de deux théorèmes de l'auteur, sur la détermination de la normale aux courbes planes. — M. C. Possé (Extrait d'une Lettre à M. Brisse) : Communication d'une Note de feu M. C. Harkema, et relative à l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

(501-503).

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1894). — Énoncés des compositions. (503-507).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1894 (Première et seconde sessions). — Énoncés des compositions. (507-514).

Exercices.

Questions proposées : 1658 à 1684. (1*-5*).

Barisien (E.-N.). — Solution de la question 1547. (6*-8*).

Propriété de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

Barisien (E.-N.). — Solution de la question 1555. (8*-10*).

Propriété d'une strophoïde droite.

Bosi (L.). — Solution de la question 1574. (10*-13*).

Lieu relatif aux quatre normales et aux deux tangentes menées d'un point à une ellipse.

Audibert. — Solution de la question 1597. (13*-15*).

Question de probabilité, relative à un jeu équitable mathématiquement.

Destoux (*J.*). — Solution de la question 1636. (15*-16*).

Propriété de deux cubiques.

Audibert. — Solution de la question 1651. (16*-18*).

Problème concernant les permutations.

Brocard. — Solution de la question 1550. (18*-19*).

Lieu relatif à un cercle et une droite.

Brocard. — Solution de la question 1654. (19*-20*).

Lez (*H.*). — Solution de la même question. (20*-23*).

Droz-Farny (*A.*). — Solution géométrique de la même question. (23*).

Propriété du triangle équilatéral.

Moret-Blanc. — Solution de la question 353. (24*).

Propriété d'un quadrilatère coupé par une transversale.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 372. (24*-25*).

Lieux relatifs à un triangle ayant pour sommets deux foyers d'une conique, son troisième sommet sur la conique.

Moret-Blanc. — Solution de la question 14. (25*-27*).

Rapport des sphères circonscrite et inscrite à un tétraèdre. Minimum.

Moret-Blanc. — Solution de la question 22. (27*-28*).

Sur les polynomes de Sturm.

Moret-Blanc. — Solution de la question 51. (28*-30*).

Problème relatif à un quadrillage.

Moret-Blanc. — Solution de la question 54. (30*-32*).

Surface algébrique sur laquelle on ne peut tracer qu'une circonférence.

Moret-Blanc. — Solution de la question 59. (32*).

Aire minimum des prismes de même base et de même hauteur.

Brocard (*H.*). — Solution des questions 473 et 482. (33*-36*).

Moret-Blanc. — Solution des mêmes questions. (36*-37*).

Hyperboloïde sur les quatre hauteurs d'un tétraèdre; construction; propriétés.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 132. (37*-38*).

Cylindre de révolution passant par cinq points donnés.

Moret-Blanc. — Solution de la question 86. (38*-41*).

Ellipse inscrite dans un triangle.

Moret-Blanc. — Solution de la question 157. (41*-42*).

Propriété d'un système de trois forces.

Moret-Blanc. — Solution de la question 174. (42*).

Racines d'une équation, entre deux limites données.

Moret-Blanc. — Solution de la question 245. (42*-43).

Sur le nombre des valeurs que peut prendre $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 475. (43*-44*).

Construire une conique connaissant trois tangentes et une directrice.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 536. (44*-45*).

Construction d'un vase cylindrique droit; question de minimum.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 541. (45*-49*).

Triangle équilatéral, maximum ou minimum, circonscrit à une ellipse.

Callandreau (*O.*). — Solution de la question 936. (49*-52*).

Propriétés d'un polynome provenant de la série $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots$.

Moret-Blanc. — Solutions des questions 992 et 993. (52*-54*).

Propriétés d'une courbe du troisième ordre et de la troisième classe.

Franel (*J.*). — Solution de la question 305. (54*-58*).

Sur un système de sept points sur une droite et de sept plans dans l'espace.

Brocard. — Solution de la question 539. (58*-59*).

Courbe représentant les trois folioles du *trifolium pratense*

QUESTION PROPOSÉE : 1685.

A. L.

RENDICONTO DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE (SEZIONE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI); in-4°; Napoli, tipografia della R. Acc. delle Sc. fis. e mat., diretta da M. de Rubertis.

2e Série, t. IV (année XXIX, 1890) (1).

Angelitti (*F.*). — Sur une modification de la méthode appelée *de Talcott*, pour déterminer la latitude géographique. (50-56).

Reina (*V.*). — Sur la théorie des normales à une surface. (75-78).

Théorèmes de Géométrie différentielle.

Torelli (*G.*). — Sur certaines équations aux dérivées partielles. (123-128).

M. Beltrami [*Sulla funzione potenziale della circonferenza* (*Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo,* t. III, p. 193)] a montré que l'intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 \sin^2\theta + \rho'^2 \cos^2\theta}},$$

et celle de deuxième espèce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta + \rho'^2 \cos^2\theta},$$

satisfont toutes deux à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial\rho'}\right] + \frac{\partial}{\partial\rho'}\left[(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial\rho}\right] = 0,$$

---

(1) Voir *Bulletin*, XIX_2, p. 254.

et la première intégrale satisfait aussi à l'équation trouvée par Borchardt (*Crelle*, Bd. LVIII, p. 134) pour l'inverse de la moyenne arithmético-géométrique. L'auteur indique la source de ces propriétés en considérant une intégrale qui contient comme cas particuliers les deux intégrales mentionnées.

Contarino (*F.*). — Sur la constante de la collimation du cercle méridien Reichenbach-Heurtaux de l'observatoire royal de Capodimonte (147-154).

Pirondini (*G.*). — Sur une transformation géométrique particulière (155-164).

Mollame (*V.*). — Sur le *casus irreductibilis* de l'équation cubique. (167-171).

Torelli (*G.*). — Sur une formule, donnée par Halphen, relative aux transformations des équations différentielles linéaires. (233-238).

Démonstration d'une formule de Halphen [*Sur la réduction des équations différentielles, etc.* (*Mémoires présentés à l'Académie, etc.*; 2e série, t. XXVIII, p. 117)]. L'auteur indique aussi comment doit être modifiée la loi de formation de certains coefficients numériques.

Torelli (*G.*). — Extension d'un théorème de Riemann, relatif au quotient des intégrales elliptiques complètes de première espèce. (238-244, 1 pl.).

Le coefficient de i dans la partie imaginaire de ce quotient est toujours positif. L'auteur donne l'extension de ce théorème au cas où au lieu du quotient $\frac{iK'}{K}$ on considère le quotient $\frac{iX'}{X}$, étant

$$X = \int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}\,dz,$$

$$X' = \int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}[1-(1-x)z]^{-\alpha}\,dz.$$

Capelli (*A.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables. (297-303).

Deux fonctions rationnelles $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant données, la condition nécessaire et suffisante pour que f puisse s'exprimer rationnellement au moyen de φ, et des fonctions symétriques élémentaires des n variables est que les substitutions entre les x_i, qui ne changent pas la fonction φ, ne changent pas aussi f. L'auteur étend ce critérium au cas où la fonction φ, ou bien les deux fonctions f et φ à la fois, sont des fonctions algébriques quelconques.

T. V; (année XXX, 1891).

Marcolongo (*R.*). — Sur la déformation d'un corps élastique isotrope indéfini, limité par un plan indéfini, pour des conditions spéciales aux limites. (25-32).

L'auteur étend les résultats que Boussinesq et Cerruti ont obtenus pour le cas où l'on connaît à la surface la composante normale de la force et les composantes tangentielles des déplacements, ou réciproquement. L'auteur suppose le corps soumis à des forces données en chaque élément, et applique la méthode d'intégration de M. Cerruti.

Marcolongo (*R.*). — Observations sur la Note : *Sur les lignes géodésiques tracées sur les quadriques non douées de centre.* (32-33).

C'est une Note que l'auteur a publiée dans les *Rendiconti dei Lincei*, mai 1890. Ici il reprend l'intégration de l'équation des géodésiques sur le paraboloïde elliptique, en substituant aux fonctions Θ les fonctions $\wp$ et σ de Weierstrass.

Berzolari (*L.*). — Sur la théorie de l'involution, en particulier de l'involution cubique. (35-40).

Une involution linéaire cubique

$$f + \lambda\varphi = 0$$

a quatre éléments doubles, donnés par le jacobien des deux formes f et φ. Réciproquement une forme biquadratique peut être envisagée comme le jacobien de *deux* faisceaux de formes cubiques et ces deux faisceaux, ainsi que les involutions déterminées par ceux-ci, sont appelés *conjugués*. L'auteur montre que le problème « Étant donnée une involution cubique, trouver l'involution conjuguée », est un cas particulier du suivant : « Déterminer les formes de degré n, apolaires à deux formes données de degré n », dont il donne la solution en s'appuyant sur la propriété suivante qu'il déduit d'une observation de M. Stephanos : Les binaires de degré n apolaires à deux binaires de degré n sont les polaires mixtes de $n - 2$ pôles quelconques par rapport au covariant Θ de Gordan relatif aux formes données.

Capelli (*A.*). — Sur la théorie des irrationnelles algébriques. (61-70).

En appliquant les principes de Galois, l'auteur démontre que si A est un nombre appartenant à un certain champ de rationnalité $(C, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport auquel un autre nombre α est un irrationnel algébrique, la condition nécessaire et suffisante pour que A appartienne aussi au champ de rationnalité $(C, \alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, les p_i étant les fonctions symétriques élémen-

taires des x_k, est que le nombre A (exprimé en fonction rationnelle des x_i avec des coefficients du champ C) ne soit pas changé par les substitutions des x_i, qui ne change pas l'irrationnel algébrique α.

Berzolari (*L.*). — Sur l'involution cubique. (71-79).

Quelques propriétés de l'involution cubique déduites d'une propriété générale démontrée par l'auteur dans le travail précédent : *Sur la théorie de l'involution, etc.* Après cela l'auteur démontre aussi une propriété de l'involution formée par les points d'appui des droites trisécantes d'une quartique de deuxième espèce.

Padelletti (*D.*). — Sur le mouvement du pendule simple en tenant compte de l'effet de la rotation terrestre. (79-124).

L'auteur montre comment on doit modifier la façon de traiter cette question, en introduisant la notion de *précession* au lieu de celle inexacte de *plan d'oscillation*. Dans une Note ajoutée à la fin du travail, il donne des notices historiques sur ce problème, et, en particulier, sur des observations relatives à la déviation du pendule, antérieures à l'expérience de Foucault.

Pirondini (*G.*). — Quelques questions sur les développées successives d'une courbe plane. (139-150).

Propriétés des courbes telles que leurs points et les points correspondants de la deuxième et de la quatrième développée sont en ligne droite. Courbes qui coïncident avec leurs quatrièmes développées. Courbes qui coïncident avec leurs huitièmes développées.

Amaldi (*I.*). — Une interprétation des correspondances par rayons vecteurs réciproques dans le plan. (238-240).

M. Porchiesi (*Mem. dell' Acc. di Bologna,* série IV, t. III) a établi une correspondance entre les cercles du plan et les points de l'espace. L'auteur démontre que dans cette correspondance les transformations par rayons vecteurs réciproques du plan donnent dans l'espace des homologies harmoniques, dont le centre et le plan d'homologie sont conjugués par rapport à la quadrique lieu des points qui correspondent aux cercles de rayon nul.

T. VI (année XXXI, 1892).

Battaglini (*G.*). — Sur une série de courbes du second degré. (24-33).

Série de coniques ayant même centre et mêmes directions des axes, et dont les carrés des axes sont des fonctions rationnelles fractionnaires d'un paramètre.

Capelli (*A.*). — Sur la résolution générale des équations, et en

particulier des équations à trois termes, par des intégrales définies. (39-48).

Ce travail se rattache aux recherches de Heymann (*Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen*; Leipzig; Teubner, 1891). Étant donnée l'équation

$$x_0 y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n = 0,$$

et en supposant que, dans le contour C, il n'y ait qu'une racine y, l'auteur trouve, en considérant d'abord y comme une fonction du coefficient x_p,

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{x_p} dx_p \int_{C} \frac{v^{n-p}\, dv}{x_0 v^n + x_1 v^{n-1} + \ldots + x_n} + (y)_{x_p = \alpha},$$

α étant une valeur quelconque prise dans le champ de la variable x_p.

Pinto (*L.*). — Notice nécrologique sur D. Padelletti. (49-50).

Fergola (*E.*). — Notice nécrologique sur A. de Gasparis. (65-66).

Marcolongo (*R.*). — Quelques applications des fonctions elliptiques à la théorie de l'équilibre des fils flexibles. Note I. (71-79), Note II. (89-96).

Dans la première Note l'auteur suppose un fil libre et soumis à une force répulsive rencontrant un axe fixe et proportionnelle à la distance de l'axe. Dans la seconde Note, il suppose que le fil doive rester sur une surface sphérique sans frottement.

Angelitti (*F.*). — Nouvelle détermination de la latitude géographique de l'observatoire royal de Capodimonte au moyen des passages de quelques étoiles au premier vertical, observés pendant 1889. (97-103).

Pinto (*L.*). — Notice nécrologique sur E. Betti. (143-144).

Ascione (*E.*). — Quelques considérations sur le pentaèdre complet. (147-152).

Il y a une quadrique que l'auteur appelle *quadrique des 15 coniques*, telle que le plan polaire d'un sommet du pentaèdre par rapport à la quadrique est aussi le plan polaire (harmonique) de ce sommet par rapport au pentaèdre. Il déduit de la considération de cette quadrique plusieurs propriétés de la configuration du pentaèdre.

Contarino (*F.*). — Observations de la nouvelle comète de Holmes, faites à l'observatoire de Capodimonte. (152-153).

Mollame (*V*.). — Sur les racines primitives de l'unité négative. (179-183).

T. VII (année XXXII, 1893).

Del Pezzo (*P*.). — Sur les points singuliers des courbes algébriques. (15-21).

L'auteur recherche comment on peut obtenir les points singuliers d'une courbe plane en projetant des points simples de courbes situées dans les hyperespaces.

Capelli (*A*.). — Sur le système complet des opérations de polaire, permutables avec toute autre opération de polaire entre les mêmes séries de variables. (29-38).

Toute opération de polaire entre les $x, y, \ldots, u$ permutable avec toutes les autres peut toujours être exprimée par une fonction rationnelle entière à coefficients constants des n opérations

$$H(x, y, z, \ldots, u)_0, \quad H(x, y, z, \ldots, u)_1, \quad \ldots, \quad H(x, y, z, \ldots, u)_{n-1},$$

étant

$$H(x, y, z, \ldots, u)_\rho = \begin{vmatrix} (n-1)+\rho+D_{uu} & \ldots & D_{zu} & D_{yu} & D_{xu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{uz} & \ldots & 2+\rho+D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{uy} & \ldots & D_{zy} & 1+\rho+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{ux} & \ldots & D_{zx} & D_{yx} & \rho+D_{xx} \end{vmatrix},$$

où

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots.$$

Ascione (*E*.). — Sur les surfaces du troisième ordre. (39-44).

L'auteur étudie la quadrique des 15 coniques (*voir* ci-dessus) du pentaèdre de Sylvester, relatif à une surface du 3e ordre, en particulier pour le cas où cette surface possède des points d'Eckardt. (Le point d'Eckardt est un point de la surface par lequel passent trois droites appartenant à la surface et situées dans un même plan. Un tel point est aussi un sommet du pentaèdre de Sylvester).

Del Pezzo (*P*.). — Équation paramétrique d'un cycle d'une courbe plane. (45-49).

Nobile (*A*.). — Réflexions sur la variation de la latitude à courte période. (102-104).

Voir la critique de M. Cesàro à la page 195 et la réponse de l'auteur à la page 204.

9u? Partie

Costa (*G.*). — Action d'un circuit voltaïque de forme elliptique sur une aiguille magnétique de dimensions finies et ayant son centre sur l'axe. (105-110).

Del Pezzo (*P.*). — Sur les groupes kleinéens à deux variables. (123-137).

Le but de l'auteur est de définir, de la manière la plus générale, ces fonctions, dont s'est occupé aussi M. Picard (fonctions hyperfuchsiennes) (*Acta Mathematica*, t. I, p. 5, et *Traité d'Analyse*, t. I, p. 280).

Les substitutions linéaires faites sur les deux variables x et y sont interprétées par l'auteur comme des transformations crémoniennes entre les points réels d'un espace de 4 dimensions. Le problème de la division régulière de l'espace de 4 dimensions en polyèdres congruents par rapport aux transformations d'un groupe donné se réduit à celui de la division régulière d'un espace à 8 dimensions en polyèdres congruents par rapport à un certain groupe d'homographies à coefficients réels.

Capelli (*A.*). — Sur l'impossibilité de syzygies, entre les opérations fondamentales permutables avec toute autre opération de polaire, entre les mêmes séries de variables. (155-162).

Les n opérations $\mathrm{H}(x, y, z, \ldots, u)_q$ (*voir* ci-dessus) ne peuvent être liées par aucune relation rationnelle entière.

Cesàro (*E.*). — Sur la détermination asymptotique des séries de puissances. (187-195).

Étant

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

et

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots,$$

deux séries divergentes à termes positifs, on construit les deux fonctions

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

en supposant convergentes les deux séries de puissances pour $|x| < 1$.

On a alors

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

lorsque le second membre existe. On en déduit que

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

De ces propositions, l'auteur déduit plusieurs propriétés asymptotiques relatives aux séries de puissances. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ un système quelconque de

nombres entiers :

$$x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \dots$$

est la *série potentielle* du système. On a

$$\lim_{x=1} (1 - x)(x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \dots) = \varpi,$$

ϖ étant la *fréquence* de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ entre les nombres entiers, c'est-à-dire la probabilité qu'un nombre entier, pris arbitrairement, appartienne au système donné.

Cesàro (*E.*). — Critique des *Réflexions du Prof. Nobile sur les variations de la latitude à courte période*. (195-196).

Cesàro (*E.*). — La série de Lambert en arithmétique asymptotique. (197-204).

De la manière dont la série

$$L(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \dots$$

se comporte dans le voisinage de l'unité, l'auteur déduit l'expression asymptotique du nombre $\theta(n)$ des diviseurs de n, et établit une formule renfermant, comme cas particuliers, des formules de Gauss et de Dirichlet.

Nobile (*A.*). — Réponse à la critique, faite par M. Cesàro à la Note intitulée : *Réflexions sur la variation de la latitude à courte période*. (204-206).

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI, anno CCLXXXI, 1892. Rendiconti. Série 5^a, t. I. In-4°.

1er semestre.

Capelli (*A.*). — Nouvelle démonstration du théorème sur le développement par polaires des formes algébriques à plusieurs séries de variables (3-9).

Castelnuovo (*G.*). — Sur les transformations crémoniennes du plan, admettant une courbe fixe. (47-50).

M. Doehlemann a étudié cette classe de transformations dans les *Mathematische Annalen* (Bd. XXXIX, p. 567). M. Castelnuovo démontre qu'une transformation de cette classe, si le genre de la courbe fixe est > 1, est toujours cyclique ou réductible au type de Jonquières.

Frattini (*G.*). — Deux propositions de la théorie des nombres et leur interprétation géométrique. (51-57).

Ces propositions sont relatives aux solutions entières de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N.$$

Beltrami (*E.*). — Sur l'expression analytique du principe de Huygens. (99-108).

Au moyen d'une extension de la formule de Green

$$(\sigma)\ \varphi(x, y, z) = \int \left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma - \int \Delta_2 \varphi \frac{dS}{r},$$

l'auteur déduit, d'une manière plus simple, l'expression analytique du principe de Huygens donnée par Kirchhoff. Cette question avait été déjà traitée par l'auteur dans les *Rendiconti del R. Istituto Lombardo* (1889), mais ici il y apporte des autres simplifications et observations.

Tonelli (*A.*). — Sur la résolution de la congruence $x^2 \equiv c \pmod{p^\lambda}$. (116-120).

L'auteur donne une formule pour représenter les racines de cette congruence et en déduit l'expression de ces racines au moyen de celles de

$$y^2 \equiv c \pmod{p}.$$

Morera (*G.*). — Solution générale des équations indéfinies de l'équilibre d'un corps continu. (137-141).

$$X_x = \int X\, dx + \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z},$$

$$Y_y = \int Y\, dy + \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x},$$

$$Z_z = \int Z\, dz + \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y},$$

$$Y_z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right),$$

$$Z_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$X_y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

Beltrami (*E.*). — Observations sur la Note précédente. (141-142).

Morera (*G.*). — Appendice à la Note : *Sur la solution la plus*

générale des équations indéfinies de l'équilibre d'un corps continu. (233-234).

Pincherle (*S.*). — Sur les formes différentielles linéaires. (273-278).

Soit $\varphi(t)$ une fonction analytique quelconque de t et $\varphi', \varphi'', \ldots$ ses dérivées : soit f_p un polynome rationnel entier de degré p en t; l'auteur appelle *forme différentielle linéaire normale de l'ordre* p l'expression

$$\Delta = f_p \varphi^{(p)} + f_{p-1} \varphi^{(p-1)} + \ldots + f_1 \varphi' + f_0 \varphi.$$

et définit les opérations suivantes :

$$\mathrm{D}\Delta = f'_p \varphi^{(p-1)} + f'_{p-1} \varphi^{(p-2)} + \ldots + f'_1 \varphi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{D}^p \Delta = f_p^{(p)} \varphi;$$

$$\mathrm{S}_\rho \Delta = \Delta + \rho \mathrm{D}\Delta + (\rho_2) \mathrm{D}^2 \Delta + \ldots + (\rho_p) \mathrm{D}^p \Delta.$$

L'intégration de l'équation $\Delta = 0$ entraîne celle de toutes les équations de la forme $\mathrm{S}_\rho \Delta = 0$. Étant φ une intégrale de $\Delta = 0$,

$$\psi(x) = \int_\lambda \frac{\varphi(t)\, dt}{(t - x)^{\rho+1}}$$

sera une intégrale de $\mathrm{S}_\rho \Delta = 0$. Applications à l'équation du second ordre et à l'équation hypergéométrique.

Padova (*E.*). — Sur la théorie de la capillarité. (331-335).

Dans sa Note *Sulle equazioni generali della dinamica* (*voir* ses *Rendiconti,* 1891), l'auteur a démontré que les tensions intérieures des corps élastiques et les pressions intérieures des fluides sont des coefficients, par lesquels on doit multiplier les équations exprimant la condition que, dans certains mouvements, les liaisons physiques du système donné ne sont pas modifiées. Ici, en donnant une autre application de cette théorie, il montre que les phénomènes de capillarité sont dus à ce que l'on ne peut changer l'aire des éléments de la surface de séparation des deux fluides, sans faire varier l'énergie du système, à moins que n'interviennent des actions extérieures.

Marcolongo (*R.*). — Résolution de deux problèmes relatifs à la déformation d'une sphère homogène isotrope. (335-343).

L'auteur détermine la déformation de la sphère dans les deux cas suivants :

1° Que soient données la composante normale des forces et les composantes tangentielles des déplacements;

2° La composante normale du déplacement et les composantes tangentielles des forces.

Sella (*A.*). — Sur l'attraction du corps d'attraction maximum au second pôle. (350-356).

Pizzetti (*P.*). — La loi de probabilité des erreurs d'observation. (380-383).

2e semestre.

Bianchi (*L.*). — Sur la transformation de Bäcklund pour les surfaces pseudosphériques. (3-12).

En connaissant toutes les transformées contiguës complémentaires et de Bäcklund d'une surface pseudosphérique initiale, l'application successive et illimitée des méthodes de transformation peut se faire seulement par des calculs algébriques et de dérivation. Pour toutes les surfaces du groupe infini que l'on déduit ainsi, l'équation des géodésiques s'obtient en termes finis sans aucune intégration. L'auteur donne aussi un exemple en partant d'un hélicoïde de Dini. Pour établir ces résultats, l'auteur démontre et emploie un théorème de permutabilité sur la transformation de Bäcklund, qui est le suivant :

« S_1 et S_2 étant deux surfaces pseudosphériques liées à une même surface pseudosphérique S par deux transformations de Bäcklund B_{σ_1}, B_{σ_2} à constantes différentes σ_1, σ_2, il existe une quatrième surface pseudosphérique S_3 liée aux S_1, S_2 par des transformations de Bäcklund B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, de constantes σ_2, σ_1.

Bianchi (*L.*). — Sur les déformations infiniment petites des surfaces flexibles et inextensibles. (41-48).

Après avoir rappelé les formules de Weingarten (*Crelle*, Bd. C), l'auteur démontre une propriété des surfaces associées, c'est-à-dire qui ont des normales parallèles entre elles, point par point, lorsqu'on fait correspondre aux lignes asymptotiques de l'une un système conjugué sur l'autre. Ensuite, il recherche le système conjugué qui se conserve conjugué après la déformation et enfin en considérant les déformations finies qui conservent conjugué un système donné, il démontre des résultats de M. Cosserat (*Comptes rendus*, octobre 1891).

Montesano (*D.*). — Sur deux congruences de droites du 2e ordre et de la 6e classe. (77-85).

Ces congruences sont formées par les génératrices de ∞ cônes du 2e degré ayant les sommets sur une courbe rationnelle du 3e ordre, gauche ou plane.

Frattini (*G.*). — Additions à quelques théorèmes de M. Tchebicheff. (85-91).

Sur les solutions entières de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = N.$$

Somigliana (*C.*). — Sur les expressions analytiques générales des mouvements oscillatoires. (111-119).

L'auteur donne une démonstration simple du théorème de Clebsch sur la décomposition de tout mouvement oscillatoire d'un milieu isotrope en deux mouvements, l'un longitudinal et l'autre transversal. Il y ajoute quelques observations sur les relations entre les formes trouvées ici et autres formes connues pour les intégrales des équations des mouvements oscillatoires. Enfin, il généralise la question en supposant que le milieu ne soit pas isotrope, mais un milieu de Green.

Bianchi (*L.*). — Sur la transformation de Bäcklund pour les systèmes triples orthogonaux de Weingarten. (156-161).

Le théorème de permutabilité de la transformation de Bäcklund, démontré par l'auteur même pour les surfaces pseudosphériques (*voir* ci-dessus), est démontré ici pour les systèmes triples orthogonaux de Weingarten contenant une série de surfaces pseudosphériques.

Volterra (*V.*). — Sur les vibrations lumineuses dans les milieux isotropes. (161-170).

L'auteur traite le cas des ondes cylindriques et obtient des formules analogues à celles de Kirchhoff. Puis, en généralisant, il obtient des formules dont celles de Kirchhoff et celles de l'auteur sont des cas particuliers.

Del Re (*A.*). — Sur la surface du 5e ordre douée de cubique double et de point triple. (170-176).

Del Re (*A.*). — Encore sur la surface du 5e ordre à cubique double et point triple. (203-210).

Dans le *Giornale di Battaglini,* 1888, l'auteur a donné une construction de cette surface, qui est polaire conjointe par rapport à un connexe plan-droite (2, 3) et à une quadrique. Dans la première de ces deux Notes, il démontre des propriétés de cette surface, et dans la seconde il donne une nouvelle construction, la construction de la courbe double et les équations de la surface, du connexe (2, 3) qui la prodnit, et d'un autre connexe point-plan (1. 2), dont elle est surface fondamentale.

Volterra (*V.*). — Sur les ondes cylindriques dans les milieux isotropes. (265-277).

Après avoir rappelé les formules trouvées par lui dans son Travail précédent (*Sur les vibrations lumineuses, etc., voir* ci-dessus), et qui expriment pour le cas des ondes cylindriques un principe analogue à celui de Huygens-Kirchoff, l'auteur montre la relation entre deux de ces formules et une formule de Poisson, et établit ensuite des formules plus générales.

Brioschi (*J.*). — Les intégrales algébriques de l'équation de Lamé. (327-331).

Dans les *Annali di Matematica*, t. IX, 2e série, 1878, l'auteur a démontré que l'équation différentielle

$$\varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds}=\left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s+t\right]y,$$

étant

$$\varphi(s)=4s^3-g_2s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

ν un nombre impair et t une constante, a des intégrales algébriques, et même trouvé leur expression. Ici il donne des transformations et une propriété de ces intégrales.

Del Re (*A.*). — Autres propriétés relatives à la surface du 5e ordre à cubique double et point triple. (343-348).

Del Re (*A.*). — Sur quelques variétés de la surface du 5e ordre à cubique double et point triple. (378-385).

Construction de la surface au moyen de certaines correspondances univoques.

Pascal (*E.*). — Sur les 315 coniques coordonnées à la courbe plane générale du 4e ordre. Note I. (385-390).

L'auteur applique les principes généraux établis par lui dans un Travail inséré aux *Annali di Matematica*, t. XX (*Rappresentazione geometrica della caracteristiche di genere 3 e 4*). Il étudie ici la configuration de 28 tangentes doubles de la quartique plane, et des propriétés qui en dépendent.

Cantoni (*G.*). — Sur la valeur philosophique des écrits de G. Galilei. (405-410).

Pascal (*E.*). — Recherches sur les groupements formés par les 315 coniques coordonnées à la courbe plane générale du 4e ordre. Note II. (417-423).

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein. W. Dyck et A. Mayer.

Tome XXXVII; 1890 ([1]).

Capelli (A.). — Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques. (1-37).

L'auteur expose, dans ce Mémoire, non seulement les résultats les plus importants auxquels il est parvenu dans ses travaux antérieurs sur la théorie générale des formes algébriques, mais aussi quelques autres résultats et donne une série de démonstrations nouvelles dont le but principal est de ramener, autant que possible, le mécanisme de la technique opérative des opérations invariantes à ses éléments les plus simples, c'est-à-dire aux opérations de polaire, les seules dont l'usage est essentiel dans son Mémoire.

On représente par une seule lettre, par x par exemple, l'ensemble de plusieurs variables indépendantes x_0, x_1, x_2, ..., x_ν. On dit alors que x représente une série de variables de l'espèce ν. On appelle *opérations élémentaires* les opérations de la forme

$$D_{xy} = y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + y_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

L'opération résultant de plusieurs opérations effectuées successivement Δ', Δ'', Δ''', ..., est représentée par le produit

$$\ldots \Delta''' \Delta'' \Delta'.$$

L'auteur ne considère, en général, que des opérations qui s'expriment par un agrégat rationnel et entier à coefficients constants d'opérations élémentaires. Nous pouvons maintenant donner une idée de l'esprit du Mémoire en reproduisant quelques-uns des théorèmes qu'il renferme.

Si Π et Π' sont deux produits de λ opérations élémentaires, qui ne diffèrent que par l'ordre de succession des facteurs, on aura identiquement

$$\Pi - \Pi' = \Sigma k_i \pi_i$$

où les coefficients constants k_i sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et les π_i sont des produits de $\lambda - 1$ opérations élémentaires.

Si D_1, D_2, ..., D_N sont les n^2 opérations élémentaires D_{xy}, relatives aux n séries de variables x, y, ..., rangées dans un ordre choisi arbitrairement, une opération quelconque Δ composée avec ces opérations élémentaires peut toujours s'exprimer sous forme d'une somme de termes de la forme

$$\alpha D_N^{\mu_N} D_{N-1}^{\mu_{N-1}} \ldots D_3^{\mu_3} D_2^{\mu_2} D_1^{\mu_1},$$

où α est un coefficient constant qui est fonction linéaire à coefficients entiers des coefficients de Δ et μ_1, μ_2, ..., μ_N des entiers positifs dont la somme ne

([1]) Voir *Bulletin*, t. XIX_2, p. 23.

peut dépasser le degré total de Δ, c'est-à-dire le plus grand nombre de facteurs D égaux ou distincts dont se composent les termes de l'opération Δ.

L'opération de Cayley

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

formée avec n séries de variables $x, y, \ldots, v$, opération qui joue un rôle très important dans la théorie des formes invariantives, peut toujours se ramener à de simples opérations élémentaires.

Une fonction rationnelle entière quelconque

$$F(x, y, z, \ldots, u)$$

de n séries $x, y, z, \ldots, u$, d'espèce n, peut toujours s'exprimer sous la forme

$$F(x, y, z, \ldots, u) = (x, y, z, \ldots, u)\,\Phi(x, y, z, \ldots, u) + \Sigma\Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

où le second membre est la somme de deux fonctions rationnelles entières dont la première est exactement divisible par le déterminant $(x, y, z, \ldots, u)$ des variables, et la seconde est une fonction qui peut être déduite à l'aide des fonctions élémentaires de fonctions $f_i(y, z, \ldots, u)$ qui contiennent seulement les séries $y, z, \ldots, u$.

L'auteur avait donné cette proposition dans un Travail publié en 1882 dans les *Memorie della R. Acc. dei Lincei* (*Fundamenti di una theoria dei forme algebriche*), mais la démonstration qu'il en donne ici est beaucoup plus simple. Le Mémoire se termine par l'extension des résultats obtenus pour les fonctions rationnelles entières aux fonctions analytiques.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des séries de Dirichlet. (38-60).

Dans un Mémoire sur la théorie générale de la divergence et de la convergence des séries à termes positifs (*Math. Ann.*, t. XXXV), l'auteur a établi que la série dont le terme général est

$$c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\rho} = \frac{d_\nu}{M_\nu^\rho} \qquad (M_{\nu+1} \geqq M_\nu, \quad M_\infty = \infty)$$

est convergente pour toute valeur positive de ρ si petite qu'elle soit, tandis que l'expression

$$d_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

est le terme général d'une série divergente. L'auteur a établi alors que cette proportion donnait la clef de toute la théorie de la convergence des séries à termes positifs.

Des recherches ultérieures ont conduit l'auteur à reconnaître que le même théorème s'applique de la façon la plus simple à l'étude des séries à conver-

gence non absolue qu'il appelle *séries de Dirichlet*, c'est-à-dire aux séries

$$\Sigma a_\nu M_\nu^{\rho},$$

où M_ν est une quantité positive qui ne décroît jamais avec ν et augmente indéfiniment pour $\nu = \infty$ et les quantités a_ν sont des quantités quelconques réelles ou complexes.

Le théorème en question permet à l'auteur de démontrer d'une façon purement élémentaire, sans aucun emploi du Calcul intégral, la réponse aux deux questions suivantes :

Quelles sont les conditions suffisantes pour que les séries de Dirichlet, relatives au cas où ρ est plus grand que zéro, soient convergentes ou divergentes?

Quelle est la limite de leurs sommes pour $\rho = 0$?

Braunmühl (*A. von*). — Sur les groupes de caractéristiques à p colonnes formées avec des $n^{\text{ièmes}}$ parties de nombres entiers et sur les relations entre les fonctions thêta d'ordre n qui leur correspondent. (61-99).

Nœther (*Math. Ann.*, t. XVI, 1880) et Frobenius (*J. de Crelle*, t. LXXXIX, et XCVI, 1884) se sont occupés, en se plaçant à des points de vue différents, de la théorie des caractéristiques à p colonnes ou de genre p dont les éléments sont formés avec des moitiés de nombres entiers; ces théories des caractéristiques sont importantes pour la formation des relations entre les fonctions thêta et pour le problème de la division par deux des fonctions abéliennes. On se trouvait ainsi conduit à étendre leurs recherches aux caractéristiques formées avec des $n^{\text{ièmes}}$ parties de nombres entiers, n étant un nombre entier positif quelconque. Prym et Krazer se sont posé la question (*Acta Mathematica*, t. III, 1883) mais ne sont pas partis de l'étude préalable des caractéristiques; il ont établi deux formules entre les fonctions thêta du premier ordre ayant les caractéristiques en question, formules qui sont des plus importantes; l'une de ces formules possède un caractère de généralité tel qu'elle peut servir de base à toute une série de développements.

L'auteur s'est proposé ici d'étudier tout d'abord les caractéristiques en elles-mêmes, et dans une première section il étend aux caractéristiques formées avec des $n^{\text{ièmes}}$ parties de nombres entiers, les résultats obtenus par Frobenius dans le cas particulier où $n = 2$. Il ne se contente pas d'établir les seules propositions qui lui seront utiles dans la seconde partie, mais traite à fond la théorie générale des caractéristiques qui permet de fournir des relations intéressantes entre les fonctions thêta, aussi bien dans le cas général que dans le cas déjà étudié par l'auteur où $n = 3$ (*Math. Ann.*, t. XXXII, 1888).

C'est un des sous-groupes rencontrés dans la première section et qui comprend comme cas particulier le groupe de Gœpel qui conduit à l'examen de certaines fonctions thêta d'ordre n, entre lesquelles existe une relation fondamentale analogue à la relation de Prym et Krazer et qui comprend comme cas particuliers toutes les relations de même espèce que l'on connaissait jusque-là.

Schumacher (*R.*). — Classification des systèmes de rayons algébriques. (100-140).

L'auteur établit une correspondance univoque entre l'espace réglé ordinaire et l'espace ponctuel à quatre dimensions. A un système de rayons dans l'espace réglé répond alors une surface dans l'espace à quatre dimensions et inversement. L'étude de ces surfaces et leur inversion dans l'espace réglé conduit l'auteur à introduire, pour la classification des systèmes de rayons, quatre nombres indépendants et il exprime, à l'aide de ces quatre nombres, les autres quantités qui correspondent aux singularités du système.

En appliquant les formules ainsi obtenues au cas de l'intersection complète de deux complexes, l'auteur retrouve les résultats obtenus par Voss dans son Mémoire sur les complexes et les congruences (*Math. Ann.*, t. IX).

Comme vérification des formules dans le cas général, l'auteur considère une espèce particulière de systèmes de rayons obtenue en établissant entre deux plans une relation de Cremona d'ordre n. Les singularités du système peuvent, dans ce cas, s'obtenir directement et fournissent des vérifications utiles.

Waelsch (*E.*). — La géométrie de la droite et la théorie des invariants. (141-152).

H. Grassmann représente le segment de droite par le produit extérieur de ses deux extrémités; on obtient de la sorte les coordonnées homogènes de la droite : p_{ik}. Ces coordonnées, considérées comme déterminants du second degré, sont représentées par Grassmann comme des produits alternés,

$$p_{ik} = p_i p_k = -p_k p_i.$$

Les espaces linéaires situés dans des espaces supérieurs se prêtent à des considérations semblables.

Si l'on introduit ces coordonnées symboliques des droites, ces quantités p_i, dans quelques invariants connus de la géométrie de l'espace réglé, on reconnaît que ces invariants sont formés de facteurs qui, relativement à ces symboles sont linéaires et de la forme

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 + p_4\xi_4,$$

où les quantités ξ_i sont des coordonnées tangentielles. Ces facteurs élémentaires, considérés à part, sont invariants et, par exemple, les p et les ξ sont contragrédients. En partant de là, on peut également arriver à symboliser les complexes linéaires et de degré supérieur, on peut étudier la façon dont se comportent les symboles dans une transformation linéaire, former des expressions élémentaires invariantes et constituer avec ces dernières tous les invariants.

Hess (*W.*). — Sur les équations du mouvement d'Euler et sur une nouvelle solution particulière du problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. (153-181).

On ne connaissait, il y a peu de temps encore, que deux cas où le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être résolu : il fallait que le point fixe fût le centre de gravité du corps ou bien qu'il fût placé sur un des axes principaux d'inertie relatif au centre de gravité, les

deux autres axes d'inertie étant égaux entre eux. Sophie Kowalevsky dans son Mémoire couronné *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (*Acta Math.*, t. XII, 177-232; 1889) a établi l'existence d'un cas nouveau et a démontré que, si le centre de gravité est dans un des plans principaux relatifs au point de suspension et si en même temps les moments d'inertie pour les axes principaux situés dans ce plan étaient tous deux égaux au double du troisième moment d'inertie, les éléments du mouvement peuvent être exprimés à l'aide de fonctions hyperelliptiques.

L'auteur dans un Programme du Lycée de Bamberg : *Ueber die Euler'schen Bewegungen und deren singulärën Lösungen*, avait signalé un quatrième cas, mais il établit ici que ce cas n'est qu'une solution singulière d'un système déduit des équations d'Euler, mais non pas des équations d'Euler elles-mêmes.

Peano (*G.*). — Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. (182-228).

Soit le système d'équations différentielles, ramené à la forme normale

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions continues aux environs de $t = b$, $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. L'auteur se propose de prouver que l'on peut déterminer un intervalle (b, b') et, relativement, à cet intervalle, n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de t, qui satisfont aux équations données, et qui, pour la valeur b de t, prennent les valeurs $a_1, \ldots, a_n$. La démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles, indépendante de la théorie des imaginaires, laquelle exige des conditions restrictives spéciales, a été donnée par Cauchy et publiée, mais d'une façon incomplète, par Moigno dans ses *Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. II, p. 385-454 et 513-534; 1844. Elle suppose l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions φ par rapport aux quantités x. Elle a été ensuite donnée par divers auteurs, par exemple par Lipschitz (*Bull. Darboux*, t. X, p. 149; *Annali di Mat.*, t. II_2, p. 288 et *Differential- und Integral-rechnung*, p. 500) sous des conditions restrictives, quelque peu différentes.

La démonstration est réduite ici en formules de Logique, analogues aux formules d'Algèbre; l'auteur évite ainsi une complication excessive. Il est vrai qu'il faut tout d'abord apprendre ce nouveau langage mathématique.

Une première Partie contient l'explication des notations introduites et qui ont été employées pour réduire en formules les propositions de quelques théories.

L'auteur renvoie d'ailleurs, pour de plus amples explications, à ses publications :

Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin, 1889.

Principii di Geometria; logicamente esposti. Turin, 1889.

Les propositions du cinquième Livre d'Euclide, réduites en formules (*Mathesis*, t. X).

Le journal de Peano : *Rivista di Matematica* contient également d'autres applications intéressantes de la Logique aux Mathématiques.

La seconde Partie contient la démonstration du théorème de l'intégrabilité.

Wiltheiss (*E.*). — Une espèce particulière d'opération qui fournit des covariants. (229-272).

Suite des travaux de l'auteur sur l'équation $\delta_{v\ u}$. Dans cette troisième Partie, l'auteur a en vue les covariants d'une forme du 5e ordre à deux séries de variables.

Dyck (*W.*). — Contribution à l'*Analysis Situs*. Deuxième Mémoire. Variétés à *n* dimensions. (273-316).

Extension aux espaces à n dimensions des résultats obtenus par l'auteur dans son Mémoire du tome XXXII des *Mathematische Annalen*. Il s'agit tout spécialement de la détermination des caractéristiques des formes algébriques situées dans un espace quelconque et de leur expression au moyen des caractéristiques des systèmes de fonctions de Kronecker.

Kürschák (*J.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques égales. (317-320).

Dans une dissertation inaugurale publiée en 1880 à Klausenburg, J. Vályi a établi que l'équation différentielle fournie par la relation

$$\delta \int\int V(p, q)\, dx\, dy = 0,$$

sous la condition

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = 0,$$

possède des intégrales premières et peut être, par suite, résolue par la méthode de Monge. L'auteur se propose d'étendre ce résultat à l'équation obtenue en écrivant que l'on a

$$\delta \int\int V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = 0,$$

et il établit que, si l'équation caractéristique de cette équation aux dérivées partielles a des racines égales, elle peut être résolue par la méthode de Monge, il suffit après avoir obtenu deux intégrales premières d'effectuer une seule quadrature.

Stickelberger (*L.*). — Sur une généralisation de la division du cercle. (321-367).

Une question proposée en 1885 et en 1888 par la Société royale des Sciences de Göttingue a amené l'auteur à considérer une résolvante de la division du cercle plus générale que celles qui avaient été étudiées auparavant.

C'est dans cette orientation que se rencontrent de remarquables relations

entre l'Algèbre et la Théorie des nombres. Gauss, le premier, les avait rencontrées et signalées, par exemple, dans l'article 358 de ses *Disquisitiones Arithmeticæ*. Ces relations constituent quelques-uns des plus remarquables travaux de Jacobi : *De residuis cubicis commentatio numerosa. Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formæ* $y^2 + Az^2$. *Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie*: de Cauchy, *Mémoire sur la théorie des nombres*; d'Eisenstein, *Zur Theorie der quadratischen Zerfällungen der Primzahlen* $8n+3$, $7n+2$, $7n+4$; de Kummer, *Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen*.

Les résultats de l'auteur ont été présentés à la Société des Sciences de Göttingue en 1888 dans un Mémoire : *Théorie des sommes d'Eisenstein*. Dans le présent travail, les expressions que l'auteur appelle *sommes d'Eisenstein* n'occupent plus la place principale, la résolution en facteurs premiers idéaux ayant pu être obtenue directement, sans avoir recours à ces sommes.

Kiepert (*L.*). — Sur certaines simplifications des équations de la théorie des fonctions elliptiques. (368-398).

Suite du Mémoire paru dans les *Mathematische Annalen* (t. XXXII, 1-135).

Mayer (*A.*). — Sur la théorie des solutions complètes des équations différentielles du premier ordre entre deux variables. (399-403).

Considérant l'équation différentielle de la forme

$$y' = Y(x, y),$$

pour déduire les solutions singulières de la solution complète

$$y = \varphi(x, c),$$

on attribue, en général, aux constantes d'intégration c non plus des valeurs constantes, mais des fonctions de x satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0,$$

et, dans ces conditions, la nouvelle solution est toujours une enveloppe du faisceau de courbes représentées par la solution complète.

Mais cette proposition n'est pas toujours vraie, et même si l'on ne considère que des valeurs réelles de c, le théorème n'est vrai que dans des limites très étroites.

Weber (*H.*). — Sur la théorie des fonctions de Bessel. (404-416).

On appelle *fonctions de Bessel* les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

ou encore de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

qui a été introduite par Riemann pour le cas de $n = 0$ dans le cas des anneaux de Nobili.

L'auteur étudie les développements en série demi-convergentes de ces fonctions, en partant des remarques suivantes. Si l'on pose

$$S_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\alpha}\left(1 - \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha} ds,$$

$$S_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\alpha}\left(1 + \frac{s}{2ix}\right)^{\alpha} ds,$$

et ensuite

$$u_1 = e^{ix}\;S_1(x),$$

$$u_2 = e^{-ix}S_2(x),$$

et en faisant enfin

$$u = \sqrt{x}\,y,$$

y_1 et y_2 sont les deux solutions particulières de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y = 0.$$

L'auteur intègre pour effectuer les développements les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions S_1 et S_2 en appliquant la méthode des coefficients indéterminés.

Nœther (*M.*). — Sur la théorie des expressions différentielles et des fonctions abéliennes. (417-460).

L'auteur expose ici d'une façon détaillée les résultats qu'il a précédemment donnés sous forme concise dans les *Sitzungsberichte der Erlanger physicalischmedicinischen Societät,* fasc. 16 (1883-1884) et 18 (1886), sur la théorie des expressions différentielles algébriques d'une variable et sur le problème d'inversion de Jacobi. Dans cette première Partie, l'auteur s'occupe des expressions différentielles abéliennes, et cela à un point de vue purement algébrique. Il traite successivement des formes algébriques, de leur classification, de leur réduction à des formes normales, de la réduction des différentielles à des formes normales de différentes espèces, etc.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la revision de la théorie des caractéristiques de M. Study. (461-464).

Cet extrait d'une lettre à M. Klein contient quelques remarques sur le Mémoire de M. Study : *Ueber die Geometrie der Kegelsehnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem* (*Math. Ann.,* t. XXVII). Les géomètres croyaient définitivement résolue, par les recherches de Halphen, la question sur la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, présumée par Chasles, du nombre des coniques satisfai-

sant à la fois à quatre conditions caractérisées par les nombres μ et ν, et à une cinquième condition caractérisée par α et β. Dans le Mémoire cité, M. Study dit que la réponse négative donnée par Halphen à la question n'avait égard qu'à la manière dont il l'avait formulée; M. Study prend une formulation différente et arrive alors à une réponse affirmative. M. Zeuthen démontre que la question originaire n'a subi aucune modification par la manière dont elle a été précisée par Halphen.

Nœther (*M.*). — Sur la théorie des expressions différentielles et des fonctions abéliennes. II. (465-499).

Dans cette deuxième Partie, l'auteur s'occupe maintenant des fonctions abéliennes, des intégrales normales des diverses espèces; des équations différentielles du théorème d'Abel, du problème d'inversion de Jacobi, des fonctions abéliennes Al.

Pochhammer (*L.*). — Sur une classe d'intégrales à courbe d'intégration fermée. (500-511).

Si une fonction plurivoque $F(w)$ a la forme

$$F(w) = (w - \alpha_\nu)^{\beta_\nu} f(w),$$

où $f(w)$ est univoque dans le voisinage de $w = \alpha_\nu$, l'intégrale

$$\int_{\alpha_\nu}^{x} (w - x)^\lambda F(w)\, dw$$

acquiert le facteur $e^{2\pi i(\beta_\nu+\lambda)}$ lorsque x décrit une circonférence dans le sens positif autour de α_ν. L'auteur considère ici une intégrale $\omega(x)$ de la fonction $(w - x)^\lambda F(w)$, le chemin d'intégration S commençant en un point x et finissant au même point, ne se rencontrant pas lui-même et comprenant à l'intérieur de l'aire qu'il limite un nombre quelconque de points singuliers.

Pochhammer (*L.*). — Sur l'équation différentielle de Tissot. (512-543).

Tissot, dans le tome XVII du *Journal de Liouville*, a donné des équations différentielles linéaires du $n^{\text{ième}}$ ordre qui s'intègrent au moyen d'intégrales définies de la forme

$$\int_{a_k}^{a_g} e^u (u - a_1)^{b_1-1} (u - a_2)^{b_2-1} \cdots (u - a_{n-1})^{b_{n-1}-1} (u - x)^{\lambda-1}\, du.$$

M. Pochhammer donne une étude détaillée des diverses solutions de l'équation de Tissot et examine, en particulier, comment se comportent les intégrales dans le voisinage des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et ∞.

Klein (*F.*). — Sur la Géométrie non euclidienne. (544-572).

Tout le monde connaît les travaux de M. Klein sur la Géométrie non euclidienne. Un Cours qu'il a fait sur ce sujet à l'Université de Göttingue en 1889-90 a été pour l'auteur l'occasion de revoir ses travaux antérieurs : *Ueber*

die sogenannte nicht-euklidische Geometrie (*Math. Ann.*, t. IV et VI), *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872, traduit en 1890 par G. Fano dans les *Ann. di Mat.* et depuis par H. Padé dans les *Ann. de l'Éc. Norm.*), *Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve* (*Ber. Erlang.*, 1873 et t. XXII, *Math. Ann.*). D'autre part, la lecture des Mémoires publiés depuis sur la question a conduit M. Klein à reconnaître que les idées qu'il a émises depuis longtemps déjà n'ont pas toujours été bien comprises et aussi que certaines questions devaient être clairement posées aujourd'hui. Dans un premier paragraphe, il reproduit certaines idées qui ont été publiées ou énoncées verbalement par Clifford en 1873 et qui, malgré l'intérêt qu'elles présentent sont encore peu connues. Dans le second paragraphe, l'auteur examine plus particulièrement les travaux de Killing et la question des espaces (*Raumformen*) non euclidiens. Dans le troisième paragraphe se trouve développée une méthode des plus simples pour établir la Géométrie analytique sur une base purement projective. Enfin, dans une dernière Partie, il s'agit de questions plus générales et, en particulier, du problème des axiomes géométriques.

Klein (*F.*). — Sur les zéros de la série hypergéométrique. (573-590).

Étude sur l'équation différentielle de la série

$$F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l.m}{1.n}x + \frac{l(l+1)m(m+1)}{1.2.n(n+1)}x^2 + \ldots.$$

Stieltjes dans le tome C des *Comptes rendus* (1885) et Hilbert dans le tome CIII du *Journal de Crelle* (1887), se sont occupés de la détermination du nombre des racines de l'équation obtenue en ne prenant dans cette série qu'un nombre fini de termes. L'auteur cherche ici le nombre des zéros que possède F entre $x = 0$ et $x = 1$.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des intégrales définies et des séries infinies. (591-604).

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x qui, pour $x = 0$ devient infinie, en demeurant *monotone* et en croissant au delà de toute limite lorsque x varie jusqu'à la valeur zéro à partir d'une valeur déterminée positive; il s'agit, dans ce Mémoire, de soumettre à une critique rigoureuse certaines conditions reconnues comme nécessaires pour que l'intégrale $\int_0^a f(x)\,dx$ ait un sens.

L'auteur donne en terminant quelques corrections peu importantes relatives au Mémoire de la page 38 du même volume.

Tome XXXVIII; 1891.

Wiltheiss (*E.*). — Les équations aux dérivées partielles des fonctions thêta abéliennes à trois arguments. (1-23).

Si l'on considère la courbe du quatrième ordre relative aux intégrales abéliennes du genre 3

$$f = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\, x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu},$$

que l'on peut représenter symboliquement par

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = e_x^4,$$

on peut introduire, au lieu des fonctions $\mathfrak{S}$ de Jacobi, d'autres fonctions Th définies par les équations

$$\mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3) = c e^{\eta(u_1, u_2, u_3)}\, \mathfrak{S}(v_1, v_2, v_3),$$

où l'on pose

$$v_\alpha = c_{\alpha 1} u_1 + c_{\alpha 2} u_2 + c_{\alpha 3} u_3,$$

$$\eta(u_1, u_2, u_3) = \sum_{\alpha\beta} \mathrm{H}_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad \mathrm{H}_{\alpha\beta} = \mathrm{H}_{\beta\alpha};$$

il existe alors 64 fonctions Th relatives à la courbe f.

Si l'on pose, avec un système arbitraire de variables w_1, w_2, w_3

$$9(abc)^2 (abe)^2 [c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2] - 5(abc)^4 e_u^2 e_w^2 = \mathrm{L},$$

$$(abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2] = \bar{f} = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-h} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\, x_1^\lambda x_2^\mu x_3^{4-\lambda-\mu};$$

et si l'on introduit le symbole d'opération

$$\delta = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}},$$

les 64 fonctions Th satisfont à l'équation différentielle

$$\delta\,\mathrm{Th} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} \mathrm{L}\,\mathrm{Th} = 0.$$

Pasch (*M.*). — Sur les formes bilinéaires et leur application à la Géométrie. (24-49).

Dans deux Mémoires publiés dans les *Mathematische Annalen* (t. XXIII, p. 419; 1884 et t. XXVI, p. 211; 1886), l'auteur s'est occupé, en partant des formes bilinéaires, des systèmes plans projectifs. Il a été depuis conduit par l'examen de différentes questions à l'étude des formes binaires et ternaires bilinéaires.

Si l'on écrit la forme adjointe de la combinaison linéaire de deux formes ternaires bilinéaires, on obtient une forme bilinéaire qui, relativement aux formes d'où l'on est parti, possède le caractère invariant. Si l'on part, en particulier, de deux formes ternaires quadratiques, la troisième forme n'est autre que la conique des huit tangentes dont l'étude conduit alors des plus facile-

ment à une série de propriétés géométriques dont les unes sont déjà connues, dont les autres paraissent nouvelles.

Fricke (*R.*). — Sur une classe particulière de groupes discontinus de substitutions réelles linéaires. (50-81).

Dans son Mémoire : *Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* publié dans le *Journal de Liouville*, t. III (1887), Poincaré a développé un principe très remarquable qui permet de définir, en partant de formes ternaires quadratiques indéfinies, des groupes de substitutions linéaires d'une variable en nombre infini.

L'auteur donne ici des développements complets sur un cas particulier. Il considère des formes $ax^2 + by^2 + cz^2$ ayant un déterminant premier q. On peut alors prendre les formes ternaires $(\pm qx^2 \mp y^2 - z^2)$, mais l'expression $(-qx^2 + y^2 - z^2)$ conduisant à des résultats déjà connus; l'auteur est amené à s'occuper de l'expression $(qx^2 - y^2 - z^2)$. Il s'agit tout d'abord de déterminer toutes les substitutions à coefficients entiers de la forme $(qx^2 - y^2 - z^2)$ en elle-même, puis de transformer ces substitutions en substitutions rationnelles et linéaires d'une seule variable ω, enfin de représenter dans le plan ces groupes de substitutions et de tracer pour les premières valeurs du nombre premier q ($q = 3, 5, 7, 11$) les régions fondamentales relatives à ces groupes. La méthode est analogue à celle employée dans la théorie des fonctions modulaires elliptiques.

Nekrassoff (*P.-A.*). — Sur le cercle limite de Fuchs.

Dans son travail *Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen* (*J. de Crelle*, t. LXXV), Fuchs s'est appuyé, pour établir le prolongement analytique d'une fonction, sur un théorème que l'on peut appeler *théorème du cercle limite*. Mais ce théorème ne semble pas, à l'auteur du Mémoire, s'appliquer dans tous les cas. L'auteur avait signalé cette objection à Anissimoff qui a étudié la question dans son travail sur *Les fondements de la théorie des équations différentielles linéaires* paru dans les *Comptes rendus scientifiques de l'Université de Moscou* (1889). Dans le *Journal de Crelle* (t. CVI, 1890) Fuchs est alors revenu sur la question et a essayé de modifier son théorème en sorte qu'il n'y ait plus aucun doute. Cette Note de Fuchs soulève encore des objections que l'auteur a formulées dans le *Journal de la Société mathématique de Moscou* (t. XIV, 1890) et qui se trouvent reproduites ici. L'auteur estime que la méthode de Fuchs ne peut pas encore, dans sa forme actuelle, être considérée comme satisfaisante.

Junker (*F.*). — Les relations qui existent entre les fonctions symétriques élémentaires. (91-114).

Considérons r groupes de $n+1$ éléments

$$\begin{array}{llllll} x_1, & y_1, & z_1, & t_1, & \ldots, & w_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, & t_2, & \ldots, & w_2, \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ x_r, & y_r, & z_r, & t_r, & \ldots, & w_r, \end{array}$$

où l'on regarde les éléments représentés par une même lettre comme correspondants, on a, en même temps, $(n+1)$ groupes de r éléments. On appelle *fonctions symétriques élémentaires* des fonctions qui sont par exemple de la forme

$$\Sigma x_1 y_2 z_3 = x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 + \ldots.$$

Il existe ainsi toute une série de fonctions symétriques élémentaires

$$\begin{array}{llll}
\Sigma x_1, & \Sigma y_1, & \Sigma z_1, & \ldots, \\
\Sigma x_1 x_2, & \Sigma y_1 y_2, & \ldots, & \ldots, \\
\Sigma y_1 z_2, & \Sigma z_1 x_2, & \ldots, & \ldots, \\
\Sigma x_1 t_2, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\Sigma x_1 x_2 x_3, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\Sigma y_1 y_2 z_3, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

qui sont en nombre bien supérieur au nombre $r(n+1)$ des éléments qui les constituent. Les fonctions symétriques élémentaires ne sont donc pas indépendantes et il existe entre elles des relations identiques que l'auteur se propose d'établir.

Il s'occupe d'abord de l'établissement de ces relations d'une façon générale. Le nombre est égal à

$$\binom{r+k}{k} - \binom{r+n-1}{n-1} - \binom{n}{2}\binom{r+n-2}{n-1}, \qquad k = \binom{n+1}{2} - 1,$$

c'est-à-dire pour les cas les plus simples à

$$\left.\begin{array}{l}
0 \\
\binom{r}{2} \\
\binom{r+5}{5} - (r+1)(2r+1)
\end{array}\right\} \text{dans le domaine} \left\{\begin{array}{l}
\text{binaire.} \\
\text{ternaire.} \\
\text{quaternaire.}
\end{array}\right.$$

Il examine ensuite, d'une façon spéciale, le cas des domaines ternaire et quaternaire, et termine par des considérations générales sur les fonctions symétriques non élémentaires.

Hilbert (*D.*). — Sur les traits réels des courbes algébriques. (115-138).

Harnack a démontré (*Math. Ann.*, t. X, p. 89) que le nombre des traits réels d'une courbe plane d'ordre n était au plus égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ et que, effectivement, il existait des courbes pour lesquelles ce maximum était atteint. L'auteur considère ici plus particulièrement les courbes gauches. Il établit en particulier les propositions suivantes.

Le nombre des traits réels d'une courbe gauche irréductible d'ordre n est au plus égal à $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ ou à $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, suivant que le nombre n

est pair ou impair, et il existe effectivement des courbes gauches présentant dans chacun des cas un tel nombre de traits réels.

Une courbe d'ordre n qui présente le nombre maximum de traits réels possède $2\nu - 2$, $2\nu - 1$, $2\nu - 1$ traits impairs, suivant que l'on a $n = 4\nu$, $4\nu + 1$, $4\nu + 3$. Dans le cas où $n = 4\nu + 2$, tous les traits sont nécessairement pairs. Les courbes d'ordre 3, 4 et 5 constituent des cas d'exception, elles peuvent respectivement présenter 1, 2 et 3 traits impairs.

Pick (*G.*). — Sur une forme normale de certaines équations du second et du troisième ordre. (139-143).

Klein (*F.*). — Sur la mise sous forme normale de l'équation différentielle linéaire du second ordre. (144-152).

Pringsheim (*A.*). — Sur la représentation analytique des séries infinies qui résultent d'une série donnée par inversion des termes. (153-160).

Burkhardt (*H.*). — Recherches dans le domaine des fonctions modulaires hyperelliptiques. (161-224).

Cette seconde Partie constitue la suite des recherches sur les fonctions hyperelliptiques commencées dans le tome précédent des *Mathematische Annalen* et auxquelles servent de base le Mémoire sur les fondements d'une systématique générale des fonctions hyperelliptiques du premier ordre, d'après les leçons de F. Klein, publiées également dans les *Mathematische Annalen* (t. XXXV, p. 189).

Dans son Mémoire sur les courbes normales elliptiques du $n^{\text{ième}}$ ordre et sur les fonctions modulaires correspondantes du $n^{\text{ième}}$ échelon (*Abh. Leipzig*, t. XIII), Klein a introduit des fonctions X_α, analogues à celles introduites depuis Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques, mais qui se comportent bien plus simplement si l'on effectue une transformation linéaire des périodes. Le même auteur a ensuite montré dans ses leçons comment on pouvait, dans la théorie des fonctions hyperelliptiques, introduire des fonctions $X_{\alpha\beta}$ en tout point analogues. Ces fonctions $X_{\alpha\beta}$ ont été étudiées, mais d'une façon incomplète, par Witting dans un Mémoire (*Math. Ann.*, t. XXIX, p. 157) sur les fonctions de Jacobi d'ordre k à deux variables et dans une dissertation (Göttingue, 1887) sur une configuration dans l'espace analogue à la configuration de Hesse pour les courbes planes du troisième ordre à laquelle conduit la théorie de la transformation des fonctions hyperelliptiques de genre 2.

L'auteur étudie d'une façon détaillée ces fonctions $X_{\alpha\beta}$ et d'autres fonctions $Y_{\alpha\beta}$ et $Z_{\alpha\beta}$ qui leur sont intimement reliées.

Un extrait contenant les principaux résultats contenus dans ce Mémoire a paru dans les *Göttingen Nachrichten* sous le titre : *Sur la théorie des équations de Jacobi du 40e degré, qui se présentent dans la transformation du troisième ordre des fonctions thêta à deux variables.*

Pochhammer (*L.*). — Sur quelques cas particuliers de l'équation

différentielle linéaire du second ordre à coefficients linéaires. (225-246).

Recherches sur l'intégration au moyen d'intégrales définies des équations différentielles

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-y=0$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0.$$

Pochhammer (*L.*). — Sur une équation différentielle linéaire binome du $n^{\text{ième}}$ ordre. (247-262).

Recherches sur l'intégration au moyen d'intégrales définies de l'équation différentielle

$$\frac{d^ny}{dx^n}=xy,$$

qui a déjà été étudiée par Scherk (*J. de Crelle,* t. X, p. 92), par Jacobi (*Id.*, t. X, p. 279), par Lobatto (*Id.*, t. XVII, p. 363) et par Petzval (Wienn, Braunmuller, 1853), et sur l'équation plus générale

$$\frac{d^ny}{dx^n}=x^py,$$

qui a fait l'objet de travaux de Kummer (*J. de Crelle,* t. XIX, p. 286) et de Spitzer (*Id.*, t. LVII, p. 82). En posant $x=\alpha x'$ et en choisissant convenablement la constante α, l'auteur est amené à prendre comme objet immédiat de son étude les équations

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1}{n+1}xy,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1}{(n+p)^p}x^py.$$

Schur (*F.*). — Sur la théorie des groupes de transformations finis. (263-286).

Simplification et extension des résultats déjà publiés par l'auteur dans un Mémoire des *Mathematische Annalen* (t. XXXV, p. 61) : *Exposé nouveau de la théorie des groupes finis de transformation.* Les résultats nouveaux ont été, pour la plupart, présentés déjà à la Société saxonne des Sciences [*Beweis für die Darstellbarkeit...* (*Ber. Sächs. Ges. d. Wiss.*, janvier 1890)] et ont pour but principal d'établir le théorème suivant : « Les composantes des transformations infinitésimales de tout groupe transitif, sous leur forme canonique, peuvent se représenter sous forme de quotients de séries de puissances absolument convergentes et sont, par suite, des fonctions univoques.

Kötter (*E.*). — Quelques théorèmes fondamentaux de la théorie des courbes du troisième ordre. (287-297).

Dans un Mémoire couronné par l'Académie de Berlin : *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven* (*Abhandl. Berl. Ak.*, 1887), l'auteur a établi, par des considérations purement géométriques, comment on pouvait engendrer d'une infinité de façons, à l'aide de faisceaux projectifs, les courbes planes algébriques. Relativement aux courbes du troisième ordre, ces résultats admettent une simplification remarquable. C'est l'application de la théorie générale à ce cas particulier qui est ici présentée. L'auteur a été poussé à publier ces quelques pages, par l'apparition successive d'une série de travaux sur le même sujet dus à Schröter, à Kupper et à Castelnuovo.

Schumacher (*R.*). — Sur la division des congruences de rayons du second ordre possédant des lignes focales ou des lignes singulières. Buissons de plans du second ordre en perspective avec des courbes rationnelles (298-306).

Dans un Mémoire sur la classification des congruences du second ordre (*Math. Ann.*, t. XXXVI), Sturm a signalé dans le Mémoire connu de Kummer (*Abhand. Berl.*, 1866) quelques erreurs dans l'énumération des congruences ayant une ligne focale paire de rang 0, ou bien une ligne focale tracée sur la surface focale et de rang $n-2$.

Il y a encore une autre lacune dans l'énumération des congruences de rang $n-1$ que l'auteur avait déjà signalée dans sa dissertation de Munich (1885), et qu'il développe ici plus complètement

Une première partie traite exclusivement des congruences du second ordre de rang $n-1$; une seconde partie est réservée à l'étude des courbes rationnelles qui sont lignes focales de ces congruences.

Hölder (*O.*). — Sur le cas irréductible dans l'équation du troisième degré. (307-312).

Pour l'équation du troisième degré

$$x^3 - px^2 + qx - z = 0,$$

où p, q, z sont tels que le discriminant

$$D = p^2q^2 + 18pqz - 4p^3z - 4q^3 - 27z^2$$

est positif, il n'existe aucune expression formée avec des radicaux réels qui, substituée dans l'équation, annule le premier membre. Démonstration directe de cette propriété.

Bianchi (*L.*). — Représentation géométrique du groupe de substitutions linéaires à coefficients entiers complexes et applications à la théorie des nombres. (313-333).

L'auteur considère deux groupes G et G', qui contiennent toutes les substitutions linéaires de la forme

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

α, β, γ, δ étant des nombres entiers complexes de la forme $a+bi$ pour le groupe G, de la forme $a'+b'\varepsilon$ pour le groupe G′, i et ε étant respectivement les racines primitives quatrième et troisième de l'unité.

Toute substitution du groupe G′ peut être constituée avec les trois substitutions élémentaires

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute substitution du groupe G′ peut être constituée avec les trois substitutions élémentaires

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La portion supérieure de l'espace qui est située en dehors de la sphère

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

et entre les quatre plans

$$\xi = 0, \qquad \xi = \frac{1}{2}, \qquad \eta = -\frac{1}{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2},$$

est un polyèdre fondamental P (dans le sens de Poincaré) pour le groupe G.

Construisons dans le plan $\xi\eta$ l'hexagone régulier dont le centre est en $\xi = 0$, $\eta = 0$ et qui a un couple de côtés opposés sur les droites

$$\xi = -\frac{1}{2}, \qquad \xi = \frac{1}{2};$$

si l'on construit le prisme ayant cet hexagone pour base, la portion du prisme extérieure à la sphère

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

constitue un polyèdre Π qui est le triple du polyèdre fondamental relatif au groupe G′.

Application aux formes de Dirichlet et aux formes d'Hermite des résultats obtenus précédemment. La réduction de ces formes se fait d'une façon analogue à celle des formes quadratiques ordinaires quand on emploie la division modulaire du plan.

London (*F.*). — Sur les problèmes de construction dans la théorie de la transformation réciproque et dans celle des surfaces du second ordre. (334-368).

Ces recherches sont relatives à certains systèmes de points qui jouent un role important dans la théorie de la transformation réciproque ou dans celle des surfaces du second ordre. L'auteur se propose de présenter l'expression analytique de la dépendance géométrique de ces systèmes sous la forme d'identités linéaires; l'interprétation géométrique évidente de ces identités se prête alors tout naturellement à l'étude de ces systèmes de points. On arrive de la sorte à des propriétés qui simplifient considérablement les problèmes fondamentaux de construction qui se présentent dans la génération des transformations réci-

9ue Partie

proques et quadratiques, ainsi que des surfaces du second ordre et des courbes gauches du quatrième ordre, par exemple à la construction des surfaces du second ordre donnée par 9 points, des courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce données par 8 points, à la construction du huitième point d'intersection de trois surfaces du second ordre.

Meyer (*F.*). — Sur les discriminants et les résultantes des équations aux singularités des courbes planes algébriques. (369-404).

Brill a montré dans ses recherches sur les singularités des courbes planes algébriques et sur une nouvelle espèce de courbes (*Math. Ann.*, t. XVI), ainsi que dans les deux Mémoires *Sur les formes binaires et l'équation du sixième degré* (*id.*, t. XX) et *Sur les courbes rationnelles du quatrième ordre* (*id.*, t. XII), comment l'étude d'une singularité absolument quelconque d'une courbe plane algébrique, se ramenait à l'examen d'une courbe d'espèce toute particulière qui n'est autre qu'une courbe de genre zéro ayant sa classe égale à son degré.

L'auteur examine ici les courbes planes ponctuelles de genre zéro et se propose de décomposer en facteurs irréductibles les discriminants et les résultants des équations aux arguments des points d'inflexion, des points doubles et des tangentes doubles, problèmes que Brill avait résolus dans le cas particulier cité précédemment et qui se sont imposés à l'auteur dans l'étude de questions relatives aux courbes gauches.

Réthy (*M.*). — Surfaces décomposables en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun (*Endlich-gleiche Flächen*). (405-428, avec 5 planches lithographiées).

Il s'agit ici de recherches sur les surfaces planes dont les limites ne se rencontrent pas elles-mêmes et sont telles, d'autre part, que, si l'on place une des surfaces dans deux positions différentes, le nombre des points d'intersection des courbes limites est fini. Deux surfaces qui peuvent être décomposées en un nombre fini d'éléments congrus sont appelés *endlich-gleich*. C'est à Wolfgang Bolyai que l'on doit la considération de cette notion. Dans son *Tentamen juventutem studiosam...* (Maros-Vasarhely, 1832-33) Bolyai énonce les propositions suivantes :

1. Deux polygones de même aire sont décomposables en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun.

2. Les portions non communes de deux surfaces congrues qui se couvrent en partie sont décomposables en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun.

3. Si l'on enlève dans deux surfaces congrues des morceaux respectivement congrus, les surfaces qui restent sont décomposables en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun.

La démonstration du second théorème donnée par Bolyai soulève des objections qu'il a lui-même relevées et auxquelles il a essayé de répondre, mais d'une façon insuffisante.

L'auteur se propose ici de déterminer quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle décomposition soit possible pour deux surfaces planes données et d'effectuer cette décomposition.

Lilienthal (*R. v.*). — Sur la théorie de la courbure des faisceaux de courbes. (429-451).

Suite des travaux de l'auteur dont une première partie a été publiée dans le tome XXXII, p. 545 des *Mathematische Annalen* (*Sur la courbure des faisceaux de courbes*).

Hurwitz (*A.*). — Sur les zéros de la série hypergéométrique. (452-458).

Dans le tome précédent des *Mathematische Annalen*, Klein a donné pour la détermination du nombre des zéros de la série hypergéométrique compris entre $x = 0$ et $x = 1$, une méthode élégante qui repose sur la considération des différentes formes que peuvent présenter des triangles dont les côtés sont des arcs de cercles. L'auteur suit ici une marche différente qui repose sur les mêmes principes que ceux que l'on emploie dans le théorème de Sturm pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique.

Hilbert (*D.*). — Sur l'application continue d'une ligne sur une portion de surface. (459-460).

Peano (*Math. Ann.*, t. XXXVI) a résolu, par des considérations arithmétiques, la question dont il s'agit. L'auteur donne ici une méthode un peu différente qui admet une représentation géométrique fort simple et fort concluante.

Fricke (*R.*). — Sur une classe particulière de groupes discontinus de substitutions réelles linéaires. (461-476, avec une planche).

Soient A, B, C, D des nombres de la forme $\frac{a+b\sqrt{q}}{2}$, où a, b, q sont des nombres entiers rationnels et q, en particulier, un nombre premier de la forme $4h-1$; soient, d'autre part, $\bar{A}$, $\bar{B}$, ... les nombres conjugués des nombres A, B, ...; l'auteur considère les substitutions linéaires définies par l'équation

$$S(\omega) = \frac{A\omega + B}{-\bar{B}\omega + \bar{A}},$$

A et B étant assujettis à la condition

$$A\bar{A} + B\bar{B} = 1$$

ces substitutions constituent un groupe.

Détermination des régions fondamentales correspondant à ce groupe pour les valeurs les plus simples du nombre q.

Heffter (*L.*). — Sur le problème des régions voisines. (477-508).

Sur une surface quelconque, on considère un groupe de faces tel que chacune d'elles soit voisine de toutes les autres, le voisinage se trouvant indiqué par la présence d'une ligne frontière commune et non pas seulement par l'existence de points communs; on peut alors se demander :

Quel est le nombre minimum du genre d'une surface qui admet un nombre donné de régions voisines?

Quel est le nombre maximum de régions voisines qui peuvent effectivement exister sur une surface de genre donné?

Baltzer rappelle, dans une Note sur Möbius et son ami Weiske (*Ber. Sachs. Ges.*, janvier 1885) que Möbius avait depuis longtemps énoncé le théorème suivant : « Cinq *Spatia confinia* ne peuvent exister sur une surface ». Baltzer a cru à tort que la proposition de Möbius donnait la solution du problème des quatre couleurs, posé depuis longtemps par Morgan et non encore résolu. Une démonstration de cette proposition, qu'avec quatre couleurs on peut colorier une carte géographique quelconque, a été tentée par Kempe dans l'*American Journal of Mathematics* (t. II, 1882), mais une faute de raisonnement se trouve dans ce Mémoire, comme l'a montré Heawood (*Quart. J.*, juin 1890) et comme l'a reconnu Kempe lui-même (*Proceed. Lond. Math. Soc.*).

Heawood, dans son Travail, s'occupe de la question de la coloration des cartes sur une surface de genre quelconque et, par là même, du problème qui fait l'objet du présent Mémoire où l'auteur donne une série de propositions remarquables et rencontre une série de faits nouveaux et intéressants, mais sans arriver toutefois, comme il le remarque lui-même, à une solution complète de la question.

Nekrassoff (*P.-A.*). — Sur des équations différentielles linéaires qui s'intègrent à l'aide d'intégrales définies. (509-560).

On sait depuis longtemps intégrer, au moyen d'intégrales définies, l'équation de Laplace

$$(a_n + b_n x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)y = 0,$$

et les équations hypergéométriques générales de la forme

$$Q(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{h}{1}Q'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{h(h+1)}{1.2}Q''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots$$
$$= R(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{h+1}{1}R'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{(h+1)(h+2)}{1.2}R''(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} - \ldots,$$

où $Q(x)$ et $R(x)$ sont des polynomes entiers tels que l'un des deux polynomes $Q(x)$ et $xR(x)$ est de degré n et l'autre de degré non supérieur à n (*Cf.* Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 241-274; 1887).

Goursat (*Acta Mat.*, p. 1-70; 1883) a trouvé des types nouveaux d'équations, en montrant comment on peut former une équation linéaire qui s'intègre en posant

$$y = \int_{v}^{w} z\,du.$$

où

$$z = (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - u_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (u - u_p)^{\lambda_p - 1},$$

$a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes et $u_1, \ldots, u_p$ des fonctions de x. Les limites d'intégration sont prises parmi les quantités a et u.

L'auteur généralise le résultat de Goursat en posant

$$y = \int z e^{\varphi(x,u)} \Theta(x, u)\, du,$$

où z a même signification qu'auparavant, $\Theta(x, u)$ est une fonction quelconque entière relativement à u, $\varphi(x, u)$ est une fonction quelconque rationnelle en u. L'équation différentielle correspondante comprend comme cas particuliers tous ceux qui viennent d'être cités.

L'auteur a choisi des chemins d'intégration différents de ceux employés par Goursat et qui se prêtent plus facilement à l'étude complète des solutions de l'équation. Un autre point où la méthode de l'auteur diffère de celle de Goursat est le suivant : l'auteur ne fait nulle part l'emploi des coupures d'Hermite, mais a recours à des lignes d'intégration déformables dans des conditions particulières.

Stahl (*W.*). — Sur la généralisation des courbes planes rationnelles. (561-585).

Pochhammer (*L.*). — Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique générale. (586-597).

Formation des équations différentielles auxquelles satisfont : 1° la série

$$1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}{1\, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-1}} x + \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)\, \alpha_2(\alpha_2 + 1) \ldots \alpha_m(\alpha_m + 1)}{1.2\, \rho_1(\rho_1 + 1)\, \rho_2(\rho_2 + 1) \ldots \rho_{n-1}(\rho_{n-1} + 1)} x^2 + \ldots,$$

2° la série

$$1 + \frac{x}{1.\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-1}} + \frac{x^2}{1.2\, \rho_1(\rho_1 + 1)\, \rho_2(\rho_2 + 1) \ldots \rho_{n-1}(\rho_{n-1} + 1)} + \ldots.$$

Schubert (*H.*). — Relation entre des conditions caractéristiques que l'on peut attribuer à des espaces linéaires. (598-602).

Question de prix Jablonowsky pour 1894. (603-604).

Donner une détermination nouvelle des perturbations séculaires, tout au moins des trajectoires de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, en tenant compte des termes d'ordre supérieur.

Tome XXXIX; 1891.

Hurwitz (*A.*). — Sur les surfaces de Riemann ayant des points de ramification donnés. (1-61).

Dans le tome LXXV du *Journal de Crelle*, J. Thomæ (*Contribution à la*

théorie des fonctions abéliennes) a déjà remarqué d'une façon expresse qu'une surface de Riemann peut, si l'on fait varier les sections de ramification, prendre les formes les plus diverses et que, en déplaçant un des points de ramification, la surface peut se changer en une autre essentiellement différente. H. Kasten, dans sa dissertation (Göttingue, 1876), a examiné le cas des surfaces à trois feuillets. Si n est le nombre des points de ramification, il trouve comme nombre des surfaces à trois feuillets essentiellement distinctes, le nombre $\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$, mais il présente ce nombre comme limite supérieure du nombre à déterminer.

L'auteur cite encore les travaux de Klein, sur la transformation des fonctions elliptiques, en particulier le Mémoire : *Sur la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques* (*Math. Ann.*, t. XV, p. 533), les Mémoires de Dyck, sur l'établissement et l'étude du groupe et de l'irrationnelle relatifs aux surfaces de Riemann régulières (Munich, 1879 et *Math. Ann.*, t. XVII, p. 473), le livre de Klein *Sur la théorie de Riemann des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (1882), où se rencontre la question de déterminer toutes les surfaces de Riemann ayant des ramifications données.

Les travaux suivants ont avec la question des relations plus ou moins étroites :

J. Luroth, *Note sur les sections de ramifications et les coupures dans une surface de Riemann* (*Math. Ann.*, t. IV);

A. Clebsch, *Sur la théorie des surfaces de Riemann* (*Id.*, t. VI);

A. Kneser, *Sur la théorie des fonctions algébriques* (*Id.*, t. XXIX);

D. Hilbert, *Sur les formes binaires à discriminant donné* (*Id.*, t. XXXI);

L. Schlesinger, *Sur la théorie des fonctions fuchsiennes* (*J. de Crelle*, t. CV).

Ici, l'auteur s'est proposé principalement de répondre aux questions suivantes :

Quel est le nombre N des surfaces de Riemann à n feuillets qui sont ramifiées en w points de ramification donnés?

Quel est le groupe de l'équation algébrique de degré N, de laquelle dépend la détermination de ces surfaces?

Combien y a-t-il, pour cette équation, de racines réelles et de racines imaginaires conjuguées, si l'on suppose que les w valeurs donnant les ramifications sont en partie réelles, en partie imaginaires conjuguées?

Quels sont, dans les cas les plus simples, les fonctions algébriques qui définissent les N surfaces de Riemann?

Comme exemples des résultats contenus dans le Mémoire, nous reproduisons les propositions suivantes :

Le nombre N des surfaces de Riemann à n feuillets qui présentent en w positions données une ramification simple est

pour $n =$	N =
2	1
3	$\frac{1}{3!}(3^{w-1}-3)$,
4	$\frac{1}{4!}(2^{w-2}-4)(3^{w-1}-3)$.

Le nombre des surfaces de Riemann à n feuillets de genre zéro qui ont leurs points de ramification donnés et tels qu'en tous ces points sauf un, la ramification est simple tandis qu'au dernier point les n feuillets se groupent en m_1 cycles d'ordre n_1, m_2 cycles d'ordre n_2, ..., m_ν cycles d'ordre n_ν, est égal à

$$(n + m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu - 2)!\, n^{m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu - 2} \frac{1}{m_1!} \left(\frac{n_1^{n_1}}{n_1!}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{n_\nu^{n_\nu}}{n_\nu!}\right)^{m_\nu}.$$

En particulier, le nombre des surfaces de Riemann à n feuillets de genre zéro qui ont $2n-2$ points de ramification simples est égal à

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} n^{n-1},$$

sauf pour $n = 2$, auquel cas il faut multiplier le résultat par 2.

Fricke (*R.*). — Nouvelles recherches sur les groupes automorphes des substitutions linéaires d'une variable dont les coefficients contiennent des racines carrées de nombres entiers. (62-106).

Dans un Mémoire paru dans le tome précédent des *Mathematische Annalen*, l'auteur avait étudié des substitutions dont les coefficients contenaient rationnellement la racine carrée d'un nombre premier de la forme $4h+3$. L'auteur considère le groupe des substitutions fournies par les fractions rationnelles et linéaires relativement à une variable ω que l'on peut représenter sous forme abrégée par

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{a + b\sqrt{q}}{2}, & \dfrac{c\sqrt{r} + d\sqrt{qr}}{2} \\ -\dfrac{c\sqrt{r} + d\sqrt{rq}}{2}, & \dfrac{a - b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont des nombres entiers quelconques, q et r des nombres premiers de la forme $q = 4h - 1$, $r = 4h + 1$, le nombre q étant positif et ces différents nombres étant assujettis à la condition

$$a^2 - qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 4.$$

Ce groupe est représenté par $\Gamma_8^{(q,r)}$. Il est contenu dans d'autres groupes $\Gamma_4^{(q,r)}$, $\Gamma_2^{(q,r)}$, $\Gamma^{(q,r)}$ et enfin $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$.

Détermination du groupe fondamental pour le groupe $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$.

Emploi de ces groupes et de la division correspondante du plan dans la théorie arithmétique de certaines formes quadratiques, dans les recherches sur l'équivalence et la réduction de ces formes.

Stolz (*O.*). — Sur l'axiome d'Archimède. (107-112).

Veronese a publié dans les *Memorie d. Acc. dei Lincei* (t. IV_4, p. 603) un Mémoire sur le continu rectiligne et sur l'axiome V d'Archimède; il a communiqué, d'autre part, à M. Stolz, quelques remarques sur ses *Vorlesungen über*

allgemeine Arithmetik qui ont engagé ce dernier à publier la présente Note qui confirme les idées de Veronese.

Schur (*F.*). — Sur l'introduction des éléments dits *idéaux* en Géométrie projective. (113-124).

On doit à F. Klein la proposition importante que la Géométrie projective peut être construite sur une base indépendante de l'axiome des parallèles *Math. Ann.*, t. VI, p. 132). Klein avait simplement indiqué rapidement la raison de ce fait remarquable; c'est à Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882) que l'on doit la démonstration explicite de ce théorème fondamental. L'auteur se propose de revenir ici sur cette question en suivant l'ordre des idées de Klein plutôt que celui de Pasch ou encore de Lindemann (*Vorlesungen über Geometrie*, t. II, p. 433).

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie des criterium de convergence dits *de seconde espèce* (Complément au Mémoire : *Théorie générale de la divergence et de la convergence des séries à termes positifs,* tome XXXV de ce journal). (125-128).

Dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. IV, p. 278), Giudice a publié une Note « *Un nouveau criterium de convergence pour les séries à termes positifs.* Ce nouveau criterium est le suivant :

Pour que la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

soit convergente, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse déterminer une fonction a_n telle que pour toute valeur de n on ait

$$a_n > 0, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Or, si l'on met la dernière égalité sous la forme

$$\frac{1}{a_n}\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \geqq 1,$$

on voit que ce n'est rien autre chose que le criterium de Dini-Kummer

$$\varphi(n)\frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1) \geqq \rho \qquad (\rho > 0),$$

où l'on pose

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\rho}\varphi(n).$$

Le théorème n'est donc pas nouveau.

Brill (*A.*). — Sur les fonctions de deux variables et sur un théorème de Nœther. (129-141).

Soient trois séries de puissances (ou bien des fonctions entières) F, Φ, Ψ de $x - x_0$, $y - y_0$ qui pour $x = x_0$, $y = y_0$ s'annulent de telle façon que l'on puisse déterminer deux fonctions entières A, B de x, y, en sorte que l'équation

$$F = A\Phi + B\Psi$$

soit satisfaite en ce qui concerne les termes de degré inférieur en $x - x_0$, $y - y_0$ jusqu'à un degré donné à l'avance, mais d'ailleurs quelconque; on peut transformer les fonctions A, B en des séries infinies A′, B′ telles que l'équation

$$F = A'\Phi + B'\Psi$$

soit satisfaite d'une façon formelle en ce qui concerne tous les termes de degré quelconque, les séries A′, B′ ayant une région de convergence finie dans le voisinage de x_0, y_0.

Picard (*E.*). — Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées (Extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein). (142-144).

Le Mémoire de Bianchi, sur les groupes de substitution, paru dans le présent volume des *Mathematische Annalen* contient des résultats intéressants qui peuvent être présentés sous une forme différente si l'on a recours à la méthode indiquée par l'auteur dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1884) : *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan.*

Kiepert (*L.*). — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (Premier Mémoire). (145-178).

Dans une série continue de travaux (*Journal de Crelle*, t. LXXXVII, p. 199-216; t. LXXXVIII, p. 205-212; t. XCV, p. 218-231; *Math. Ann.*, t. XXVI, p. 369-454; t. XXXII, p. 1-135; t. XXXVII, p. 368-398), l'auteur s'est efforcé dans l'étude de la transformation elliptique, de déterminer, sous forme simple, les relations algébriques qui se présentent dans la multiplication complexe.

Greenhill a employé une partie de ces résultats, mais ne connaissait pas les deux derniers Mémoires cités précédemment, qui contiennent précisément les propriétés les plus remarquables pour l'étude approfondie du sujet considéré.

Dans un Mémoire *Sur la théorie des fonctions elliptiques* (*Acta Mat.*, t. XI, p. 333-390) et dans son Ouvrage : *Fonctions elliptiques*, H. Weber remarque que les équations L de Kiepert sont moins appropriées au calcul des modules singuliers que les équations qu'il introduit et qu'il appelle *équations modulaires de Schläfli.* L'auteur reconnaît fort bien la justesse de l'objection de Weber, mais il montre ici que les équations L ont l'avantage de permettre d'effectuer fort simplement le calcul des invariants singuliers. De plus, les équations L avaient permis à l'auteur, dans ses Mémoires précédents, de former des équations aux paramètres qui contiennent, comme il l'a déjà montré, les équations modulaires de Schläfli comme cas particulier.

Première Section. — *Théorie générale de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.*

§ 1. Notions de multiplication complexe.

§ 2. Réduction de la multiplication complexe relative au nombre *m* à une transformation de degré *n*.

§ 3. Nombre des invariants singuliers qui correspondent à la même valeur D du déterminant relatif à la multiplication complexe.

Deuxième Section. — *Calcul des invariants singuliers à l'aide des équations* L.

§ 4. Racines de l'équation L, qui correspond à la multiplication complexe avec le multiplicateur *m*.

§ 5. Exemple du calcul des invariants singuliers de première espèce.

§ 6. Exemple du calcul des invariants singuliers de seconde espèce.

Voss (*A.*). — Sur la théorie de la courbure des surfaces. (179-256).

On peut considérer comme propriété fondamentale d'une surface gauche que quatre points quelconques de cette surface ne sont pas, en général, dans un plan.

Si l'on considère le volume du tétraèdre ayant ces quatre points pour sommets, on peut se demander en quoi le volume d'un tel tétraèdre infiniment petit, relatif aux points de la surface, dépend de la courbure de cette surface.

Soit P un point non singulier de la surface; choisissons un système de coordonnées curvilignes, prenons les points $P_1 P_2$ sur les courbes passant par le point P et le point P_3 au point de rencontre des lignes de coordonnées qui passent respectivement par P_1 et P_2.

Le volume T du tétraèdre $PP_1P_2P_3$ divisé par le carré de la surface du parallélogramme déterminé par PP_1P_2 a, en général, une limite différente de zéro indépendante de la direction suivant laquelle le point P_3 se rapproche du point P; cette limite n'offre pas de relation avec les éléments de la courbure en P. Mais, si l'on prend pour système u, v de coordonnées un système conjugué, la limite est toujours zéro. Divisons alors par le carré de la longueur de l'arc PP_3, on est alors conduit à une nouvelle limite que l'auteur appelle *courbure paramétrale de la surface;* cette courbure dépend, en effet, en général des paramètres u, v. L'auteur se demande sous quelles conditions la courbure paramétrale exprime, à un facteur près, la courbure normale relative à la direction PP_3. Il examine ce qui arrive si l'on effectue une transformation projective et rencontre de la sorte certaines expressions invariantes.

§ 1. Volume d'un tétraèdre ayant pour sommets quatre points d'une surface.

§ 2. Notion de courbure paramétrale d'une surface.

§ 3. Transformation projective d'une surface donnée en coordonnées-points. Invariants différentiels.

§ 4. Surfaces développables, surfaces à courbure paramétrale nulle.

§ 5. Détermination de tous les systèmes de coordonnées conjugués relativement auxquels la courbure paramétrale correspond à la courbure normale.

§ 6. Systèmes conjugués de coordonnées à invariants égaux sur quelques espèces de surfaces.

§ 7. De la transformation d'une surface par normales parallèles.

§ 8. Les coordonnées tangentielles d'une surface et sa transformation projective.

§ 9. Courbure paramétrale en coordonnées tangentielles et systèmes dualistiques de coordonnées.

§ 10. Transformation d'une surface en coordonnées tangentielles.

Killing (*W.*). — Sur les espaces de Clifford-Klein. (257-278).

Remarques et développements sur la notion des espaces que Clifford avait signalés et que Klein a présentés dans son Mémoire sur la Géométrie non euclidienne (*Math. Ann.*, t. XXXVII, p. 544-572).

Hurwitz (*A.*). — Sur la représentation approchée des nombres irrationnels par des fractions rationnelles. (279-284).

Étant donné un nombre irrationnel quelconque α, la théorie des fractions continues permet de trouver une suite illimitée de fractions rationnelles

$$\frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x_2}{y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{y_n},$$

telle que l'on ait, indépendamment du signe

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{y_n^2}.$$

Hermite (*J. de Crelle*, t. XLI, p. 195) a montré comment on pouvait trouver une série des fractions telles que l'on ait l'approximation plus grande

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{3}\, y_n^2}.$$

L'auteur s'est demandé si l'on ne peut pas encore arriver à une approximation plus grande, et il établit les propositions suivantes :

On peut approcher d'une irrationnelle α quelconque par une suite de fractions telles que l'on ait, indépendamment du signe

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{5}\, y_n^2}.$$

Soit λ un nombre quelconque plus grand que $\sqrt{5}$, il existe des irrationnelles α pour lesquelles on ne peut pas former de suite illimitée de fractions telles que l'on ait

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda y_n^2}.$$

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les intégrales algébriques et sur les intégrales représentables par des quadratures de fonctions algébriques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (285-292).

Scheffers (*G.*). — Réduction des systèmes de quantités complexes à des formes types. (293-390).

Application de la théorie des groupes de transformation de Lie à la théorie des systèmes de quantités complexes. Nous devons nous contenter de donner la Table des matières de ce Mémoire intéressant; nous reproduisons, en outre, la bibliographie que l'auteur donne à la fin, en remarquant cependant que le Mémoire de B. Peirce avait été publié (en lithographie, il est vrai), bien avant 1881 et en signalant une lacune regrettable, celle du Mémoire bien connu de Laguerre.

Remarques préliminaires.

§ 1. Notion de système de quantités complexes.

§ 2. Séparation de tous les systèmes de quantités en deux classes.

§ 3. Considération des systèmes non quaternioniens.

§ 4. Réductibilité, addition et multiplication de systèmes de quantités.

§ 5. Suite des considérations sur les systèmes non-quaternioniens.

§ 6. Détermination de tous les systèmes non-quaternioniens à n unités dont le degré est égal à n, $n-1$, $n-2$.

§ 7. Les systèmes non quaternioniens dont le degré est égal à 2.

§ 8. Détermination de tous les systèmes non quaternioniens irréductibles à 2, 3, 4, 5 unités.

§ 9. Formation de tous les systèmes de quantités irréductibles à 2, 3, 4, 5 unités.

§ 10. Généralités sur les systèmes quaternoniens.

§ 11. Les systèmes de quantités qui contiennent le système des quaternions de Hamilton.

§ 12. Établissement de tous les systèmes quaternioniens irréductibles à 4, 5, 6, 7 et 8 unités.

§ 13. Différentes remarques sur les systèmes quaternioniens.

§ 14. Historique et bibliographie.

H. Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. I. Theil : Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, 1867.

C. Peirce, Description of a notation for the logic of relatives (*Mem. Am. Acad. Sciences*, IX, 1870).

Clifford, Preliminary sketch of biquaternions (*Proc. L. M. S.*, t. IV, p. 381-395).

— Further note on biquaternions, Notes on biquaternions (1876) (*Math. Papers*, p. 385-396; 1892).

Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen [*J. de Crelle*, t. LXXXIV, p. 1-63, 1878 (*Cf.* § 14)].

Pincherle, Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secon i principii del prof. Weierstrass [*G. di Mat.*, t. XVIII, 1880 (*Cf.* p. 203-210)].

Lipschitz, Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions (*C. R.*, t. XCI, p. 619-621, 660-664, 1880, et *Bull. Darb.*, t. XI_2, p. 115-120, 1887).

B. Peirce, Linear associative algebra. With notes addenda by C. S. Peirce, son of the author (*Amer. J.*, t. IV, p. 97-229, 1881).

Cayley, On the 8-square imaginaries (*Amer J.*, t. IV, p. 293-296, 1881).

— On associative imaginaries (*J. Hopk. Univ. Circ.*, t. II, p. 15, 1882).

C.-S. Peirce, On a class of multiple algebra (*Id.*, p. 3).
Sylvester, A word on nonions (*Id.*, p. 241).
— Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton (*C. R.*, t. XCVII, 1336-1340, 1883; t. XCVIII, p. 273-276, 471-475, 1884).
Cayley, On double algebra (*Proc. L. M. S.*, t. XV, p. 185-197; 1883-84).
Poincaré, Sur les nombres complexes (*C. R.*, t. XCIX, p. 740-742, 1884).
Sylvester, On the laws of motion in the world of universal Algebra (*J. Hopk. Univ. Circ.*, 1884).
— Lectures on the principles of universal Algebra (*Amer. J.*, t. VI, p. 270-286, 1884).
Weierstrass, Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (*Gött. Nach.*, p. 395-419, 1884).
Schwarz, Bemerkungen zu der in Nr. 10 dieser Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn Weierstrass (*Id.*, p. 516-519).
Dedekind, Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (*Id.*, p. 141-159, 1885).
Petersen, Om algebraens Grundbegreber (*Tidssk. f. Math.*, t. III_5, p. 1-22, 1885).
Berloty, Théorie des quantités complexes à *n* unités principales (Thèse. Paris, 1886).
Buchheim, Note on linear association algebra (*Mess. Math.*, t. XV, p. 76-78, 1886).
Hölder, Bemerkungen zu der Mittheilung des Herrn Weierstrass (*Gött. Nach.*, p. 241-244, 1886).
Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 2 Theil. Leipzig, 1886 (*Cf.* 1-29).
Dedekind, Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Grössen (*Gött. Nach.*, p. 1-7; 1887).
Buchheim, Note on double algebra (*Mess. Math.*, t. XVI, p. 62-63).
— Note on triple algebra (*Id.*, p. 111-114).
Ed. Weyr, Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices (*Prag. Ber.*, p. 616-618, 1887).
— Note sur la théorie des quantités complexes formées avec *n* unités principales (*Bull. Darb.*, XI_2, p. 205-215, 1887).
Cayley, On multiple algebra (*Quart. J.*, t. XXII, p. 270-308; 1887).
J. Petersen, Ueber *n*-dimensionale complexe Zahlen (*Gött. Nach.*, p. 489-502, 1887).
F. Schur, Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildete complexen Grössen (*Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 49-60, 1888).
Hölder, Bemerkungen zur Quaternionentheorie (*Gött. Nach.*, p. 34-38, 1889).
Study, Ueber Systeme von complexen Zahlen (*Id.*, p. 237-268).
— Complexe Zahlen und Transformationsgruppen (*Leipz. Ber.*, p. 177-228, 1889).
Scheffers, Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen (*Id.*, p. 290-307).
Lie, Ueber irreducibele Berührungstransformationsgruppen (*Id.*, p. 320-327 (*Cf.* 326-327).

Scheffers, Ueber die Berechnung von Zahlen-systemen (*Id.*, p. 400-457).
Ed. Weyr, Zur Theorie der bilinearen Formen (*Monatsh. f. M. P.*, t. I, p. 163-236, 1890).
Study, Ueber Systeme complexen Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen (*Id.*, p. 283-355).
Taber, On the theory of matrices (*Amer. J.*, t. XII, p. 337-396, 1890).
Study, Recurrirende Reihen und bilineare Formen (*Monatsh. f. M. P.*, t. II, p. 23-54, 1891).
Rohr, Ueber die aus fünf Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme (*Dissert. Marburg*, 1890).

Horn (*J.*). — Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à une variable indépendante. I. (391-408).

La théorie des solutions régulières des systèmes d'équations différentielles linéaires à une variable indépendante a été étudiée par Sauvage (*Ann. E. N. S.*, 1886, 1888, 1889), par Grünfeld (*Denks. Wien. Akad.*, 1888) et par Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, p. 441-469). L'auteur se place ici à un point de vue différent et considère un système d'équations différentielles de la forme

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + \ldots)y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m).$$

Forme normale du système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier.

Méthode pour le calcul des solutions.

Forme des solutions pour les diviseurs élémentaires simples du déterminant caractéristique.

Forme des solutions pour les diviseurs élémentaires multiples du déterminant caractéristique.

Maurer (*L.*). — Sur les groupes de transformation continus. (409-440).

Relativement aux groupes de transformation continus, on étudie d'ordinaire les propriétés générales des groupes. L'auteur se propose d'examiner quelles sont les conditions accessoires que l'on doit ajouter à celles qui résultent de l'existence même de la notion de groupe pour que les substitutions du groupe soient rationnelles ou tout au moins algébriques.

Dans le présent Travail, l'auteur donne une partie de ces conditions accessoires, celles qui se rapportent à la composition des groupes.

Study (*E.*). — Des mouvements et des perversions (Umlegungen) (Premier et second Mémoires). (441-566).

L'étude du mouvement, si l'on considère les positions initiale et finale d'un même corps, appartient à la Géométrie élémentaire et a fait le sujet de nombreuses recherches de J. Bernoulli, d'Alembert, Euler, Möbius, Chasles, etc.

Étant donnée une figure, si l'on considère son image dans un miroir, on a ce que l'auteur appelle une *Umlegung*, ce que l'on peut appeler une *perversion de la figure*. L'étude des perversions a relativement peu attiré l'attention.

L'auteur se propose, dans une série de Mémoires, de reprendre dans son ensemble, la théorie des mouvements et des perversions, en mettant à profit les progrès réalisés dans l'étude des groupes de transformation, de la Géométrie non euclidienne, de la théorie des substitutions orthogonales et de sa généralisation, des transformations linéaires des formes quadratiques et enfin des systèmes de quantités complexes, théories diverses qui se rattachent par un point ou par l'autre à la question générale qu'il veut considérer.

Les deux premiers Mémoires sont consacrés à l'étude géométrique d'une part, analytique de l'autre, des mouvements et des perversions dans l'espace euclidien.

I. Théorie élémentaire des mouvements et des perversions.

II. Représentation au moyen de paramètres des mouvements et des perversions.

Doehlemann (*K.*). — Sur les transformations de Cremona dans le plan qui contiennent une courbe qui se correspond à elle-même point par point. (567-597).

Propriétés générales des transformations qui laissent une courbe fixe. Citons comme exemple le théorème suivant :

« Si une transformation de degré n laisse fixe une courbe d'ordre μ, il existe une limite supérieure du degré de la transformation. En effet, si l'on pose $n - \mu = k$, on a toujours

$$n \leqq 3k + 1.$$

Le nombre k est ce que l'on appelle *la classe de la transformation.*

Si $k = 0$, $\mu = n$; les transformations de classe 0 sont les transformations de de Jonquières. L'auteur étudie particulièrement ces transformations qui laissent des courbes fixes.

Si $k = 1$, $\mu = n - 1$ et $n \leqq 4$.

Si $k = 2$, $\mu = n - 2$ et $n \leqq 7$.

L'auteur donne, par exemple, la génération géométrique de la transformation de première classe et du quatrième ordre et montre quels sont les cas singuliers qui se présentent alors. Il montre, dans le cas des transformations de seconde classe, l'existence de toute une série de cas correspondant aux valeurs 2, 3, 4, 5 du nombre n.

Schilling (*Fr.*). — Sur la signification géométrique des formules de la Trigonométrie sphérique dans le cas d'arguments complexes. (598-600).

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

Tome I; 1891.

Appell. — Sur une fonction analogue à la fonction Θ. (47-52).

La fonction

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4 + 4xn^3 + 6yn^2 + 4zn},$$

où a est une constante dont la partie réelle est négative, jouit de propriétés analogues à la fonction $\Theta(z) = \Sigma e^{an^2 + 2zn}$. La fonction plus générale où l'exposant serait d'un degré pair quelconque en n se traiterait comme la fonction $\varphi(x, y, z)$ qui fait l'objet de la Note de M. Appell. Ces fonctions donnent naissance à des fonctions méromorphes qui sont laissées invariables par un certain nombre de substitutions linéaires.

Jamet. — Sur un théorème de Statique. (53-60).

M. Jamet donne une intégrale complète de l'équation qui correspond au problème suivant : « Tous les points de l'espace étant soumis à des forces telles qu'en chaque point P d'une surface de niveau la résultante de ces forces soit proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent en P à la surface, déterminer la forme de ces surfaces. »

Tome I (Supplément); 1892.

Fabry (Ch.). — Théorie de la visibilité et de l'orientation des franges d'interférence. (1-100).

La partie théorique est très intéressante à lire au point de vue mathématique.

Tome II; 1892.

Sauvage (L.). — Questions de cours. (1-31).

I. *Sur l'intégration des différentielles rationnelles.* — Cette intégration est traitée de la manière la plus générale au moyen des deux théorèmes suivants :

« α. Étant donnée une fraction irréductible $\frac{N}{D}$, nulle pour x infini, si l'on peut décomposer D en deux facteurs D_1 et D_2 premiers entre eux, on peut d'une seule manière mettre la fraction $\frac{N}{D}$ sous la forme $\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2}$, où les deux termes s'annulent pour x infini. »

« β. Une fraction irréductible de la forme $\frac{N}{D^\alpha}$ peut se décomposer en fractions simples par le moyen de divisions successives au diviseur D. »

De la théorie précédente on déduit facilement la belle théorie de M. Hermite sur la partie algébrique et sur la partie transcendante de l'intégration d'une différentielle rationnelle $\frac{N}{D}\,dx$.

II. *Définition d'une intégrale multiple.* — La définition d'une intégrale multiple exige d'autres développements que ceux que l'on trouve ici. Il s'agit seulement de préciser quelques idées fondamentales.

Amigues (*E.*). — La théorie des ensembles et les nombres incommensurables. (33-42).

Développement de la méthode des ensembles dans la définition des incommensurables, et démonstration de la possibilité d'introduire cette méthode dans l'enseignement des lycées.

Appell. — Sur des potentiels conjugués. (53-58).

Soit le système

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

si l'on pose

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

on aura

$$(2)\qquad \Delta X=0,\qquad \Delta Y=0,\qquad \Delta Z=0,\qquad \Delta T=0.$$

Dans le système (1), on peut choisir arbitrairement les deux fonctions Z et T, pourvu qu'elles vérifient les relations (2), et obtenir ensuite les fonctions X et Y.

Rivereau (*l'Abbé*). — Zéros de la fonction

$$\varphi(x,y,z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{an^4+4xn^3+6yn^2+4zn}.$$

(59-62).

C'est la fonction étudiée par M. Appell dans le Tome I du même journal.

Mangeot. — Sur les nombres de Bernoulli. (63-65).

Rapprochement intéressant entre les nombres de Bernoulli et le triangle de Pascal.

Tome IV; 1893.

Fabry (*L.*). — Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes. (1-214).

Sauvage (*L.*). — Conditions de régularité d'un système différentiel linéaire et homogène. (1-14).

Tout système régulier de la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

peut être ramené à la *forme canonique*, où les coefficients a_{ij} sont simplement infinis pour $x = a$, et par le moyen d'une suite de substitutions de formes simples. Le seul cas qui donne lieu à un énoncé pratique est celui qui correspond à une équation unique d'ordre n de M. Fuchs.

Tome VI; 1895.

Rougier (*J.*). — Sur quelques sous-groupes de onzième classe du groupe modulaire. (1-112).

L'exposition des théories de M. Klein sur les sous-groupes du groupe modulaire, et l'étude de certains de ces sous-groupes dont l'étude ne comporte pas l'emploi de congruences suivant un module entier, étude qui, croyons-nous, n'avait pas encore été envisagée, fait l'objet du Mémoire de M. Rougier.

Chapitre I. — Après avoir rappelé quelques généralités sur le rapport ω des périodes de l'intégrale elliptique de première espèce, sur l'invariant absolu J de cette intégrale et les relations entre ω et J, sur les substitutions modulaires, le groupe et la division modulaires, l'auteur arrive aux théories de M. Klein. D'une façon très nette sont définis les sous-groupes du groupe modulaire, l'*indice* et le système des *substitutions représentantes* d'un sous-groupe Γ_μ. On est ensuite conduit à reconnaître l'existence d'un *polygone* fondamental pour Γ_μ, et la possibilité de la division du demi-plan positif des ω figurant comme argument dans les substitutions du groupe en une infinité de polygones, congruents entre eux, recouvrant une seule fois et sans lacune le demi-plan des ω. Chacun d'eux peut d'ailleurs servir de polygone fondamental pour Γ_μ.

En même temps se trouve établie la possibilité d'engendrer le groupe Γ_μ par la répétition et la réitération d'un nombre fini μ de *substitutions génératrices* que l'on sait former si l'on connaît le polygone fondamental de Γ_μ. L'étude des relations entre les sous-groupes de même indice conduit ensuite à la

notion de *sous-groupes semblables* et de *sous-groupes invariants* dans le groupe modulaire. Ces derniers sont caractérisés par la propriété d'être transformés en eux-mêmes par toute substitution modulaire de première espèce.

L'étude précédente peut être transportée sur des surfaces en dehors du plan. Car les arêtes qui limitent le polygone fondamental F_μ d'un sous-groupe Γ_μ étant conjuguées deux à deux, si l'on déforme F_μ dans l'espace à trois dimensions de manière que chaque arête coïncide avec sa conjuguée, on obtiendra une surface φ_μ, fermée et de forme très arbitraire, mais qui présentera une division caractéristique en triangles. On appelle *genre* du sous-groupe Γ_μ le genre de la surface fermée φ_μ.

Il est facile d'établir, pour un groupe quelconque Γ_μ, une formule donnant le genre du groupe en fonction de son indice et des nombres qui caractérisent la réunion des triangles à leurs sommets sur φ_μ.

Le cas d'un grouge Γ_μ invariant dans le groupe modulaire conduit à une surface φ_μ *régulière,* dans le sens attribué à ce mot par les géomètres allemands, et la formule qui donne le genre se simplifie alors notablement.

Le groupe Γ_μ peut être défini par le polygone F_μ, ou par la surface φ_μ, ou même par toute surface fermée, portant une division en 2μ triangles, se groupant autour de leurs sommets de manière à satisfaire à un petit nombre de conditions. Car on démontre qu'avec une telle surface on peut définir complètement un système déterminé de sous-groupes semblables d'indice μ. C'est *le théorème de la ramification.* En étendant cette proposition à certaines divisions régulières planes, formées d'une infinité de triangles curvilignes, dont la définition a été donnée par M. Schwartz, on définit non seulement une série intéressante de groupes invariants, mais encore la *classe* du sous-groupe Γ_μ.

Enfin le polygone F_μ, ou la surface φ_μ, peuvent, par représentation conforme sur le plan de la variable complexe J, être transformés en une surface de Riemann à μ feuillets, à ramifications caractéristiques.

Réciproquement, toute surface de Riemann à μ feuillets, construite sur le plan des J, et dont la ramification satisfait à certaines conditions déterminées, suffit pour déterminer un système de sous-groupes d'indice μ du groupe modulaire. C'est une autre forme du théorème de la ramification.

On démontre ensuite que les fonctions de la surface de Riemann à μ feuillets, considérées comme des fonctions de ω, sont des *fonctions modulaires.*

Chapitre II. — Le problème de la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques admet deux résolvantes du onzième degré; la surface de Riemann à onze feuillets qui correspond à l'une de ces résolvantes, et qui est du genre zéro, présente une ramification caractéristique satisfaisant aux conditions du théorème de la ramification. Il y a d'ailleurs neuf autres surfaces de Riemann jouissant des mêmes propriétés. Ces dix surfaces définissent dix systèmes composés chacun de onze sous-groupes semblables dans le groupe modulaire. L'existence de ces sous-groupes, leur étude et celle des fonctions modulaires correspondantes forment le second Chapitre.

Une discussion purement arithmétique conduit d'abord à la détermination des dix surfaces de Riemann, et de leur groupe de monodromie. De même une discussion géométrique très simple permet de caractériser un sous-groupe de chacun des systèmes par la construction de son polygone fondamental. Cela fait, l'auteur passe à l'étude arithmétique des sous-groupes γ_i. On reconnaît que, seuls, ceux de ces sous-groupes qui correspondent aux résolvantes du problème

de la transformation, sont formés de substitutions dépendant de congruences suivant le module 11. Les autres ne présentent aucun caractère arithmétique simple. La question délicate de l'isomorphisme des groupes γ_i est ensuite résolue en considérant simplement les relations qui existent entre les substitutions de l'un des groupes.

L'étude des résolvantes de l'équation modulaire qui correspondent aux dix sous-groupes γ_i montre que *théoriquement* les coefficients de ces résolvantes peuvent être exprimés rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre eux. Mais le calcul pratique de ces coefficients est inextricable. D'ailleurs on n'a aucune loi arithmétique dans la formation des substitutions des groupes γ_i *non congruents*, et par suite, vu le degré élevé du problème de Galois correspondant (degré dont on donne dans chaque cas une limite inférieure), il ne semble pas que l'on puisse trouver de méthode rapide spéciale à côté de la méthode indiquée.

Cette étude de sous-groupes non congruents suivant un module entier, malgré ses résultats en partie négatifs, fait l'originalité du Mémoire de M. Rougier.

SITZUNGSBERICHTE der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Second semestre 1891 [1].

O. Krigar Menzel et A. Rapp. — Sur les cordes vibrantes. (613-629).

Étude expérimentale, avec deux planches.

L. Kronecker. — Sur la date à laquelle Jacobi a trouvé la relation fondamentale à quatre termes entre les produits des fonctions thêta et sur la marche qu'il a suivie pour y parvenir. (653-659).

Dans son Mémoire : *Formulæ novæ in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales* [2], Jacobi établit la formule

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+a+b) - \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b) \\ &\quad = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(u+a+b) \end{aligned} \right.$$

« quæ est formula nova maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum ». Il déduit ensuite de cette formule (I) la formule

$$\text{(II)} \quad \frac{\Theta(0)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)\,\Theta(a+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)} = 1 + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+a+b).$$

---

(1) Voir *Bulletin*,

(2) *Werke*, t. I, p. 335-341.

Kronecker fait observer qu'inversement on peut déduire la formule (I) de la formule (II) de sorte que ces deux formules sont entièrement équivalentes.

La formule (II) peut d'ailleurs s'écrire

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}(b)\,\mathrm{H}(u)\,\mathrm{H}(u+a+b)+\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b) \\ &\quad=\Theta(0)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)\,\Theta(a+b) \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{aligned} &\sum_{(n_0,\,n_1,\,n_2,\,n_3)}(-1)^{\frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)}\,q^{\frac{1}{4}(n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2)}\,e^{[n_0(u+a+b)+n_1a+n_2b+n_3u]\frac{\pi i}{2\mathrm{K}}} \\ &\quad=\sum_{(m_0,\,m_1,\,m_2,\,m_3)}(-1)^{m_0+m_1+m_2+m_3}\,q^{m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2}\,e^{[m_1(u+b)+m_2(u+a)+m_3(a+b)]\frac{\pi i}{\mathrm{K}}}. \end{aligned}\right.$$

$$\left(\begin{aligned} &m_0,\,m_1,\,m_2,\,m_3=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots; \\ &n_0,\,n_1,\,n_2,\,n_3=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots;\ n_0\equiv n_1\equiv n_2\equiv n_3 \pmod 2 \end{aligned}\right).$$

Sous cette forme (III) il est aisé de vérifier directement la formule fondamentale de Jacobi; la marche suivie par Kronecker est très simple et très naturelle.

Si, après avoir posé $u+a+b=v$ dans le premier membre de l'équation (III), on envisage v comme une nouvelle variable, on voit, à l'aide des mêmes relations qui ont servi à vérifier la formule fondamentale, que ce premier membre se transforme aisément en une expression de même forme dans laquelle a, b, u, v sont remplacées par

$$\frac{1}{2}(-a+b+u+v),\quad \frac{1}{2}(a-b+u+v),$$
$$\frac{1}{2}(a+b-u+v),\quad \frac{1}{2}(a+b+u-v);$$

en changeant les lettres a, b, u, v respectivement en $-w$, x, y, z, on en déduit immédiatement la relation fondamentale à quatre termes entre les produits des fonctions thêta telle que l'a établie Jacobi [1]

$$\text{(IV)}\quad\left\{\begin{aligned} &\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)-\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z) \\ &\quad=\vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z')-\vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z'), \\ &\text{où} \\ &\qquad w'=\frac{w+x+y+z}{2},\qquad x'=\frac{w+x-y-z}{2}, \\ &\qquad y'=\frac{w-x+y-z}{2},\qquad z'=\frac{1}{2}(w-x-y+z). \end{aligned}\right.$$

La formule (III) se déduit d'ailleurs de la formule (IV) en faisant dans cette dernière $z'=0$.

Ces considérations amènent Kronecker à admettre que Jacobi a trouvé la re-

(1) *Werke*, t. I, p. 507.

lation fondamentale à quatre termes (IV) bientôt après la relation fondamentale à trois termes (III). Or il a trouvé cette dernière le 21 septembre 1835.

D'ailleurs, dans son Cours sur les fonctions elliptiques professé en 1835-1836 à l'Université de Kœnigsberg, Cours qui a été rédigé par Rosenhain, Jacobi prend comme point de départ de son exposition de la théorie des fonctions elliptiques la formule (IV). Donc la découverte de cette formule fondamentale a eu certainement lieu entre le 21 septembre et le milieu du mois d'octobre 1835.

Les notations $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ datent aussi des derniers mois de l'année 1835.

L. Kronecker. — Les coordonnées de Clausius. (881-890).

La méthode donnée par Clausius pour établir l'équation de Poisson a sur celle de Gauss l'avantage de supposer moins de propriétés à la fonction qui représente la densité. Clausius fait d'ailleurs usage de nouvelles coordonnées qui conviennent mieux à la nature de la question que celles de Descartes.

Dans sa démonstration [1] du théorème de Cauchy et déjà dans ses recherches [2] sur le potentiel dans un espace à n dimensions, Kronecker a fait usage de ces coordonnées de Clausius en les modifiant légèrement. Il se propose maintenant de démontrer, en faisant usage de ces coordonnées, l'équation de Poisson dans l'espace à n dimensions.

Cette équation est la suivante

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = -\varpi\,\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

ϖ représente la mesure du contenu de la variété sphérique à $(n-1)$ dimensions

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1;$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont définis par les intégrales

$$X_k = \int \varepsilon(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\frac{\partial P(a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k}\,da_1\,da_2\ldots da_n,$$

étendues à tous les éléments pour lesquels on a

$$F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0,$$

où F_0 est une fonction donnée de n variables, ε une autre fonction donnée de n variables qui représente la loi de répartition de la densité à l'intérieur de l'espace à n dimensions envisagé qui est limité par la variété à $n-1$ dimensions $F_0 = 0$, où enfin $P(a_1, \ldots, x_n)$ est le potentiel élémentaire des deux points $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n$ de sorte que l'on a

$$P(a_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n-2}\left[(a_1 - x_1)^2 + \ldots + (a_n - x_n)^2\right]^{-\frac{n-2}{2}}.$$

---

(1) *Monatsberichte*, juillet 1880.

(2) 1868-1869.

Jacobi ([3]) a déterminé ϖ. Mais on peut aussi déduire la valeur de ϖ de la relation de Dirichlet ([4])

$$\Gamma\left(1+\frac{m_1}{p_1}+\frac{m_2}{p_2}+\ldots+\frac{m_n}{p_n}\right)\int z_1^{m_1-1}z_2^{m_2-1}\ldots z_n^{m_n-1}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n$$
$$=\frac{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}}{p_1p_2\ldots p_n}\,\Gamma\frac{m_1}{p_1}\,\Gamma\frac{m_2}{p_2}\ldots\Gamma\frac{m_n}{p_n},$$

où l'intégrale est étendue à toutes les valeurs positives de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pour lesquelles on a

$$\left(\frac{z_1}{a_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{z_2}{a_2}\right)^{p_2}+\ldots+\left(\frac{z_n}{a_n}\right)^{p_n}<1;$$

on en déduit, en effet, pour $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, $m_1=m_2=\ldots=m_n=1$, $p_1=p_2=\ldots=p_n=2$, la relation

$$\int dz_1\,dz_2\ldots dz_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\frac{n}{2}},$$

où l'intégrale est étendue à toutes les valeurs positives de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pour lesquelles on a

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2<1;$$

or cette intégrale est manifestement égale à $\frac{1}{n}\varpi$; on a donc

$$\varpi=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\frac{n}{2}}.$$

On peut toujours supposer que le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est situé à l'intérieur de la variété d'ordre n, $F_0=0$, de sorte que l'on a

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0;$$

en effet, dans le cas contraire, il suffirait d'envisager, au lieu de la variété $F_0=0$, une variété d'ordre n contenant à son intérieur la variété $F_0=0$ et le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de supposer que dans la variété extérieure à $F_0=0$ et intérieure à la nouvelle variété envisagée, on ait en chaque point $\varepsilon=0$.

Désignons par $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$ les systèmes pour lesquels on a

$$F_0(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})=0.$$

Soit t une variable indépendante réelle. Les n équations

$$a_k=a_k^{(0)}-t(a_k^{(0)}-x_k)\qquad(k=1, 2, \ldots, n)$$

permettent de substituer aux n variables $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les $(n+1)$ variables

([3]) *Werke*, t. III, p. 257-258.

([4]) *Werke*, t. I, p. 399 avec une modification dans la notation.

t, $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ..., $a_n^{(0)}$ dont les n dernières sont liées par la relation

$$F_0(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0.$$

Ces $n+1$ variables sont les coordonnées de Clausius du point dont les coordonnées rectangulaires ordinaires sont a_1, a_2, ..., a_n.

Dans ce système de cordonnées, une intégrale quelconque n^{uple},

$$\int \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, da_1\, da_2 \ldots da_n,$$

étendue à tous les éléments pour lesquels on a $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$, se transforme en

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1}\Phi[a_1^{(0)} - t(a_1^{(0)} - x_1), \ldots]\, dt \int \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(a_k^{(0)} - x_k)\dfrac{\partial F_0}{\partial a_k}\, d\varpi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial a_n}\right)^2}},$$

où $d\varpi$ est l'élément de la variété d'ordre $n-1$, $F_0 = 0$, défini par la relation [1]

$$d\varpi = \frac{1}{\dfrac{\partial F_0}{\partial a_n}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_0}{\partial a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F_0}{\partial a_n}\right)^2}\, da_1^{(0)} \ldots da_{n-1}^{(0)},$$

et où l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\varpi$ de cette variété d'ordre $n-1$, $F_0(a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0$.

En appliquant cette formule générale de transformation d'une intégrale quelconque à la somme des intégrales qui figurent dans le premier membre de l'équation de Poisson dans l'espace à n dimensions, Kronecker montre que l'on transforme ce premier membre en

$$\text{(I)}\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \int \sum_{k=1}^{k=n} X_k(a_1^{(0)}, \ldots, x_n) \frac{\dfrac{\partial F_0}{\partial a_k}\, d\varpi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial a_n}\right)^2}},$$

où l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\varpi$ de la variété d'ordre $(n-1)$, $F_0(a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}) = 0$; cette transformation est légitime pourvu que, au point x_1, ..., x_n la fonction ε soit continue dans toutes les directions, ou que si ε a quelque discontinuité, cette discontinuité ne modifie pas la valeur de l'intégrale d'ordre $(n-1)$ qui figure dans le second membre.

Mais on peut partager la variété d'ordre n, $F_0(a_1, \ldots, a_n) < 0$, en deux parties : celle pour laquelle on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k - x_k)^2 - \rho^2 < 0$$

---

[1] *Monatsberichte der Berliner Akademie*; 1868-1869.

et celle pour laquelle on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k - x_k)^2 - \rho^2 > 0,$$

ρ étant un nombre quelconque que l'on choisira assez petit pour que, pour tous les points de la première partie, on ait encore $F_0(a_1, \ldots, a_n) < 0$.

Comme pour tous les points de la seconde partie on a manifestement

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

il suffit de prouver l'égalité de Poisson dans l'espace à n dimensions pour les points pour lesquels on a à la fois

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k - x_k)^2 - \rho^2 < 0, \qquad F_0(a_1, \ldots, a_n) < 0.$$

Or, pour ces points, on a, d'après la formule (I),

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \varepsilon(x_1 \ldots, x_n) \int \sum_{k=1}^{k=n} X_k(a_1^{(0)}, \ldots, x_n) \frac{2(a_k^{(0)} - x_k)\, d\varpi}{2\rho},$$

où $X_k(a_1^{(0)}, \ldots, x_n) = -\dfrac{a_k^{(0)} - x_k}{\rho}$, et où l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\varpi$ de la variété d'ordre $(n-1)$

$$(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \ldots + (a_n - x_n)^2 = \rho^2.$$

On a donc, en se reportant à la définition de ϖ,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = -\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)\varpi,$$

ce qui est bien la formule annoncée.

L'hypothèse sous laquelle elle est établie est que l'intégrale

$$\int_0^1 \varepsilon[a_1^{(0)} - t(a_1^{(0)} - x_1), \ldots, a_n^{(0)} - t(a_n^{(0)} - x_n)]\, dt$$

admette des dérivées par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$. Par analogie avec le cas où $n = 3$, on dira que cette intégrale est la *densité moyenne* du segment dont l'origine est $(x_1, \ldots, x_n)$ et l'extrémité $(a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})$.

Kronecker a donc établi la formule de Poisson dans l'espace à n dimensions dans un cas bien plus général que celui de Gauss ; Gauss suppose que la densité elle-même admet des dérivées dans toutes les directions; Kronecker suppose seulement que l'on puisse fixer les environs du point $(x_1, \ldots, x_n)$ de manière que la densité moyenne de chacun des segments dont l'origine est $(x_1, \ldots, x_n)$ et dont l'extrémité est un quelconque des points limitant la

variété d'ordre n ainsi fixée admette des dérivées partielles par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$.

L. Kronecker. — La relation de Legendre. (905-908).

Les développements analytiques d'Eisenstein conduisent non seulement à la formule de transformation linéaire de la fonction $\mathfrak{S}$ équivalente à la relation de Legendre, comme Kronecker l'a montré dans des Communications précédentes, mais encore à la relation de Legendre elle-même.

Eisenstein a désigné, pour un entier positif quelconque h, par les symboles (h, u) et $(h^\star, 0)$, les expressions

$$(h, u) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(u + mv + nw)^h},$$

$$(h^\star, 0) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(mv + nw)^h}.$$

Kronecker pose, pour mettre v et w en évidence,

$$(1, u) = f_1(u, v, w),$$
$$(2, u) = f_2(u, v, w).$$

Eisenstein a démontré que la fonction

$$(2, u) - (2^\star, 0)$$

est une fonction elliptique de u; c'est la fonction $\wp$ de M. Weierstrass. Elle vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial f_2(u, v, w)}{\partial u}\right)^2 = 4[f_2(u, v, w) - a][f_2(u, v, w) - a'][f_2(u, v, w) - a''],$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$a = f_2\left(\frac{v}{2}, v, w\right), \qquad a' = f_2\left(\frac{v+w}{2}, v, w\right), \qquad a'' = f_2\left(\frac{w}{2}, v, w\right);$$

on a donc

$$u - u_0 = \int_{f_2(u_0, v, w)}^{f_2(u, v, w)} \frac{dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}};$$

on a aussi, comme le montre Eisenstein,

$$f_1(u_0, v, w) - f_1(u, v, w) = \int_{f_2(u_0, v, w)}^{f_2(u, v, w)} \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}.$$

Kronecker montre, d'une part, qu'en posant

$$k^2 = \frac{a' - a''}{a - a''},$$

et en désignant par K et E les intégrales complètes de première et de seconde espèce correspondant à cette valeur de k^2, on déduit facilement des deux der-

nières relations, la valeur suivante du quotient $\frac{E}{K}$,

$$\frac{E}{K} = (1 - k^2) + \frac{a'}{a - a''},$$

ainsi que les relations

$$v\sqrt{a - a''} = 2K, \qquad w\sqrt{a - a''} = 2iK',$$

si K′ est l'intégrale complète de première espèce de Legendre qui correspond au module $k'^2 = 1 - k^2$. On a donc

$$\frac{E}{K} = 1 - k^2 + f_2(K + iK', 2K, 2iK').$$

Ajoutons cette valeur de $\frac{E}{K}$ à celle que l'on obtient en changeant k^2 en k'^2; on aura

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} = 1 + f_2(K + iK', 2K, 2iK') - f_2(K - iK', -2iK', 2K).$$

D'autre part, Kronecker démontre que l'on a, pour tous les entiers γ, γ' et pour tous les entiers α, β, α', β' qui vérifient la condition $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, la relation

$$f_2(u + \gamma v + \gamma' w, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w) - f_2(u, v, w) = \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{v(\beta' v - \alpha' w)},$$

où il faut remplacer ε par $+1$ ou par -1 suivant que le signe de la partie réelle de $\frac{w}{vi}$ est positif ou négatif. On a donc, en posant dans cette relation

$$u = K + iK'; \quad \alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0; \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = -1,$$

$$f_2(K - iK', -2iK', 2K) - f_2(K + iK', 2K, 2iK') = \frac{\pi}{2KK'}.$$

Comparant les deux résultats obtenus, on a la relation de Legendre

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Cette Note de Kronecker est la dernière qu'il ait publiée. Dans la séance du 22 octobre 1891, il communiqua encore à l'Académie un Mémoire *Sur les deux théorèmes fondamentaux concernant la réductibilité des fonctions entières d'une variable*; ce Mémoire devait être inséré dans les *Abhandlungen* publiées par les soins de l'Académie; il n'est qu'annoncé dans les *Sitzungsberichte.*

La notice nécrologique (¹) sur Kronecker, publiée par M. H. Weber, contient la liste de toutes les publications de l'illustre géomètre.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. 43.

Gerhardt (*C.-J.*). — Leibniz et Pascal. (1053-1068).

On admet généralement que les développements de l'Analyse infinitésimale ont eu pour point de départ la publication de Cavalieri *Methodus indivisibilium* (1635). M. Gerhardt ne partage pas cette opinion. Il lui semble bien plutôt que ce sont les publications de *Pascal* qui ont contribué dans une large mesure à amener Leibniz à introduire dans la Science l'algorithme de l'Analyse infinitésimale. Son opinion repose sur des lettres inédites de Leibniz qu'il communique à l'Académie, et sur certains passages des Mémoires publiés par les Mathématiciens français du milieu du XVII[e] siècle.

On sait que l'algorithme de l'Analyse infinitésimale a été employé par Leibniz pour la première fois, pendant le séjour qu'il fit à Paris avec Tchirnhaus (septembre 1675 à novembre 1676). Or parmi les lettres de Leibniz à Tchirnhaus, il en est une très importante, encore inédite, datée de 1679 et donnant une description détaillée des études faites par Leibniz pendant son séjour à Paris; c'est la dernière lettre d'une première série de lettres échangées entre Tchirnhaus et Leibniz. Leibniz y dit expressément qu'il a été amené à faire ses premières découvertes d'Analyse infinitésimale à la suite de l'étude des Lettres dans lesquelles Pascal a donné la solution des questions concernant les propriétés de la cycloïde, que, sous le nom de Dettonville, il avait posées lui-même à ses contemporains.

On retrouve d'ailleurs la même affirmation de Leibniz dans une lettre à l'Hospital datée de 1694, dans le post-scriptum d'une lettre à Jacques Bernoulli datée de 1703, enfin dans le Mémoire *Historia et origo Calculi differentialis* publié dans les dernières années de sa vie.

Il importe de remarquer que tous les problèmes résolus par Pascal et dont parle Leibniz, tant ceux de la célèbre lettre de 1658 adressée par Pascal à Carcavi, que ceux que Pascal avait joints aux précédents en publiant cette lettre en 1659 sous le titre de *Traité général des roulettes* et que ceux qui font l'objet des cinq *Notes* devant servir d'introduction à ses solutions, sont résolus à la manière des anciens et sans que l'on trouve dans leurs solutions la moindre trace de l'emploi des méthodes de Descartes.

Les découvertes de Descartes n'ont donc exercé aucune influence sur les premières découvertes de Leibniz dans le domaine de l'Analyse infinitésimale. Quand Huygens, qui déjà avait engagé Leibniz à étudier les Mathématiques et à prendre en particulier connaissance des Lettres de Pascal, engagea Leibniz à prendre connaissance des Méthodes de Descartes, Leibniz possédait déjà une méthode générale permettant de quarrer toutes les surfaces de révolution. Et cette méthode, comme Leibniz le fait d'ailleurs remarquer lui-même, est la méthode même employée par Pascal pour quarrer la sphère, dans l'une des cinq *Notes* dont nous venons de parler.

A l'appui de sa thèse, M. Gerhardt communique à l'Académie la première Partie d'un Manuscrit de Leibniz ayant pour titre : *Ex Dettonvillaneo seu Pascalii Geometricis excerpta : cum additamentis*. Ce Manuscrit est sans date, mais tout porte à croire qu'il a été écrit immédiatement après la rencontre de Leibniz et d'Huygens, en 1673.

Mais, dans son grand Mémoire de 1675, daté des 25, 26, 29 octobre et 1[er] novembre et intitulé : *Analysis tetragonistica ex centrobarycis,* Leibniz, tout en se rattachant immédiatement aux cinq *Notes* de Pascal, fait usage des résultats obtenus par Descartes. C'est le 29 octobre, qu'il emploie pour la pre-

mière fois le symbole $\int$ et qu'il effectue les premières intégrations; il désigne d'abord par $\frac{y}{d}$ la différentielle de y, mais, dès le 11 novembre de la même année, il fait usage de la notation dy pour désigner cette différentielle.

Weierstrass (K.). — Nouvelle démonstration du théorème : *Tout polynome entier en x peut être mis sous la forme d'un produit de facteurs linéaires en x.* (1085-1101).

En 1859 et en 1868, M. Weierstrass a communiqué à l'Académie une nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre; cette démonstration diffère essentiellement de toutes celles qu'on a données jusqu'ici.

On commence toujours par démontrer que tout polynome entier en x s'annule pour une valeur au moins donnée à la variable x; on en conclut aisément que ce polynome s'annule pour autant de valeurs données à la variable x, que l'indique son degré, pourvu que son discriminant ait une valeur différente de zéro; lorsque le discriminant du polynome est nul, on met d'ailleurs le polynome entier en x, au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles sous forme d'un produit de polynomes entiers en x à discriminants différents de zéro.

L'existence des racines une fois assurée, on donne des procédés qui permettent de calculer ces racines, dans chaque cas particulier, avec autant d'approximation que l'on veut.

M. Weierstrass s'est, au contraire, proposé de donner, sans supposer au préalable que l'on ait démontré l'existence des racines, un procédé permettant de former, au moyen des coefficients d'un polynome entier en x, des expressions qui, substituées à la variable, annulent ce polynome.

Si l'illustre géomètre ne publie qu'aujourd'hui sa démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, c'est qu'aujourd'hui seulement elle lui apparaît sous sa forme définitive, entièrement débarrassée de toute considération de continuité et ayant ainsi le caractère purement arithmétique que depuis de longues années il cherchait à lui donner.

Il suffit de démontrer le théorème pour un polynome entier en x

$$f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

dont les coefficients sont rationnels, réels ou imaginaires et dont le discriminant est différent de zéro, car cette démonstration une fois effectuée, la démonstration dans le cas général est immédiate.

M. Weierstrass détermine d'abord un entier positif d_0 tel que si l'on envisage tous les polynomes entiers en x,

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

dont les coefficients rationnels, réels ou imaginaires $A_1, A_2, \ldots, A_n$ diffèrent de $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de moins de d_0 en valeur absolue, le discriminant de chacun de ces polynomes est différent de zéro; il assigne une même limite inférieure Δ_c différente de zéro, à la valeur absolue de ce discriminant pour *tous* les polynomes envisagés.

Supposons que l'on puisse trouver n nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

tels qu'en désignant par

$$x^n + (a_1, a_2, \ldots, a_n)_1 x^{n-1} + (a_1, a_2, \ldots, a_n)_2 x^{n-2} + \ldots + (a_1, a_2, \ldots, a_n)_n,$$

le polynome entier en x que l'on obtient en développant suivant les puissances de x le produit

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

les n inégalités (où les deux barres indiquent, comme dans tout ce qui suit, que l'on envisage la valeur absolue, le module, de l'expression qu'elles comprennent)

$$|C_1 - (a_1, a_2, \ldots, a_n)_1| < d_0,$$
$$|C_2 - (a_1, a_2, \ldots, a_n)_2| < d_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|C_n - (a_1, a_2, \ldots, a_n)_n| < d_0,$$

soient vérifiées simultanément. Posons alors successivement

$$\varphi(x) = x^n + (a_1, a_2, \ldots, a_n)_1 x^{n-1} + \ldots + (a_1, a_2, \ldots, a_n)_n,$$
$$\varphi'(x) = \frac{d\,\varphi(x)}{dx},$$
$$a'_1 = a_1 - \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)}, \qquad a'_2 = a_2 - \frac{f(a_2)}{\varphi'(a_2)}, \qquad \ldots, \qquad a'_n = a_n - \frac{f(a_n)}{\varphi'(a_n)},$$
$$\varphi_1(x) = (x - a'_1)(x - a'_2)\ldots(x - a'_n)$$
$$= x^n + (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)_1 x^{n-1} + \ldots + (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)_n,$$
$$\varphi'_1(x) = \frac{d\,\varphi(x)}{dx},$$
$$a''_1 = a'_1 - \frac{f(a'_1)}{\varphi'(a'_1)}, \qquad a''_2 = a'_2 - \frac{f(a'_2)}{\varphi'(a'_2)}, \qquad \ldots, \qquad a''_n = a'_n - \frac{f(a'_n)}{\varphi'(a'_n)},$$

et continuons ainsi de façon qu'en général, pour chaque accent (λ), après avoir obtenu les nombres

$$a_1^{(\lambda-1)}, \quad a_2^{(\lambda-1)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(\lambda-1)},$$

on en obtienne d'autres

$$a_1^{(\lambda)}, \quad a_2^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(\lambda)},$$

en posant

$$\varphi_{\lambda-1}(x) = (x - a_1^{(\lambda-1)})(x - a_2^{(\lambda-1)})\ldots(x - a_n^{(\lambda-1)})$$
$$= x^n + (a_1^{(\lambda-1)}, a_2^{(\lambda-1)}, \ldots, a_n^{(\lambda-1)})_1 x^{n-1} + \ldots$$
$$+ (a_1^{(\lambda-1)}, a_2^{(\lambda-1)}, \ldots, a_n^{(\lambda-1)})_n,$$
$$\varphi'_{\lambda-1}(x) = \frac{d\,\varphi_{\lambda-1}(x)}{dx},$$
$$a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda-1)} - \frac{f(a_1^{(\lambda-1)})}{\varphi'(a_1^{(\lambda-1)})}, \qquad a_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda-1)} - \frac{f(a_2^{(\lambda-1)})}{\varphi'(a_2^{(\lambda-1)})}, \qquad \ldots,$$
$$a_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda-1)} - \frac{f(a_n^{(\lambda-1)})}{\varphi'(a_n^{(\lambda-1)})}.$$

Il est facile de voir que, pourvu que l'on prenne λ assez grand, les coefficients

$$(a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)})_1, \quad (a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)})_2, \quad \ldots, \quad (a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)})_n$$

du polynome

$$x^n + (a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)})_1 x^{n-1} + \ldots + (a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)})_n,$$

que l'on obtient en développant suivant les puissances de x le produit

$$(x - a_1^{(\lambda)})(x - a_2^{(\lambda)}) \ldots (x - a_n^{(\lambda)}),$$

diffèrent des coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ du polynome proposé, d'aussi peu que l'on veut, en valeur absolue.

Il en résulte que les n nombres définis comme sommes des séries

$$x_2 = a'_1 - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{f(a_1^{(\lambda)})}{\varphi'_\lambda(a_1^{(\lambda)})},$$

$$x_2 = a'_2 - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{f(a_2^{(\lambda)})}{\varphi'_\lambda(a_2^{(\lambda)})},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n = a'_n - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{f(a_n^{(\lambda)})}{\varphi'_\lambda(a_n^{(\lambda)})}$$

vérifient les n équations simultanées

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_1 = C_1,$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_2 = C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_n = C_n,$$

et, par suite, que le polynome entier en x

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n$$

s'annule pour $x = x_1$, $x = x_2$, $\ldots$, $x = x_n$.

2. Tout est donc ramené à montrer que l'on peut trouver n nombres a_1, a_2, $\ldots$, a_n tels que les n inégalités

$$|C_\nu - (a_1, a_2, \ldots, a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

soient vérifiées simultanément.

M. Weierstrass s'appuie à cet effet sur les deux lemmes suivants :

« Soient

$$f_0(x) = x^n + C_1^{(0)} x^{n-1} + C_2^{(0)} x^{n-2} + \ldots + C_n^{(0)},$$
$$f_1(x) = x^n + C_1^{(1)} x^{n-1} + C_2^{(1)} x^{n-2} + \ldots + C_n^{(1)}$$

deux polynomes quelconques entiers en x, à coefficients rationnels, réels ou

imaginaires, dont les discriminants sont différents de zéro. Envisageons le polynome entier en x défini par la relation

$$f(x, \tau) = \left(1 - \frac{\tau + \tau si}{1 + \tau si}\right) f_0(x) + \frac{\tau + \tau si}{1 + \tau si} f_1(x)$$
$$= x^n + C_1^{(\tau)} x^{n-1} + C_2^{(\tau)} x^{n-2} + \ldots + C_n^{(\tau)},$$

où τ et s sont des paramètres quelconques, et où i représente l'unité imaginaire.

On peut donner au paramètre s des valeurs réelles rationnelles k telles que le discriminant du polynome entier en x que nous venons de désigner par $f(x, \tau)$, ne s'annule pour aucune valeur réelle donnée au paramètre τ.

Il est essentiel pour l'objet que l'on a en vue de montrer comment, dès que l'on connaît les nombres rationnels

$$C_1^{(0)}, \quad C_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad C_n^{(0)}; \qquad C_1^{(1)}, \quad C_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad C_n^{(1)},$$

on peut, *au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles*, déterminer ce nombre rationnel k. Pour la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, il suffit de fixer k de façon que le discriminant du polynome $f(x, \tau)$ ne s'annule pour aucune valeur réelle de τ vérifiant les inégalités

$$0 \leqq \tau \leqq 1.$$

D'autre part, on peut déterminer n nombres rationnels positifs

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n,$$

tels que l'on ait, quel que soit le nombre réel τ compris entre 0 et 1,

$$|C_1^{(\tau)}| < \Gamma_1, \qquad |C_2^{(\tau)}| < \Gamma_2, \qquad \ldots, \qquad |C_n^{(\tau)}| < \Gamma_n,$$

et l'on voit que les nombres d_0 et Δ_0 du paragraphe précédent ne dépendent que de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ et non des coefficients $C_1^{(\tau)}, C_2^{(\tau)}, \ldots, C_n^{(\tau)}$ dont les valeurs varient avec le paramètre τ.

3. Ceci posé, fixons arbitrairement n nombres rationnels inégaux réels ou imaginaires

$$a_1^{(0)}, \quad a_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(0)},$$

prenons pour le polynome $f_0(x)$ du paragraphe précédent le polynome entier en x

$$f_0(x) = (x - a_1^{(0)})(x - a_2^{(0)})\ldots(x - a_n^{(0)})$$
$$= x^n + (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})_1 x^{n-1} + \ldots + (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)})_n,$$

et pour le polynome $f_1(x)$ le polynome quelconque donné dont on veut démontrer qu'il admet autant de racines que l'indique son degré.

Donnons au paramètre τ les valeurs réelles comprises entre 0 et 1,

$$0, \quad \frac{1}{g}, \quad \frac{2}{g}, \quad \ldots, \quad \frac{g-1}{g}, \quad 1,$$

où g est un entier positif fixé arbitrairement de façon que les n inégalités

$$|(1+ki)(C_\nu^{(1)}-C_\nu^{(0)})|<gd_0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

soient vérifiées, et envisageons les nombres

$$C_\nu^{(0)},\quad C_\nu^{\left(\frac{1}{g}\right)},\quad C_\nu^{\left(\frac{2}{g}\right)},\quad \ldots,\quad C_\nu^{\left(\frac{g-1}{g}\right)},\quad C_\nu^{(1)}$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n),$$

qui correspondent à ces valeurs données à τ.

M. Weierstrass montre, en s'appuyant sur les deux lemmes du paragraphe précédent, que l'on peut déterminer, au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles, des nombres

$$a_{11},\quad a_{12},\quad \ldots,\quad a_{1n},$$

puis des nombres

$$a_{21},\quad a_{22},\quad \ldots,\quad a_{2n},$$

puis des nombres

$$a_{31},\quad a_{32},\quad \ldots,\quad a_{3n},$$

et ainsi de suite, enfin des nombres

$$a_{g1},\quad a_{g2},\quad \ldots,\quad a_{gn},$$

tels que, en désignant, pour $\lambda=1, 2, \ldots, g$, par

$$x^n+(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})_1x^{n-1}+(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})_2x^{n-2}+\ldots+(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})_n,$$

le polynome entier en x obtenu en développant suivant les puissances de x le produit

$$(x-a_{\lambda_1})(x-a_{\lambda_2})\ldots(x-a_{\lambda_n}),$$

les ng inégalités

$$\left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}-(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})_\nu\right|<d_0 \qquad \begin{pmatrix}\lambda=1,2,\ldots,g\\ \nu=1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$$

soient vérifiées.

Pour $\lambda=g$, c'est précisément le théorème auquel on avait précédemment ramené la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre.

J. M.

2ème Partie

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXVIII, 1894 (¹).

Bertrand (*J.*). — Note sur un problème de Mécanique. (13-15).

M. Bertrand revient sur le problème, devenu classique, qu'il a posé il y a près de vingt ans.

Un point matériel est sollicité par une force dont les composantes sont déterminées en fonction des coordonnées de ce point, quelle que soit sa position. Quelle est la loi de ces forces pour laquelle le point, quelles que soient les conditions initiales, décrit une section conique?

L'auteur donne de ce problème une solution des plus élégantes dans le cas où la force est fonction de la seule distance.

Picard (*Em.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité. (16-17).

M. Picard propose, pour intégrer l'*équation des télégraphistes*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U,$$

une méthode plus simple que celle de M. Poincaré.

Par le changement de variables

$$2u = x + t, \qquad 2v = x - t,$$

cette équation prend la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial u \, \partial v} + U = 0,$$

et la fonction U doit être déterminée par les conditions complémentaires que les valeurs initiales (pour $t = 0$) de U et ses dérivées partielles du premier ordre soient données sur la bissectrice de l'angle des axes, les valeurs données n'étant différentes de zéro que sur un segment fini de cette bissectrice.

On peut alors appliquer la méthode d'intégration de Riemann, exposée dans le tome II, p. 71, des *Leçons* de M. Darboux, si l'on peut trouver l'intégrale de l'équation (2), qui pour $u = u_0$ prend la valeur 1 quel que soit v, et pour $v = v_0$ la valeur 1 quel que soit u. Or on l'obtient en posant

$$z = (u - u_0)(v - v_0),$$

ce qui donne pour U une fonction $\varphi(z)$ satisfaisant à l'équation de Bessel,

$$z\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d\varphi}{dz} + \varphi = 0.$$

(¹) Voir *Bulletin*, XIX, p. 204.

La fonction cherchée est une série de Bessel, et cette solution permet de discuter facilement les intégrales de l'équation (1).

Coculesco. — Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. (59).

L'auteur se place dans le cas particulier qu'a déjà considéré M. Poincaré, et reprend en la développant la méthode de ce géomètre.

Lippmann. — Sur la théorie de la photographie des couleurs simples et composées par la méthode interférentielle. (92-97).

M. Lippmann donne la théorie mathématique de la photographie des couleurs, phénomène qui est dû aux interférences lumineuses.

Il considère d'abord le cas simple où l'impression est produite par une lumière homogène de longueur d'onde λ, tombant normalement sur la couche sensible qui est adossée à un miroir. L'interférence entre le rayon réfléchi et le rayon incident donne lieu, en un point de la couche situé à la distance z du miroir, à une vibration stationnaire dont l'intensité a pour mesure $4\sin^2\frac{2\pi z}{\lambda}$.

Il en résulte au point z, après développement de l'épreuve, un pouvoir réflecteur ρ, fonction de cette intensité,

$$\rho = \varphi\left(\sin^2\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

Cela posé, si l'on éclaire la couche développée par de la lumière blanche, et que l'on envisage l'une des couleurs composantes de longueur d'onde λ', à l'entrée la vibration qui donne lieu à cette couleur a pour équation

$$y = \sin 2\pi\frac{t}{\tau}.$$

Après réflexion sur un élément dz situé en z, elle devient, à cause de la perte de phase due au chemin parcouru dz,

$$y = \rho\,dz\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{2z}{\lambda'}\right) = \rho\,dz\cos\frac{4\pi z}{\lambda'}\sin 2\pi\frac{t}{\tau} - \rho\,dz\sin\frac{4\pi z}{\lambda'}\cos 2\pi\frac{t}{\tau}.$$

En intégrant de $z = 0$ à $z = Z$ (épaisseur de la couche), on aura la vibration résultante qui parvient à l'œil. L'expression de cette vibration a la forme

$$X\sin\frac{2\pi t}{\tau} + Y\cos\frac{2\pi t}{\tau},$$

où

$$X = \int_0^z \rho\cos\frac{4\pi z}{\lambda'}\,dz, \qquad Y = \int_0^z \rho\sin\frac{4\pi z}{\lambda'}\,dz.$$

L'amplitude a, comme on sait, pour expression $\sqrt{X^2+Y^2}$. Il est plus com-

mode de discuter l'expression

$$X + iY = \int_0^z \rho\left(\cos\frac{4\pi z}{\lambda'} + i\sin\frac{4\pi z}{\lambda'}\right)dz.$$

Si on la partage en une somme d'intégrales prises respectivement entre les limites o et $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ et $2\frac{\lambda}{2}$, ..., $p\frac{\lambda}{2}$ et $(p+1)\frac{\lambda}{2}$, on voit facilement qu'on peut la mettre sous la forme

$$X + Yi = (1 + u + u^2 + \ldots + u^{p-1}) \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \rho\left(\cos\frac{4\pi z}{\lambda'} + i\sin\frac{4\pi z}{\lambda'}\right)dz,$$

où

$$u = \cos\frac{2\pi\lambda}{\lambda'} + i\sin\frac{2\pi\lambda}{\lambda'}.$$

Si λ' n'est pas égal à λ, le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ est nécessairement fractionnaire à cause de la faible étendue du spectre visible qui comprend moins d'un octave. Dans ce cas la somme $1 + u + u^2 + \ldots + u^{p-1}$ reste finie, quelque grand que soit p, tandis que si $\lambda' = \lambda$, cette somme est égale à p. On arrive donc à cette conclusion capitale que la couche sensible ne peut renvoyer que la couleur même qui l'a impressionnée.

On arrive à une conclusion analogue lorsqu'on suppose la plaque photographique exposée à une lumière hétérogène.

Potier. — Note sur un problème de Mécanique. (102-104).

Il s'agit toujours du problème de M. Bertrand : un point matériel étant sollicité par une force dont les composantes sont déterminées en fonction des coordonnées de ce point, quelle est la loi de ces forces pour laquelle le point, quelles que soient les conditions initiales, décrit une section conique?

Halphen et M. Darboux avaient donné la solution générale de ce problème, sans faire la restriction que cette force est fonction de la distance seule. M. Potier parvient, par une méthode extrêmement rapide, au résultat obtenu par ces deux géomètres.

Kotelnikoff. — Généralisation de quelques théorèmes de Mécanique. (129-131).

Si les liaisons d'un système de points matériels permettent un déplacement hélicoïdal de tout le système, l'auteur dit que le système admet un *torseur virtuel*.

L'auteur démontre sur ces torseurs une suite de théorèmes, généralisant des propositions connues de Mécanique et dont voici le premier.

Si le système admet un torseur virtuel, la dérivée du moment du torseur des quantités de mouvement par rapport au torseur virtuel est égale au moment du torseur des forces par rapport au même torseur virtuel.

Lecornu. — Sur le pendule à tige variable. (132-134).

Le mouvement plan d'un pendule à tige variable est régi par l'équation diffé-

rentielle

$$(1) \qquad l\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt}+g\sin\theta=0,$$

dans laquelle l désigne la longueur du pendule et θ l'inclinaison sur la verticale. Si la longueur varie proportionnellement au temps et que les oscillations soient assez faibles pour qu'on puisse confondre $\sin\theta$ avec θ, cette équation se présente sous la forme

$$(2) \qquad x\frac{d^2u}{dt^2}+u=0.$$

Celle-ci s'intègre au moyen des fonctions de Bessel. Si l'on pose

$$\varphi=\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}),$$

l'intégrale générale est

$$u=A\varphi+B\varphi\int\frac{dx}{\varphi^2}.$$

Les transformations bien connues qu'on peut faire subir aux fonctions de Bessel permettent, dans le cas où les variations de longueur de la tige sont peu considérables, d'arriver à une expression de l'inconnue θ, d'où M. Lecornu déduit facilement les époques des diverses élongations à droite et à gauche.

L'auteur étudie ensuite le mouvement conique d'un pendule extensible toujours suivant la même loi de proportionnalité $l=a+bt$. Ce mouvement conique résulte de deux mouvements plans rectangulaires régis par des équations de la forme

$$(3) \qquad x\frac{d^2w}{dx^2}+w=\frac{x}{w^3}.$$

L'intégration de cette équation se ramène à celle de l'équation (1). Si u désigne une intégrale de cette dernière et u_1 la fonction $u\int\frac{dx}{u^2}$, l'intégrale générale de (3) est (à un facteur constant près)

$$w=\frac{\sqrt{u^2+u_1^2}}{a+bt}.$$

Boussinesq. — Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand des résistances de nature diverse introduisent dans cette équation des termes respectivement proportionnels à la fonction caractéristique du mouvement ou à ses dérivées partielles premières. (162-166).

Le problème que se pose M. Boussinesq est, au point de vue analytique, une généralisation dans l'espace à trois dimensions de celui qu'exprime l'équation des télégraphistes, récemment intégrée par M. Poincaré, puis plus simplement par M. Picard.

Si l'on cherche à mettre en équation le problème de la propagation du son dans un milieu où le mouvement provoque des résistances proportionnelles au déplacement et à ses dérivées partielles, on parvient à une équation aux déri-

vées partielles qui, après le changement de fonction bien connu

$$u = ve^{ht+lx+my+nz},$$

prend la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \pm 4k^2 u.$$

La méthode qui conduit M. Boussinesq au but consiste à introduire une variable de plus que celles qui figurent dans la question, variable qui finalement doit recevoir la valeur zéro.

Pour simplifier, l'auteur suppose que le milieu vibrant ait seulement deux dimensions. L'équation à intégrer se réduit à

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \pm 4k^2 u,$$

u et $\frac{du}{dt}$ devant se réduire pour $t = 0$ à des fonctions connues $f(y, z)$, $F(y, z)$. M. Boussinesq montre comment l'intégrale, pour ce milieu visqueux à deux dimensions, se rattache à l'intégrale relative à un milieu à trois dimensions, mais parfaitement élastique. Cette dernière est bien connue depuis Poisson. On en déduit facilement cette solution du problème proposé

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{2}\sigma} \text{co}(2kt\cos\alpha) f(y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{2}\sigma} \text{co}(2kt\cos\alpha) F(y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t},$$

où les intégrations s'étendent à toute l'aire $\sigma = 4\pi t^2$ de la sphère décrite du point (y, z) comme centre, et où le signe co désigne un cosinus hyperbolique ou un cosinus ordinaire suivant que la constante k^2 figure dans l'équation (1) avec le signe + ou avec le signe —.

Dans le cas où une seule coordonnée figure dans l'équation (1), l'expression de u se simplifie et devient, aux notations près, égale à celle qu'a trouvée M. Poincaré.

Pellet. — Sur les équations et les fonctions implicites. (182-183).

Soit la série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Si la fonction

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} - \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

qui offre deux variations de signe et où α_i désigne le module de a_i, est négative pour les valeurs de x positives et comprises entre r_1 et $r_2 (r_2 > r_1)$, on peut, comme le montre M. Pellet, former par des procédés purement algébriques l'équation qui donne les n racines de l'équation $f(x) = 0$ comprises dans le cercle de rayon r_1.

Si l'on suppose, en outre, que la fonction

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_{n+n_1-1} x^{n+n_1-1} - \alpha_{n+n_1} x^{n+n_1} - \alpha_{n+n_1+1} x^{n+n_1+1} + \ldots$$

soit négative pour les valeurs positives de x comprises entre r'_1 et r'_2 ($r'_1 > r'_2 > r_2$), on peut obtenir algébriquement l'équation qui admet pour racines les n racines de $f(x) = 0$ comprises dans la couronne que limitent les cercles de rayons r'_1 et r'_2.

Boussinesq. — Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand il y a diverses résistances au mouvement; conséquences physiques de cette intégration. (223-226).

Par une méthode analogue à celle qui lui a servi pour un milieu à deux dimensions, l'auteur parvient à intégrer l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \pm 4k^2 u,$$

qui régit la propagation des petits mouvements dans un milieu à trois dimensions doué d'une résistance proportionnelle au déplacement et à ses dérivées premières.

Si l'on désigne par $U(\zeta)$ la série de Bessel

$$U(\zeta) = 1 \pm \frac{\zeta}{1^2} + \frac{\zeta^2}{1^2.2^2} \pm \frac{\zeta^3}{1^2.2^2.3^2} + \ldots,$$

la solution de l'équation (1) sera donnée par la formule

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t U(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \varphi(x + \tau\cos\alpha, y + \tau\cos\beta, z + \tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau}$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t U(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau \frac{d}{d\tau}\int_\sigma \Phi(x + \tau\cos\alpha, y + \tau\cos\beta, z + \tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau},$$

où les intégrations $\int_\sigma$ s'étendent à toute l'aire $\sigma = 4\pi t^2$ d'une sphère de centre (x, y, z) et dont les divers points sont les extrémités de rayons t faisant avec les axes des angles égaux à α, β, γ.

Cette formule montre qu'un ébranlement se propage avec la même vitesse que s'il n'y avait pas de résistance, c'est-à-dire que si k était nul. Mais une fois que le mouvement a atteint un certain point, il y persiste indéfiniment. Les ondes en s'avançant ont un front bien déterminé, mais une queue sans limite précise. M. Poincaré avait déjà reconnu cette influence de la viscosité du milieu dans le cas particulier qu'il avait étudié.

Defforges. — Anomalies de la pesanteur présentées par le continent nord américain. (229-230).

Des mesures récentes du commandant Defforges et d'un certain nombre de mesures plus anciennes il résulte que le littoral d'une même mer paraît pos-

seder une pesanteur caractéristique dont la variation, le long de ce littoral, suit assez exactement la loi du sinus carré de la latitude, énoncée par Clairaut. Mais, d'un côté, les îles qui s'élèvent au-dessus des eaux profondes présentent un excès considérable de pesanteur; de l'autre, sur l'ancien continent, on constate un défaut de la gravité qui contrebalance l'excès des îles de l'Océan.

Grâce à son pendule réversible inversable, M. Defforges vient de constater que le nouveau continent comme l'ancien présente cette anomalie négative de la pesanteur. Cette anomalie sur le haut plateau américain est à peu près égale et de signe contraire aux anomalies des îles qui surgissent des grandes profondeurs du Pacifique et de l'Atlantique.

Lucas (*F.*). — Étude de l'élasticité des métaux. (232).

L'auteur présente un court résumé du Mémoire qu'il a soumis à l'approbation de l'Académie.

Quand on tire sur une barre de fer ou d'acier recuit jusqu'à qu'elle menace de se rompre, on peut observer, dans les phénomènes qu'elle présente, trois périodes successives :

1° *Période d'élasticité*, caractérisée par le retour de la barre à sa longueur primitive lorsqu'on supprime l'effort de traction;

2° *Période d'écoulement*, caractérisée par la disparition momentanée de l'élasticité de la barre et la production d'un allongement permanent;

3° *Période mixte*, pendant laquelle on voit se produire simultanément un allongement élastique et un allongement permanent.

A la théorie connue de la période d'élasticité M. F. Lucas ajoute deux théories nouvelles relatives à la période d'écoulement et à la période mixte. Ces théories, conformes aux faits observés, sont fondées sur le principe de la conservation de l'énergie et sur la répartition du travail mécanique en énergie potentielle et en énergie calorifique.

Janet (*A.*). — Sur la sommation rapide de certaines séries peu convergentes (séries harmoniques alternées). (239-240).

Les séries de la forme

$$S = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} + \ldots$$

sont convergentes quand b est positif, mais leur convergence est très lente quand le rapport $\frac{b}{a}$ est petit.

En remarquant que

$$\frac{1}{p+\frac{a}{b}} = \int_0^1 x^{p-1+\frac{a}{b}}\,dx,$$

on voit que l'on a

$$S = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{a}{b}}}{1+x}\,dx.$$

Pour calculer rapidement une valeur approchée de reste, M. A. Janet remplace dans cette intégrale $\frac{1}{1+x}$ par une fonction entière $\varphi(x)$ telle que, entre o et 1, la différence $\frac{1}{1+x} - \varphi(x)$ garde constamment le même signe et ne dépasse pas une valeur ε. Alors S sera représenté par

$$\frac{1}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{b}}\varphi(x)\,dx,$$

avec l'approximation $\frac{\varepsilon}{a+b}$.

On trouve facilement

$$\varphi(x) = 1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3,$$

et, par suite,

$$S = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{3}{4}\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{4}\frac{1}{a+4b}$$

avec une erreur inférieure à

$$0{,}0106\,\frac{1}{a+b}.$$

Pour atteindre cette approximation par le calcul direct des termes, il en faudrait au moins 94.

En suivant toujours la même idée et remplaçant $\frac{1}{1+x}$ par une valeur encore plus approchée, M. A. Janet obtient, pour représenter S, une somme de 13 termes qui donne une approximation supérieure à celle qu'on atteindrait en prenant 250,000 termes dans la série proposée.

La même méthode est applicable à la série

$$\frac{x}{a+b} - \frac{x^2}{a+2b} + \frac{x^3}{a+3b} - \frac{x^4}{a+4b} + \ldots$$

Il est curieux que l'approximation $\frac{\varepsilon}{a+b}$, pour un nombre donné de termes utilisés, ne dépende pas de la rapidité avec laquelle la série converge.

Demoulin. — Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes. (242-244).

Les congruences que M. Demoulin considère sont :

1° Celles qui établissent une correspondance entre une famille d'asymptotiques appartenant à l'une des nappes de la surface focale et une famille d'asymptotiques appartenant à l'autre nappe;

2° Les congruences sur les deux nappes de la surface focale desquelles les lignes de courbure se correspondent;

3° Les congruences telles que les lignes asymptotiques de l'une des nappes de la surface focale correspondent aux lignes de courbure de l'autre nappe.

Ces trois classes de congruences jouissent d'une propriété métrique remarquable déjà rencontrée dans divers cas particuliers par Halphen et Ribaucour,

et que M. Demoulin démontre d'une manière générale en s'appuyant sur certaines formules relatives aux surfaces réglées :

Soient S et S′ les deux nappes de la surface focale de l'une des congruences en question ; une droite quelconque de cette congruence touche S en M et S′ en M′ ; les plans focaux relatifs à cette droite font entre eux l'angle V. Si R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux de S en M, et R'_1, R'_2 ceux de S′ en M′, on a

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 \sin^4 V = \overline{MM'}^4.$$

Boussinesq. — Complément à une précédente Note : *Sur la propagation du son dans un fluide soumis à des résistances diverses;* détermination analytique du problème. (271-276).

Pour compléter l'étude de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \pm 4k^2 u,$$

M. Boussinesq prouve qu'elle détermine complètement la suite des valeurs de la fonction continue u aux diverses époques t, dès que l'on se donne la valeur initiale $\varphi(x, y, z)$ pour $t = 0$, ainsi que celle $\Phi(x, y, z)$ de sa dérivée première par rapport à t.

Cosserat. — Sur des congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour. (335-337).

M. Cosserat établit la proposition suivante, réciproque de celle qui a été énoncée par Ribaucour et démontrée par M. Bianchi.

Pour qu'une congruence établisse une correspondance entre les asymptotiques des deux nappes (F_1) et (F_2) de la surface focale, il faut et il suffit que le produit des quatre rayons de courbure principaux des surfaces (F_1), (F_2) aux points correspondants F_1, F_2 soit égal à la quatrième puissance du quotient de la distance de ces deux points par le sinus de l'angle des plans focaux.

En terminant l'auteur appelle l'attention sur une question posée par Ribaucour :

Étant donnée, entre deux surfaces (A) et (B), une correspondance telle qu'il existe une sphère tangente à ces deux surfaces aux points correspondants A et B, dans quel cas une pareille correspondance peut-elle fournir une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre ?

Demoulin. — Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces spirales. (337-340).

Soient (S) et (S_1) deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments, M et M_1 deux points correspondants.

Si les droites MM_1 sont tangentes à la surface (S), celle-ci sera applicable sur une surface spirale. Son élément linéaire ayant été ramené à la forme

$$(1) \qquad ds^2 = e^{2\alpha} B(\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

les droites MM_1 seront tangentes aux lignes β = const., et un point quelconque M_1 de (S_1) sera le centre de courbure géodésique en M de celle des courbes α = const. qui passe en ce point.

Réciproquement, lorsqu'une surface (S) admet l'élément linéaire (1) des surfaces spirales, les centres de courbure géodésique des lignes α = const. sont situées sur une surface (S_1) qui correspond à (S) par orthogonalité des éléments. Un point quelconque M de (S) a pour correspondant le centre de courbure géodésique en M de celle des courbes α = const. qui passe en ce point.

L'auteur démontre encore cette proposition négative : il ne peut y avoir deux surfaces (S) et (S_1) (sauf le cas peu intéressant du plan), qui se correspondent par orthogonalité des éléments de telle manière que les droites MM_1 qui joignent deux points correspondants soient tangentes aux deux surfaces.

Borel. — Sur quelques points de la théorie des fonctions. (340-342).

L'auteur considère les fonctions $\varphi(z)$ représentées par une série de la forme

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{(z - a_n)\alpha_n},$$

dans laquelle les α sont des entiers limités et les A des quantités telles que la série ΣA_n soit convergente. On suppose que les points *a'*, dans le voisinage desquels se trouve une infinité de points A, forment au plus des lignes, et que les points *a*, non situés sur ces lignes, sont isolés ou ont des points limites isolés.

Les fonctions ainsi définies possèdent certaines des propriétés les plus importantes des fonctions analytiques, considérées comme un ensemble de développements de Taylor. Notamment, si de telles fonctions $\varphi(z)$ sont liées par une relation algébrique vérifiée pour tous les points d'une aire S, cette relation est identique et par suite vraie en tous les points où les séries sont convergentes. On peut dès lors convenir que les séries $\varphi(z)$ représentent *la même fonction* en tous les points où elles convergent; cette définition n'est jamais en contradiction avec celle du prolongement analytique au moyen de la série de Taylor. Ceci semble incompatible avec un résultat singulier obtenu par M. Poincaré, mais M. Borel montre que la contradiction n'est qu'apparente.

L'auteur envisage ensuite une série $\varphi(z)$, en supposant seulement que la série $\Sigma|\sqrt{A_n}|$ soit convergente. Soient P et Q deux points qui ne coïncident ni avec un point *a* ni avec un point *a'* limite des points *a*, et S une aire simplement connexe comprenant, à son intérieur, les points P et Q. Il est possible de tracer une infinité non dénombrable de courbes comprises entièrement à l'intérieur de S, joignant les points P et Q, et telles que sur chacune de ces courbes la série soit uniformément convergente et représente par suite une fonction continue.

M. Borel termine par des considérations sur les fonctions d'une variable réelle, admettant dans un intervalle des dérivées de tout ordre, sans être pour cela développables en une série de Taylor.

Il montre qu'une telle fonction peut être représentée dans tout cet intervalle par la somme d'une série de puissances et d'une série de Fourier, telles que

les dérivées de tout ordre de la fonction s'obtiennent en dérivant les séries terme à terme.

Enfin, on peut toujours trouver une fonction de variable réelle ayant des dérivées de tout ordre dans cet intervalle donné et telle que ses dérivées aient des valeurs données quelconques pour un point de l'intervalle.

D'Arone. — Sur un théorème relatif aux fonctions harmoniques de plusieurs variables réelles. (342-343).

Soit une fonction harmonique $V(x, y, z)$ de trois variables réelles, c'est-à-dire une fonction finie et continue, ainsi que ses dérivées premières et secondes en tous les points de l'espace, situés à distance finie, et qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

M. d'Arone montre :

1° Qu'une fonction harmonique, continue en tous les points à distance finie, ne peut tendre vers l'infini positif et vers l'infini négatif d'une manière différente;

2° Que, si une fonction harmonique est telle que son rapport à une puissance entière et positive du rayon vecteur ait pour limite zéro quand le rayon vecteur augmente indéfiniment, la fonction se réduit à un polynome.

En rapprochant ces deux propositions, on obtient ce théorème général :

Si une fonction harmonique est telle que son rapport à une puissance entière et positive du rayon vecteur ne varie pas entre l'infini négatif et l'infini positif quand le rayon vecteur croît au delà de toute limite, la fonction doit nécessairement se réduire à un polynome.

Picard (Ém.). — Sur les équations linéaires du second ordre renfermant un paramètre arbitraire. (379-383).

M. Picard étudie l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k A(x) y = 0, \tag{1}$$

où k est une constante et $A(x)$ une fonction continue supposée positive dans un certain intervalle (a, b).

On montre facilement que les valeurs de k, pour lesquelles cette équation a une intégrale continue ainsi que sa dérivée première, et s'annulant pour $x = a$ et $x = b$, forment une suite discontinue de valeurs positives $k_1, k_2, \ldots$.

L'auteur donne le moyen d'obtenir, par une suite de calculs réguliers, les termes de cette suite et les intégrales singulières correspondantes.

Pour cela, il envisage l'intégrale u de l'équation (1) qui, pour $x = a$ et $x = b$, prend respectivement les valeurs numériques *arbitraires* A et B. Considérée comme fonction de k, u est une fonction uniforme, dont les points *singuliers* sont précisément $k_1, k_2 \ldots$, et ces points sont des *pôles simples* de u.

Cela posé, voici comment on calculera k_1.

Tant que $k < k_1$, on aura pour u le développement

$$u = u_0 + u_1 k + \ldots + u_n k^n + \ldots.$$

Formant les constantes

$$U_n = \int_a^b u_0(x) u_n(x) A(x)\, dx,$$

on calculera k_1 par la formule

$$k_1 = \lim_{n=\infty} \frac{U_{n-1}}{U_n}.$$

La première valeur singulière k_1 étant obtenue, on peut, puisque k_1 est un pôle de u, écrire

$$u = \frac{u'}{1 - \frac{k}{k_1}} + v_0 + v_1 k + \ldots + v_n k^n + \ldots \qquad [u' = \lim_{n=\infty} (u_n k_1^n)],$$

jusqu'à $k = k_2$.

On formera la suite des quantités

$$V_n = \int_a^b v_0(x) v_n(x) A(x)\, dx,$$

et l'on aura

$$k_2 = \lim_{n=\infty} \frac{V_n}{V_{n-1}}.$$

On peut continuer ainsi indéfiniment, et l'on aura k_3, k_4, ...

Poincaré. — Sur certains développements de séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur. (383-387).

Le problème du refroidissement d'un solide de forme quelconque est résolu quand on sait :

1° Former les fonctions fondamentales U_n qui satisfont aux conditions

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0 \quad \text{à l'extérieur du corps,}$$
$$\frac{dU_n}{dn} + k U_n = 0 \quad \text{à la surface;}$$

2° Démontrer qu'une fonction arbitraire V peut être développée en série de la forme

$$V = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + \ldots.$$

Dans le cas du cylindre de révolution et dans celui de la sphère, les fonctions fondamentales se ramènent aux fonctions de Bessel ou mieux aux fonctions

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J(x) = \sum \frac{(-1)^\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+n+1)}.$$

Dans le cas du cylindre, chaque fonction fondamentale U_n est le produit de trois facteurs :

1° Le premier facteur est $r^n \cos n\omega$ ou $r^n \sin n\omega$;
2° Le second facteur est $\sin \lambda z$ ou $\cos \lambda' z$, λ, λ' étant définis par les équations transcendantes

$$h \operatorname{tang} \lambda a + \lambda = 0, \qquad h \cot \lambda' a = \lambda'$$

($2a$ est la longueur du cylindre);
3° Le troisième facteur est la fonction $\varphi(\mu r)$, μ étant une des racines de l'équation transcendante

$$\mu \varphi'(\mu) + (n + h)\varphi(\mu) = 0.$$

Dans le cas de la sphère, une fonction fondamentale quelconque sera le produit de $r^{n-\frac{1}{2}}$, d'une fonction sphérique d'ordre $n - \frac{1}{2}$ et de la fonction $\varphi(\mu r)$, μ étant cette fois racine de l'équation

$$\mu \varphi'(\mu) + \left(n - \frac{1}{2} + h\right)\varphi(\mu) = 0.$$

Ici le nombre n ne sera plus un entier quelconque comme dans le cas du cylindre, mais $2n$ sera un entier impair.

Le problème de refroidissement d'un cylindre ou d'une sphère, de rayon 1, est alors ramené à montrer qu'une fonction arbitraire V de r peut, entre $r = 0$ et $r = 1$, être développée en série de fonctions $\varphi(\mu r)$.

C'est à cette démonstration qu'est consacrée la Note de M. Poincaré.

Vogt. — Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre quadrique. (395-397).

Soient

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$
$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$S' = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0$$

une quadrique directrice Σ, une autre quadrique S, et la polaire réciproque S' de S par rapport à Σ.

S'il existe un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ conjugué par rapport à Σ et dont les arêtes sont tangentes à S, on sait que l'invariant

$$\Phi = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

doit être nul.

M. Vogt indique une méthode nouvelle qui permet de retrouver ce résultat, de démontrer la réciproque et de déterminer tous les tétraèdres jouissant de la propriété énoncée.

Les coordonnées du sommet A_1 dépendent algébriquement d'un paramètre variable ρ_1; les paramètres ρ_2, ρ_3, ρ_4 des autres sommets sont les racines de

l'équation bicubique symétrique

$$(1) \qquad f(\rho, \rho_1) = \Delta \rho^2 \rho_1^2 (\rho + \rho_1) + 2\Theta \rho^2 \rho_1^2 + 2\Theta' \rho\rho_1 + \Delta'(\rho + \rho_1) = 0,$$

de sorte que les éléments du tétraèdre sont des fonctions algébriques de ρ_1. La relation précédente étant du genre 2, on peut faire en sorte que ces mêmes éléments s'expriment par des fonctions hyperelliptiques de deux paramètres u_1, u_2 liés par la relation $\Im_{02}(u_1, u_2)$.

De là résulte que si l'on a $\rho_1 = F(u_1, u_2)$ la relation (1) s'obtient en éliminant u_1 u_2 entre

$$\rho_1 = F(u_1, u_2), \qquad \rho = F(-u_1, -u_2), \qquad \Im_{02}(u_1, u_2) = 0.$$

C'est la généralisation de cette remarque, développée par Halphen à propos des polygones de Poncelet, que toute relation biquadratique symétrique entre ρ et ρ_1 s'obtient en éliminant u entre $\rho = f(u)$ et $\rho_1 = f(u + u_0)$, où f est une fonction elliptique particulière.

Engel. — Sur une dégénérescence du groupe projectif général. (397-398).

Par la transformation de contact

$$x_1 = \frac{x - y'}{2}, \qquad y_1 = \frac{y}{2i} + \frac{1}{8i}(x^2 - 2xy' - y'^2), \qquad y'_1 = \frac{x + y'}{2i},$$

le groupe projectif général du plan se change en un groupe de transformations de contact dont les transformations infinitésimales ont les fonctions caractéristiques.

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} 1, \quad x_1, \quad y'_1, \quad x_1^2 + y_1'^2, \quad y_1 - \frac{1}{2} x_1 y', \\ x_1(x_1^2 + y_1'^2) - 4y'_1\left(y_1 - \frac{1}{2}x_1 y'_1\right), \quad y'_1(x_1^2 + y_1^2) + 4x_1\left(y_1 - \frac{1}{2}x_1 y'_1\right), \\ (x^2 + y'^2)^2 + 16\left(y_1 - \frac{1}{2}x_1 y'_1\right)^2. \end{array} \right.$$

Ce dernier groupe peut dégénérer. Si l'on remplace y_1, y'_1 par λy_1, $\lambda y'_1$, qu'on supprime le facteur λ dans toutes les fonctions caractéristiques qui deviennent divisibles par λ, et qu'on fasse alors $\lambda = 0$, on trouve le groupe

$$(2) \quad 1, \quad x_1, \quad y'_1, \quad x_1^2, \quad y_1 - \frac{1}{2} x_1 y'_1, \quad x_1^3, \quad y'_1 x_1^2 + 4x_1\left(y_1 - \frac{1}{2} x_1 y'_1\right) \quad x_1^4,$$

qui est une dégénérescence du groupe (1) et, par suite, du groupe projectif général.

La méthode de M. Engel est applicable au groupe projectif général d'un espace quelconque.

Lecornu. — Sur le mouvement général de deux points reliés par un ressort. (398-400).

L'équation du mouvement de l'un des deux points, A, est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \mu^2 x = \varphi(t).$$

Dans le cas d'un mouvement pendulaire, $\varphi(t) = h \sin qt$, l'intégration en termes finis s'effectue sans difficulté et, en posant $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$, on trouve

$$x = e^{-\lambda t}(C\cos\omega t + C'\sin\omega t) + h\frac{(\mu^2 - q^2)\sin qt - 2\lambda q\cos qt}{(\mu^2 - q^2)^2 + 4\lambda^2 q^2}.$$

Ce résultat met en évidence la superposition de deux mouvements vibratoires. L'un s'éteint rapidement à cause du facteur $e^{-\lambda t}$; l'autre, de période $\frac{2\pi}{q}$, égale à celle du mouvement de A, est le seul qui subsiste au bout d'un temps très court. On réalisera ainsi la transformation d'un mouvement vibratoire donné en un mouvement de même période, mais de phase différente.

Pour que l'amplitude du mouvement du second point, B, soit égale à celle du mouvement de A, il faut et il suffit que l'on ait $q^2 = 2\mu^2 - 4\lambda^2$, condition qui se réduit à $\lambda = \frac{\mu}{2}$ dans le cas où $\mu = q$. Ceci donne la solution pratique de la transformation d'un mouvement rectiligne pendulaire en un mouvement circulaire et uniforme.

Poincaré. — Sur l'équation des vibrations d'une membrane. (447-451).

M. Poincaré démontre rigoureusement l'existence de fonctions satisfaisant, à l'intérieur d'un domaine à trois dimensions, à l'équation

$$\Delta u + ku = 0$$

(où k est une constante), et s'annulant à la frontière.

Ce résultat s'applique au cas d'un domaine à deux dimensions, c'est-à-dire au problème des vibrations d'une membrane. M. Schwarz avait démontré l'existence du son fondamental d'une membrane; M. Picard, celle de la première harmonique; M. Poincaré démontre donc celle des harmoniques supérieures.

La démonstration s'étend encore au cas où la condition à la limite, au lieu d'être $u = 0$, serait

$$\frac{du}{dn} + hu = 0,$$

c'est-à-dire au problème du refroidissement d'un corps solide.

Lindelöf. — Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre. (454-457).

On considère une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et l'on suppose que $f(x, y)$ soit finie et continue pour toutes les valeurs *réelles* de x et y, satisfaisant aux inégalités $|x| < a$, $|y| < b$, et qu'il existe une constante positive k telle que

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k\,|y' - y|.$$

Pour trouver l'intégrale de l'équation (1) qui s'annule pour $x = 0$, on aura, d'après la méthode de M. Picard, à former une suite de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ définies par les équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, 0), \qquad \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1) + \ldots, \qquad \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_{n-1}),$$

les constantes d'intégration étant choisies de façon que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soient toutes nulles pour $x = 0$. M. Picard démontre que la série

(1) $$y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$

converge uniformément et représente l'intégrale cherchée lorsque x reste en valeur absolue inférieure à la plus petite des trois quantités

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{k},$$

M désignant le maximum de $|f(x, y)|$ pour $|x| < a$ et $|y| < b$.

En modifiant un peu la démonstration de M. Picard, M. Lindelöf montre que le dernier terme $\frac{1}{k}$ peut être supprimé.

Le champ de convergence de la série (1) est, en général, limité. Toutefois, M. Lindelöf indique des cas étendus où cette série sera toujours convergente, et où par conséquent l'intégrale restera finie et sera représentée, pour toute valeur de x, par un même développement.

Voici, dans le même ordre d'idées, un théorème assez général :

« $f(x, y)$ est une fonction continue et positive pour $x > 0$, $y > 0$, et qui va constamment en croissant ou constamment en décroissant quand y augmente. Alors, si l'équation admet une intégrale finie et continue pour $x > 0$, celle-ci sera nécessairement fournie par les approximations successives dont la suite convergera pour toute valeur positive de x. »

Picard (Em.). — Observations sur la Communication précédente. (457-458).

M. Picard met à profit la modification apportée à sa propre méthode par M. Lindelöf pour établir d'une manière très simple ce théorème qu'il avait antérieurement démontré d'une façon plus compliquée :

« Si l'on applique les approximations successives au cas où, dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

la fonction f est holomorphe en x et y à l'intérieur des cercles C et C' de rayons a et b décrits des points $x = 0$, $y = 0$ comme centres et a pour module



maximum M dans chacun de ces cercles, l'intégrale sera représentée par la série

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$

dont chaque terme est holomorphe à l'intérieur du cercle ayant l'origine pour centre et un rayon h, en désignant par h la plus petite des deux quantités a et $\frac{b}{M}$. »

Poincaré. — Sur la série de Laplace. (497-501).

M. Poincaré donne une démonstration extrêmement simple du théorème que Dirichlet a démontré le premier d'une manière assez compliquée : une fonction arbitraire des coordonnées d'un point sur une sphère peut être développée en une série de fonctions sphériques.

Dirichlet n'a d'ailleurs pas défini avec une précision suffisante les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction arbitraire. M. Poincaré les précise de la manière suivante :

Il suppose la surface de la sphère partagée en un certain nombre de régions et chacune de ces régions limitée par un polygone curviligne formé d'arcs analytiques; dans chacune de ces régions la fonction arbitraire à développer est supposée analytique, mais elle peut éprouver des discontinuités quelconques, tout en restant finie, quand on passe d'une région à l'autre.

La démonstration de M. Poincaré peut même être étendue à des cas plus généraux, mais celui-ci est le plus important.

Goursat. — Sur les intégrales qui s'expriment par des logarithmes. (515-517).

Abel a démontré que, si l'intégrale $\int R(x, y)\,dx$, attachée à la courbe $(x, y) = 0$, s'exprime par la somme d'un nombre fini de logarithmes de fonctions algébriques, elle est nécessairement de la forme

$$\int R(x, y)\,dx = A \log u + B \log v + \ldots + L \log t,$$

A, B, ..., L étant des constantes et u, v, ..., t des fonctions rationnelles de x et y.

La question de reconnaître *a priori* si l'intégrale $\int R(x, y)\,dx$ peut s'exprimer ainsi est très difficile, mais on peut décomposer ce problème en plusieurs autres.

On peut d'abord réduire à un nombre minimum s, le nombre des logarithmes qui figurent dans l'expression de l'intégrale proposée.

Pour achever le problème, il faudrait déterminer les s fonctions rationnelles sur lesquelles portent ces logarithmes. Cette détermination ne comporterait que des difficultés algébriques si l'on connaissait un certain nombre entier M ou du moins une limite pour ce nombre. Malheureusement il ne semble pas possible, en général, de trouver une telle limite, ni, par suite, de résoudre le problème par des opérations dont la fin soit assurée.

D'Ocagne. — Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point. (517-520).

Étant données les lois de probabilité p_1, p_2, ..., p_n des erreurs de situation d'un point sous l'influence de n causes *isolées*, quelle est la loi de probabilité p des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres?

Cette question, depuis longtemps résolue dans le cas des erreurs linéaires, ne semble pas avoir encore été traitée dans le cas du plan. M. d'Ocagne donne de ce dernier cas une solution très simple.

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait que deux causes d'erreurs, les probabilités p_1, p_2 sont exprimées par la formule

$$p_i = \frac{\delta_i}{\pi} e^{-(\alpha_i x^2 + 2\beta_i xy + \gamma_i y^2)}\, dx\, dy \qquad (i = 1, 2),$$

où α_i, β_i, γ_i, δ_i sont des constantes connues. Alors la probabilité p a pour expression

$$p = \frac{\delta}{\pi} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)}\, dx\, dy,$$

où les coefficients α, β γ, δ ont les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\delta_2\alpha_1 + \delta_1\alpha_2}{D} \\ \beta &= \frac{\delta_2\beta_1 + \delta_1\beta_2}{D} \\ \gamma &= \frac{\delta_2\gamma_1 + \delta_1\gamma_2}{D} \\ \delta^2 &= \frac{\delta_1\delta_2}{D} \end{aligned}\right\} \quad D = (\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2.$$

On remarquera que ces formules permettent d'obtenir, dans le cas des erreurs linéaires, d'une manière très simple et très rigoureuse, le théorème qui fait connaître le carré de l'erreur probable résultante comme somme des carrés des erreurs probables partielles.

André (*D.*). — Sur le triangle des séquences. (575-578).

L'auteur considère une permutation quelconque des n premiers nombres; sur n ordonnées équidistantes, il porte, à partir de l'axe des abscisses, des longueurs proportionnelles à ces nombres; il joint enfin par un trait l'extrémité de chacune de ces longueurs à l'extrémité de la suivante. On obtient ainsi une ligne brisée de $n-1$ côtés qu'on peut regarder comme composée de suites alternatives de côtés tous montants ou tous descendants. Chacune de ces suites est une ***séquence***, montante ou descendante, de la permutation.

Les permutations des n premiers nombres peuvent être partagées en deux espèces suivant le nombre pair ou impair de leurs séquences. A l'aide de la formule fondamentale

$$P_{n,s} = s\,P_{n-1,s} + 2\,P_{n-1,s-1} + (n-s)\,P_{n-1,s-2},$$

où $P_{n,s}$ est le nombre des permutations qui présentent n séquences, on construit *le triangle des séquences*

$$\begin{array}{llll} 2 & & & \\ 2 & 4 & & \\ 2 & 12 & 10 & \\ 2 & 28 & 58 & 32, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

où $P_{n,s}$ se trouve à la rencontre de la colonne de rang s avec la ligne de rang $n-1$.

En étudiant ce triangle, M. André a découvert de nombreuses propositions, dont il énonce les principales.

Moureaux. — Sur un corollaire du théorème de Catalan. (700-701).

Ce corollaire, plus général que le théorème lui-même, est le suivant :

Si l'on élève une somme de n carrés à une puissance qui soit puissance de 2, on obtient encore une somme de n carrés.

Si cette puissance est 2, on obtient le théorème de Catalan.

Picart (*L.*). — Sur le mouvement d'un système de forme variable. (733-736).

Le système envisagé par l'auteur est formé par un corps solide de révolution composé de couches concentriques homogènes et un point matériel P mobile par rapport au solide. La résultante des forces extérieures est supposée passer par le centre de gravité général.

M. L. Picart étudie les effets du déplacement du point P sur le mouvement du solide. Il divise le problème en trois :

1° Le point P a sa vitesse relative dirigée vers le centre du solide. En particulier, le point P se déplace dans le plan de l'équateur. Si la rotation du solide est assez lente, le déplacement de P a pour résultat une variation dans la durée de la révolution, sans déplacement sensible de l'axe de rotation.

2° Le point P tourne autour de l'axe de révolution. Le résultat relatif à ce cas peut être étendu au cas où il y a plusieurs points P tournant avec une vitesse commune, et peut se formuler ainsi : si un solide de révolution est recouvert d'une protubérance tournant autour de son axe, le mouvement des axes principaux du système sera de même nature que s'il était tout entier solide.

3° Le point tourne autour d'un axe couché dans l'équateur du solide. Si la vitesse de rotation est suffisamment petite, la rotation des axes principaux aura une direction et une grandeur sensiblement constantes dans l'espace.

Wælsch. — Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes. (736-737).

M. Wælsch fait connaître deux moyens pour obtenir l'invariant du deuxième ordre d'une congruence pour le groupe projectif :

1° Soient M, M' les deux points focaux d'un groupe G de la congruence; P, P' les plans focaux. On considère le faisceau de rayons qui passent par M et sont situés dans P'. A chaque point de la surface focale correspond ainsi un faisceau; les faisceaux correspondant aux points voisins de M se trouvent dans un complexe linéaire C. Pour le point M', on trouve par le même procédé le complexe linéaire C'. *Ces deux complexes* C, C' *ont un rapport anharmonique* δ, *qui est le seul invariant différentiel du deuxième ordre de la congruence pour le groupe projectif.*

2° La surface focale de la congruence a deux tangentes asymptotiques au point M et deux au point M'. On a alors quatre rayons de la congruence voisins du rayon g et pour lesquels un des points focaux se trouve sur une de ces tangentes asymptotiques. Ces quatre rayons ont un rapport anharmonique δ' lié à δ par la relation

$$\left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^2+\left(\frac{\delta'-1}{\delta'+1}\right)^2=1.$$

L'invariant projectif s'exprime simplement par des invariants différentiels pour le groupe de mouvement. Si D est la distance de deux points limites du rayon g, et si R_1, R_2, R'_1, R'_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface focale aux points focaux M, M', on a la relation

$$\delta=\frac{R_1 R_2 R'_1 R'_2}{D^4},$$

qui pour $\delta=1$ donne la propriété des congruences de Ribaucour récemment signalée par MM. Demoulin et Cosserat.

Picard (*Em.*). — Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire. (760-764).

M. Picard montre comment sa méthode des approximations successives facilite l'établissement d'un théorème très général, relatif aux équations différentielles renfermant des paramètres arbitraires, qui a joué un rôle capital dans les recherches de M. Poincaré sur les solutions périodiques des équations de la Dynamique. Ce théorème, dans le cas d'une seule équation, est le suivant :

« Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\mu,t).$$

» On considère la solution

$$x=\theta(t,\mu)$$

qui s'annule pour $t=0$. Pour $\mu=0$, on suppose que la solution $\theta(t,0)$ est continue de $t=0$ à $t=t_0$. On admet de plus que $f(x,\mu,t)$ peut, entre $t=0$ et $t=t_0$, être développée suivant les puissances de μ et de $x-\theta(t_0)$, les coefficients des développements étant des fonctions continues de t.

» Dans ces conditions, l'intégrale $\theta(t, \mu)$ peut être développée suivant les puissances de μ (pourvu que μ soit suffisamment petit) pour toute valeur de t comprise entre o et t_0. »

Mozat. — Sur le rapport conique et la relation conique. (790-793).

Soient, sur une droite, dix points quelconques accolés deux à deux, aa', bb', cc', dd', ee' et une conique quelconque tangente à la droite en un point O. De a et a' on mène les tangentes à la conique et, par leur intersection, on détermine un point A. On détermine de même les points BCDE, en partant des points bb', cc', dd', ee'. Le rapport anharmonique (E, A, B, C, D) est constant lorsqu'on fait varier la conique et lorsqu'on fait varier son point de contact.

Ce rapport anharmonique constant est le *rapport conique* des dix points aa', bb', cc', dd', ee'.

Si aa', bb', cc', dd' restent constants et que ee' varient, on aura sur la droite une série de points, en *relation conique*.

M. Mozat développe les propriétés de ce rapport et de cette relation et indique quelques-unes des nombreuses applications dont cette théorie paraît susceptible.

Painlevé. — Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. (845-848).

M. Painlevé a déjà étudié les transcendantes uniformes $u(z)$ telles que les valeurs $z_i(u)$ se déduisent d'un nombre fini d'entre elles $z_1, z_2, \ldots, z_q$ par une infinité de transformations

$$\varphi_i(z_i, z) = 0,$$

où φ_i est un polynome de degré m en z_i en z. Il a montré que toutes ces fonctions se déduisent des fonctions *automorphes* par un changement algébrique de la variable (*Comptes rendus*, juin 1892). Actuellement, il donne de ce théorème une démonstration nouvelle, qui lui permet de passer au cas de plusieurs variables.

En conséquence, il se pose la question suivante : étudier les transcendantes uniformes $u(z)$, telles que les valeurs z_i de z correspondent à une valeur u_0 de u se déduisent d'un nombre fini d'entre elles, $z, \zeta, \ldots$ par une infinité de transformations $\varphi_i(z_i, z, \zeta) = 0$, où φ_i est un polynome de degré m par rapport à chaque variable.

Cette question rentre elle-même dans un problème plus général. « Étudier les transcendantes uniformes u, v de deux variables z, ζ telles que toutes les déterminations z_i, ζ_i de z, ζ correspondant aux valeurs u_0, v_0 de u, v se déduisent d'un nombre fini d'entre elles $(z_1, \zeta_1), \ldots, (z_q, \zeta_q)$ par une infinité de transformations

$$(1) \qquad \varphi_i(z_i, z, \zeta) = 0, \qquad \psi_i(\zeta_i, z, \zeta) = 0,$$

où φ_i, ψ_i sont des polynomes de degré m par rapport à chaque variable. »

M. Painlevé montre que, les substitutions (1) étant exprimées algébrique-

ment à l'aide d'un nombre minimum de paramètres $a, b, \ldots, f$, l'ensemble des substitutions

$$(2) \qquad \varphi(z', z, \zeta, a, b, \ldots, f) = 0, \qquad \psi(\zeta', z, \zeta, a, b, \ldots, f) = 0$$

forme un groupe continu algébrique.

On peut aller plus loin et prouver que tout groupe (2) peut se ramener algébriquement soit à un des *types canoniques* de Sophus Lie, soit à un des groupes définis par les formules d'addition des fonctions périodiques de deux variables.

On n'a alors à considérer que les groupes infinis discrets renfermés dans les groupes canoniques de Lie. Ces derniers comprennent les groupes hyperfuchsiens, les groupes hyperabéliens et d'autres encore qui diffèrent essentiellement de ceux-là, mais qui, pas plus que les groupes de M. Picard, ne sont aptes à exprimer les coordonnées d'une surface algébrique *quelconque*.

Padé. — Sur la généralisation des fractions continues algébriques. (848-850).

En étudiant l'ensemble des fractions rationnelles approchées d'une fonction, M. Padé a été conduit à des relations linéaires liant les numérateurs et les dénominateurs de trois fractions convenablement choisies dans l'ensemble.

Les résultats qu'il a obtenus dans cette question particulière s'étendent au problème général de la détermination des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ qui vérifient l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n = S . x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+n-1},$$

où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ désignent des séries entières données, à terme constant différent de zéro, et S une série de même nature, mais qui n'est pas donnée.

Von Koch. — Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. (850-853).

Soit n un entier arbitraire, q le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

1° On peut former une fonction rationnelle $\vartheta(n)$ dont les coefficients s'expriment rationnellement par rapport aux nombres 1, 2, ..., n et telle que l'on ait

$$q = \vartheta(1) + \vartheta(2) + \ldots + \vartheta(n).$$

2° On peut former une fonction entière $\theta(n)$ dont les coefficients s'expriment sous la forme de polynomes entiers à coefficients rationnels par rapport à un nombre π, de telle manière que l'on ait

$$q = \theta(1) + \theta(2) + \ldots + \theta(n).$$

Picard (Ém.). — Sur un exemple d'approximations successives divergentes. (900-902).

En appliquant sa méthode des approximations successives aux équations de

la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction positive croissant en même temps que y, M. Picard a été amené à reconnaître un fait analytique des plus curieux : les approximations d'ordre impair, y_1, y_3, y_5, ... ont une limite, et les approximations d'ordre pair en ont une autre en général. Les deux limites ne coïncident nécessairement que si l'intervalle (a, b) est suffisamment petit.

Un exemple très simple de l'inégalité des deux limites est fourni par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} e^y.$$

La méthode des approximations successives conduit à deux limites différentes quand l'intervalle $x = 0$, $x = b$ où on l'applique est suffisamment grand, ou, pour préciser, si l'on substitue à b la quantité α définie par la relation

$$b = 2 \int_{\log \alpha}^{0} \frac{dg}{\sqrt{e^y - \alpha}},$$

quand α est assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} < \frac{14}{3}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 4 - \frac{2}{3}\alpha.$$

Hadamard. — Sur les mouvements de roulement. (911-912).

L'étude des mouvements de roulement rentre dans une classe particulière de problèmes, ceux où les paramètres q_1, q_2, ..., q_{m+p} qui définissent la position du système sont liés non par des équations en termes finis, mais par p équations linéaires aux différentielles totales E non intégrables. En appliquant à ces problèmes la méthode de Lagrange, on calcule l'expression de la demi-force vive T comme si les $m+p$ paramètres étaient indépendants.

M. Hadamard fait remarquer qu'il existe cependant dans beaucoup de cas certaines combinaisons linéaires des équations E dont on peut se servir, avant toute différentiation, pour simplifier l'expression de T. On trouve de pareilles combinaisons toutes les fois que p est supérieur à $\frac{m(m-1)}{2}$; leur nombre est, en général, $p - \frac{m(m-1)}{2}$; mais il peut augmenter pour des formes particulières des équations E, que l'auteur caractérise d'une manière simple en faisant intervenir la considération de l'hyperespace à $m+p$ dimensions.

Poincaré. — Sur l'équilibre des mers. (948-952).

La théorie des marées est très imparfaite. Laplace n'a pu arriver à intégrer ses équations qu'en supposant qu'il n'y a pas de continents et que la profondeur de la mer ne dépend que de la latitude.

Dans le *Traité de Philosophie naturelle* de Thomson et Tait, on cherche à tenir compte de la présence des continents, mais en négligeant l'attraction

mutuelle des eaux soulevées. Plus loin, on tient compte de cette attraction, mais en supposant qu'il n'y a pas de continents.

M. Poincaré reprend la question et montre comment elle se pose analytiquement, laissant à d'autres chercheurs le soin de calculer une limite supérieure de certains coefficients qui seraient nuls si les terres n'existaient pas et qui, avec la distribution réelle des continents, ont probablement de très petites valeurs.

Kœnigs. — Un théorème concernant les aires décrites dans le mouvement d'une figure plane. (965-966).

Si l'on fait rouler un arc fini AB d'une courbe quelconque sur un arc quelconque CD égal en longueur, et successivement d'un côté et de l'autre de cet arc, l'aire balayée par le rayon IM, qui joint le centre instantané à un point M lié à l'arc AB, est indépendante de la forme de l'arc CD.

Pour évaluer cette aire, on pourra, par exemple, choisir pour l'arc CD un segment de tangente.

Lelieuvre. — Sur les lignes de courbure des surfaces cerclées. (967-968).

Quand les lignes de courbure d'une surface cerclée font en chaque point des angles égaux avec le cercle générateur, elles se déterminent par des équations de Riccati ou des quadratures.

Delassus. — Sur les intégrales analytiques des équations de la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z), \qquad F(z) = \sum a_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}, \qquad i + k < n.$$

(968-970).

Dans une région où tous les a_{ik} sont analytiques, on prend un segment de droite L parallèle à Ox et l'on cherche l'intégrale z ayant pour fonctions initiales $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ développables en tous les points de L.

L'auteur montre qu'il existe une région R entourant L et telle que l'intégrale y est analytique, quelles que soient les fonctions X.

Ce théorème subsiste quand on substitue au segment L un arc analytique quelconque.

La région dans laquelle l'intégrale est analytique se détermine, en général, immédiatement au moyen des limites entre lesquelles les fonctions initiales sont développables.

Bendixon. — Sur un théorème de M. Poincaré. (971-973).

M. Poincaré a donné le développement des intégrales d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i - X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les X_i sont développés suivant les puissances entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ne contiennent que des termes du second degré au moins.

L'analyse de M. Poincaré s'appuie sur les deux hypothèses suivantes :

1° Les n points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont tous d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine;

2° On n'a pas de relation

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_{\nu-1}\lambda_{\nu-1} + m_{\nu+1}\lambda_{\nu+1} + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_\nu,$$

$m_1, \ldots, m_n$ désignant des nombres entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.

M. Bendixon montre que cette dernière hypothèse est inutile.

De Tannenberg. — Sur les équations de la Mécanique. (1092-1093).

Étant données n équations différentielles

$$(1) \qquad x''_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n), \qquad x'_i = \frac{dx_i}{dt}, \qquad x''_i = \frac{d^2x_i}{dt},$$

si l'on forme la combinaison

$$u_i = dx'_i - \sum_k \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x'_k}dx_k,$$

le système d'équations différentielles à $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$,

$$(2) \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad u_n = 0,$$

est un système *invariant* pour tous les changements de variables

$$X_k = F_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Il en est, par suite, de même du système

$$(3) \qquad S_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x'_i}\frac{\partial f}{\partial x'_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si, en particulier, les fonctions φ sont des formes quadratiques par rapport aux x', l'invariance des systèmes (2) et (3) entraîne la conséquence suivante : Pour que le système (1) soit équivalent à un système de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il faut et il suffit que les équations (2) et (3) admettent une intégrale du second degré $T(x, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$ appartenant à la classe *générale*.

Entre autres résultats auxquels conduit l'étude des systèmes (2) et (3), M. de Tannenberg indique une solution nouvelle du problème fondamental résolu par Lipschitz : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme T soit la transformée d'une forme quadratique T_0 à coefficients constants.

De Salvert. — Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de deuxième espèce. (1181-1187).

Autonne. — Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (1184-1187).

Maillet. — Sur les propriétés des groupes de substitutions dont l'ordre est égal à un nombre donné. (1187-1188).

Quand on se donne, *a priori*, l'ordre d'un groupe de substitutions, ce groupe doit, dans bien des cas, satisfaire à certaines conditions. Réciproquement, des propriétés d'un groupe étant données, son ordre doit, dans bien des cas, satisfaire à certaines conditions.

M. Maillet expose les résultats particuliers qu'il a obtenus en étudiant ces deux problèmes généraux.

Beudon. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (1188-1190).

M. Darboux a donné une méthode, applicable dans des cas très étendus, pour ramener des équations aux dérivées partielles du second ordre à des équations différentielles ordinaires.

En approfondissant le principe de la méthode de M. Darboux, M. Beudon a été conduit à le rattacher à la théorie des groupes de transformation de Lie et, en particulier, à rechercher tous les groupes ponctuels infinis de l'espace à trois dimensions, problème qu'il a complètement résolu.

Si une équation aux dérivées partielles du second ordre admet un groupe infini de transformations ponctuelles, on pourra toujours reconnaître à quel type il appartient et l'on sera ramené au problème de la réduction de ce groupe à sa forme canonique. La réduction une fois effectuée, on peut appliquer sans peine la méthode de M. Darboux, comme l'auteur le montre sur deux exemples.

Petrovitch. — Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zéro. (1190-1193).

Il peut arriver qu'une équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynomes en y de degré $m + 2$ et m, algébriques en x, admette des intégrales uniformes, rationnelles ou transcendantes.

Pour qu'il puisse exister des intégrales uniformes transcendantes, il faut que P et Q soient rationnels en x.

On peut, en s'appuyant sur le théorème de M. Picard relatif aux zéros d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel, donner une limite

supérieure du nombre des intégrales uniformes transcendantes *distinctes*, c'est-à-dire qui ne sont liées par aucune relation algébrique à coefficients uniformes en x :

1° $Q = 0$ a plus de deux racines y distinctes. Alors toute intégrale uniforme est rationnelle.

2° $Q = 0$ a deux racines distinctes. L'équation (1) ne peut avoir deux intégrales uniformes distinctes.

3° $Q = 0$ n'a qu'une seule racine. Il ne peut y avoir plus de deux intégrales uniformes distinctes.

4° Q est indépendant de y. On a alors une équation de Riccati ou une équation linéaire. L'équation de Riccati admet au plus trois, et l'équation linéaire au plus deux intégrales uniformes distinctes.

Des conclusions analogues s'appliquent à une équation quelconque du premier ordre algébrique en x, y, y' et du genre zéro en (y, y').

Stieltjes. — Sur une application des fractions continues. (1315-1317).

Soit

$$F(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots$$

une série à coefficients réels. On suppose tous les déterminants

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ c_{n-1} & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ c_n & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

positifs. Alors tous ces coefficients c_n sont positifs et le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ croît avec n. Admettons qu'il tende vers une limite λ. Alors $F(z)$ peut être développée en fraction continue

$$F(z) = \cfrac{b_0}{1 - \cfrac{b_1 z}{1 - \cfrac{b_2 z}{1 - \ddots}}}$$

où

$$b_0 = A_1, \qquad b_{2n-1} = \frac{A_{n-1} B_n}{A_n B_{n-1}}, \qquad b_{2n} = \frac{A_{n+1} B_{n-1}}{A_n B_n}.$$

Cette fraction existe dans tous le plan (où elle est partout régulière), et admet seulement comme ligne singulière le segment de l'axe réel compris entre $x = \frac{1}{\lambda}$ et $x = \infty$.

Il faut des conditions particulières pour qu'on puisse continuer analytiquement la fonction en traversant cette ligne.

Ainsi, pour que $F(z)$ se réduise à une fonction méromorphe dans tout le plan, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} b_{2n-1} = \lim_{n=\infty} b_{2n} = 0.$$

Vernier (*P.*). — Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. (1317-1320).

Stouff. — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. (1320).

On se donne une équation aux dérivées partielles du second ordre et une courbe dépendant d'un paramètre λ : faire passer une surface satisfaisant à cette équation par deux positions $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ de la courbe. Ce problème peut être résolu (sauf dans un cas exceptionnel) par des séries procédant suivant les puissances de $\Delta\lambda$.

On peut de même déterminer une surface satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du second ordre et passant par deux courbes fixes qui se coupent.

Stieltjes. — Recherches sur les fractions continues. (1401-1403).

M. Stieltjes étudie la fraction continue

$$1 : a_1 z + 1 : a_2 z + 1 : a_3 z + 1 : a_4 z + \ldots,$$

où z est une variable complexe et $a_1, a_2, \ldots$, sont des nombres réels positifs.

Deux cas sont à distinguer suivant que la série (S)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

est convergente ou divergente.

Quand (S) converge, les réduites d'ordre pair et celles d'ordre impair tendent vers deux limites différentes $\frac{p(z)}{q(z)}$ et $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$. Les quatre fonctions $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ sont holomorphes, du genre zéro; elles n'admettent que des zéros simples, réels et négatifs.

Dans le cas où (S) diverge, les réduites d'ordre pair ou impair convergent vers une même limite $F(z)$, convergente dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel.

Pour éclaircir la nature de cette ligne singulière, l'auteur montre que $F(z)$ peut être mise sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

où $\Phi(u)$ est une fonction réelle et croissante depuis $\Phi(0) = 0$ jusqu'à $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$; mais $\Phi(u)$ peut avoir des sauts brusques et n'être pas analytique, d'où l'on conclut qu'*en général* la ligne singulière s'oppose au prolongement analytique de $F(z)$.

Lorsque, la fraction continue étant mise sous la forme $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_4}{z^3} + \ldots$, le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers une limite finie λ, la fonction $\Phi(u)$ reste constante à partir de $u = \lambda$.

De Salvert. — Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de troisième espèce. (1403-1407).

De Séguier. — L'expression du nombre des classes déduite de la transformation des fonctions elliptiques. (1407-1409).

Petot. — Sur les surfaces susceptibles d'engendrer par un déplacement hélicoïdal une famille de Lamé. (1409-1411).

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface (S) soit susceptible d'engendrer par un déplacement hélicoïdal une surface de Lamé.

La congruence engendrée par la droite $\omega\omega_1$ qui, en chaque point de la surface S, joint les deux centres de courbure géodésique des lignes de courbure, appartient à un complexe du premier ordre Σ.

Le mouvement hélicoïdal que doit prendre S s'effectue d'ailleurs autour de l'axe de Σ; de plus, le pas $2\pi h$ de ce mouvement s'obtient immédiatement en multipliant par 2π le paramètre du complexe.

En particulier, si la droite $\omega\omega_1$ rencontre une droite fixe, ou est perpendiculaire à une direction fixe, le mouvement de S se réduit à une rotation autour de cette droite, ou à une translation suivant cette direction.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS of the Royal Society of London.

Vol. 178; 1888 [1].

Chambers (C.). — Sur les variations luni-solaires de la déclinaison magnétique et de la force horizontale à Bombay; sur les variations luni-solaires de la déclinaison magnétique à Trevandrum. (1-43).

Culverwell (E.). — Sur la distinction des maxima et des minima dans le calcul des variations. (95-129).

Dans la première partie de son Mémoire, l'auteur traite le problème en transformant analytiquement l'expression de la variation seconde; il discute la solution donnée par Jacobi dans le même ordre d'idées et montre que la solution de Jacobi reste soumise à quelques objections, dont sa méthode est débarrassée. Dans la seconde Partie, qui est la plus importante, le problème est repris directement, et l'auteur montre que la solution résulte des principes

(1) Voir *Bulletin*, XII_2, p. 148.

mêmes du calcul des variations. Se bornant d'abord au cas d'une seule fonction inconnue ou, si l'on veut, d'une intégrale de la forme

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

M. Culverwell insiste sur le rôle que joue la variation $\delta y^{(n)}$ et montre que la seconde variation, en supposant que les variations δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(n-1)}$ soient nulles aux limites, est de même signe que le terme en $(\delta y^{(n)})^2$ pourvu que le champ de l'intégration soit suffisamment petit. C'est de là qu'il déduit le critérium. Il traite ensuite le problème général, pour un nombre quelconque de fonctions inconnues, d'abord dans le cas où les dérivées d'ordre le plus élevé sont toutes du même ordre, puis dans le cas où elles peuvent être d'ordre différent. Enfin, le cas particulier où il n'entre que des dérivées du premier ordre est traité à part.

Lamb (*H.*). — Sur les nappes de courants ellipsoïdales. (131-159).

Davison (*C.*). — Sur la distribution de la tension dans la croûte terrestre résultant du refroidissement séculaire; considérations spéciales sur l'accroissement des continents et la formation des chaînes de montagnes. (231-241).

Ce Mémoire s'appuie sur les théories que l'on doit à Sir W. Thomson et à M. Darwin : il a d'ailleurs été l'objet d'une Communication de ce dernier.

Darwin (*G.*). — Note sur le précédent Mémoire. (242-249).

Sylvester (*J.*) et *Hammond* (*J.*). — Sur les nombres d'Hamilton.

Si l'on considère la suite de fonctions

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots &= F_0(x), \\ 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots &= F_1(x), \\ 6x^2 + 15x^3 + \ldots &= F_2(x), \\ 36x^3 + \ldots &= F_3(x), \end{aligned}$$

où, en général, les coefficients de la fonction

$$F_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \ldots$$

sont liés aux coefficients de la fonction suivante $F_{n+1}(x)$ par les relations

$$a_{n+1} = b_n + \frac{a_n(a_n+1)}{1.2},$$

$$b_{n+1} = c_n + a_n b_n + \frac{a_n(a_n+1)(2a_n+1)}{1.2.3},$$

$$c_{n+1} = d_n + a_n c_n + \frac{a_n(a_n+1)}{1.2} b_n + \frac{a_n(a_n+1)(a_n+2)(3a_n+1)}{1.2.3.4},$$

les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont dits *différences hamiltoniennes*; les sommes $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$ augmentées de 2 sont les nombres d'Hamilton. M. Hammond obtient sous diverses formes voisines la loi de formation de $F_n(x)$ et montre que les nombres d'Hamilton peuvent se calculer par la formule

$$\begin{aligned} H_{n+1} - 2 = {} & \frac{H_n(H_n - 1)}{1.2} - \frac{H_n(H_n - 1)(H_n - 2)}{1.2.3} \\ & + \frac{H_n(H_n - 1)(H_n - 2)(H_n - 3)}{1.2.3.4} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{n+1} \frac{H_n(H_n - 1)(H_n - 2)\ldots(H_n - n)}{1.2.3\ldots(n+1)}. \end{aligned}$$

Ces nombres jouent un rôle dans la théorie de la transformation de Tschirnhausen, comme l'ont montré Hamilton dans un court rapport sur la méthode de Ferrard, ou plutôt de Bring, relative à l'équation du cinquième degré, puis M. Sylvester lui-même dans un Mémoire inséré en 1886 dans le *Journal de Crelle*. Dans le présent Mémoire, M. Sylvester déduit, de la formule de M. Hammond, une belle loi asymptotique pour les nombres d'Hamilton, qui croissent très rapidement.

Darwin (*G.*). — Sur la figure d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (379-428).

Ce Mémoire, qui fait suite aux recherches antérieures de l'auteur, a été composé avant la publication sur le même sujet du Mémoire de M. H. Poincaré dans les *Acta Mathematica* (t. VII, 1885). Les deux Mémoires, fondés sur des méthodes très différentes, se rencontrent dans diverses conclusions, notamment dans celles qui concernent la forme annulaire d'équilibre.

Thomson (*J.*). — Quelques applications des principes de la Dynamique aux phénomènes physiques. (471-526).

Vol. 179; 1889.

Tomlinson (*H.*). — L'influence de la pression et de la tension sur les propriétés physiques de la matière. Première Partie (*suite*). Élasticité; effet de la magnétisation sur l'élasticité et le frottement intérieur d'un métal. (1-26).

Basset (*A.*). — Sur le mouvement d'une sphère dans un liquide visqueux. (43-63).

Le problème est résolu dans les cas suivants : 1° La sphère se meut en ligne droite sous l'action d'une force constante, telle que la gravité; 2° elle est animée d'un mouvement de rotation autour d'un diamètre, puis abandonnée à elle-même.

Sylvester (*J.*) et *Hammond* (*J.*). — Sur les nombres d'Hamilton. (65-71).

Compléments et corrections au précédent Mémoire sur la loi asymptotique des différences hamiltoniennes.

Walker (*J.*). — Sur les diamètres des cubiques planes. (151-203).

Il s'agit des relations entre une cubique (u) et l'ensemble des droites de son plan qui sont les polaires, relativement à (u), des points d'une droite (L). Cet ensemble devient l'ensemble des diamètres au sens de Newton quand la droite L est à l'infini.

L'enveloppe des droites que l'on vient de dire joue un rôle essentiel dans ce Mémoire, où sont considérés divers covariants de (u) et de (L).

Burbury (*S.*). — Sur l'induction des courants électriques sur des enveloppes conductrices de faible épaisseur. (297-324).

Les auteurs qui ont traité de ce problème ont supposé ordinairement que les conducteurs avaient une forme particulière (sphère, plan indéfini, cylindre, ellipsoïde) et que les variations du champ magnétique extérieur étaient aussi particulières. M. Burbury constitue la théorie générale pour une surface quelconque et une variation quelconque du champ magnétique extérieur.

Forsyth (*A.*). — Invariants, covariants et dérivées par quotient associées à une équation différentielle linéaire. (377-489).

On trouvera dans ce Mémoire le système d'invariants et de covariants pour une équation différentielle linéaire d'ordre n. Ce système est complet en ce sens que toute fonction covariante du même type se déduit, par des opérations purement algébriques, des éléments du système. Les transformations auxquelles l'équation différentielle linéaire est soumise sont supposées être les plus générales de celles qui conservent l'ordre et le caractère linéaire de l'équation, c'est-à-dire que ce sont des transformations linéaires de la variable dépendante z et des transformations arbitraires de la variable indépendante x. La propriété de covariance considérée consiste en ce que les fonctions covariantes, étant formées pour l'équation transformée, sont égales aux fonctions relatives à l'équation proposée, multipliée par un facteur de la forme $\left(\frac{dz}{dx}\right)^\mu$: μ est l'*indice* du covariant.

Le Mémoire de M. Forsyth, sauf une digression importante, est consacré entièrement à l'étude des formes covariantes, de leurs dépendances mutuelles et des méthodes de construction. Il contient huit Parties.

I. Renseignements historiques sur les travaux antérieurs : Recherches de Cockle, Laguerre, Brioschi, Malet, Halphen.

II. Relations entre les coefficients de l'équation générale, mise sous la forme

$$0 = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{n!}{3!(n-3)!} P_3 \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \ldots + P_n y,$$

2nd, Paris

et de l'équation transformée, mise sous la même forme. De ces relations on déduit un invariant d'indice 3 (Brioschi-Halphen), puis les invariants d'indice 4, 5, 6, 7 et l'on prouve qu'il y a $n-2$ invariants fondamentaux (priminvariants), composés chacun de deux parties : une partie linéaire par rapport aux coefficients de l'équation et à leurs dérivées et une partie non linéaire, dont la loi est étudiée. Cette étude conduit à introduire comme forme canonique pour l'équation différentielle linéaire, la forme où les deux termes qui suivent $\frac{d^n y}{dx^n}$ sont nuls. La réduction d'une équation différentielle linéaire à la forme canonique suppose l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre (Laguerre). Pour cette forme canonique la partie non linéaire des invariants disparaît et le reste peut être calculé.

III. De chaque priminvariant Θ_σ peut être déduit, en supposant l'équation proposée sous la forme canonique, l'invariant

$$2\sigma\Theta_\sigma\Theta''_\sigma-(2\sigma+1)\Theta'^2_\sigma,$$

qui est dit la *fonction bidérivée* (quadriderivative function) de Θ_σ. Des deux priminvariants Θ_λ, Θ_μ on peut déduire l'invariant

$$\mu\Theta_\mu\Theta'_\lambda-\lambda\Theta_\lambda\Theta'_\mu,$$

qui est dit le *jacobien de* Θ_λ, Θ_μ.

Tous les invariants algébriquement indépendants que l'on peut obtenir par ces procédés peuvent être classés d'après leurs degrés par rapport aux coefficients de l'équation différentielle. La première classe contient les priminvariants de la première section; la seconde classe contient les $n-2$ bidérivées de ces priminvariants, et les $n-3$ jacobiens indépendants; chaque classe suivante contient $n-2$ invariants propres; les invariants sont dits *priminvariants, quadrinvariants, cubinvariants, quartinvariants,* etc.

IV. Application d'un théorème de Clebsch [1]. Rôle des mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_n & y'_n & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

formé avec un système de solutions fondamentales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation différentielle linéaire et, en particulier, des mineurs (déterminants d'ordre p) que l'on déduit des p premières lignes, et dont le type est

$$t_p=\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \cdots & y_1^{(p-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_p & y'_p & \cdots & y_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \qquad (p=1, 2, 3, \ldots, n-1);$$

[1] *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (*Göttigen Abh., etc.*, t. XVII; 1872).

les $n-2$ variables dépendantes ainsi formées satisfont chacune à une équation différentielle linéaire; les $n-2$ équations sont dites associées à l'équation proposée; l'une d'elles est l'adjointe de Lagrange. Les invariants des équations associée à la proposée sont des invariants de la proposée. Les équations différentielles que vérifient les variables (indépendantes) associées de rang complémentaire sont réciproquement adjointes.

V. Les procédés de la troisième section (bidérivées, jacobiens) sont appliqués aux variables dépendantes, originales ou associées, et l'on parvient ainsi à deux classes de covariants indépendants : les covariants de la première classe contiennent une variable dépendante et ses dérivées; les covariants de la seconde classe sont les jacobiens d'un invariant et d'une variable dépendante.

VI. Applications : équations du second ordre; théorèmes de Schwarz et de Kummer. Équations du troisième ordre; réduction à la forme canonique

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + \Theta u = 0.$$

Examen du cas où Θ est nul. Équation aux quotients. Construction des solutions de l'équation proposée au moyen de deux solutions de l'équation aux quotients. Problèmes analogues pour l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre; étude des équations associées.

VII. La septième section est une digression sur les dérivées par quotient (*quotient-derivatives*). Si l'on considère une expression de la forme

$$S = \frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n-1} Z^{n-1}}{B_0 + B_1 z + \ldots + B_{n-1} Z^{n-1}},$$

où les A et les B sont des constantes arbitraires, et z la variable indépendante, le premier membre $[s, z]_n$ de l'équation différentielle d'ordre $2n-1$ obtenue en éliminant les constantes arbitraires est la $n^{\text{ième}}$ dérivée par quotient. Ainsi l'on a

$$[s, z]_2 = \begin{vmatrix} s'' & 2s' \\ s''' & 3s'' \end{vmatrix}.$$

Les dérivées par quotient s'expriment simplement sous forme de déterminants. Les dérivées par quotient que l'on vient de définir sont impaires en ce sens que la plus haute dérivée de s qui y figure est d'ordre impair; on obtient les dérivées par quotient paires en formant, par élimination des constantes arbitraires A, B, C, l'équation différentielle que vérifie l'expression

$$s = \frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n-1} z^{n-1}}{B_0 + B_1 z + \ldots + B_{n-1} z^{n-1} + C z^n}.$$

Les dérivées par quotient impaires ou paires offrent entre elles d'intéressantes relations. Leur théorie peut se rapprocher de celle des *réciprocants*.

VIII. La huitième et dernière section est consacrée à démontrer que les concomitants obtenus dans la seconde, la troisième et la cinquième sections sont complets. C'est une transformation homographique de la variable indépendante qui change une forme en une autre : l'auteur, en employant la méthode des

variations infinitésimales, déduit deux équations aux dérivées partielles que doit vérifier tout concomitant : l'une détermine la forme du concomitant, l'autre, son indice, quand la forme est connue. Ces équations caractéristiques sont employées à déduire les covariants qui contiennent la variable primitive, puis les invariants qui dérivent de Θ_1; on obtient enfin des formes simplifiées pour les invariants et covariants d'ordre supérieur. Finalement l'auteur, conformément à une méthode employée par M. Hammond pour la proposition correspondante dans la théorie des formes binaires [1], établit, en s'appuyant sur la théorie des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles, que tout concomitant s'exprime algébriquement au moyen des concomitants déjà obtenus.

Love (*A.*). — Petites vibrations et déformations d'une enveloppe rigide mince. (491-546).

Ce Mémoire peut être regardé comme un essai préliminaire à la théorie des vibrations des cloches. A la cloche est substituée une enveloppe rigide (Shell) assez mince pour que l'on puisse négliger le carré de l'épaisseur. Cette enveloppe est supposée isotropiquement élastique : on la considère comme limitée par deux surfaces parallèles à la surface moyenne, et déformée arbitrairement. L'énergie potentielle de déformation est étudiée par la méthode qui a servi à Kirchhoff pour les plaques. L'auteur donne les équations du mouvement ainsi que les conditions aux limites, et est amené à développer la théorie géométrique de la déformation d'une surface extensible. Les équations du mouvement de Clebsch pour les plaques; les analogies et les différences avec les vibrations des plaques sont discutées. Le cas d'une enveloppe sphérique ou cylindrique est étudié avec quelque détail. Un intéressant résumé historique des travaux antérieurs est placé en tête du Mémoire de M. Love.

Tome 180; 1889.

Darwin (*G.*). — Sur les conditions mécaniques d'un essaim de météorites et sur les théories cosmogoniques. (1-69).

Conciliation entre la théorie qui place l'origine du système planétaire dans une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, et celle qui fait résulter ce système de l'agrégation graduelle de matière météorique.

Forsyth (*A.*). — Une classe d'invariants fonctionnels. (71-118).

Ce Mémoire peut être regardé comme une suite au Mémoire sur les *invariants, covariants et dérivées par quotient associées aux équations différentielles linéaires*, de l'année 1888, qui a été précédemment analysé. Les invariants fonctionnels qu'on considère ici sont constitués par des combinaisons des dérivées d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, combinaisons telles que, si l'on fait un changement des variables indépendantes, elles se re-

---

[1] *American Journal*, t. V; 1882.

produisent, à un facteur près, ce facteur ne dépendant que de la transformation effectuée sur les variables. Les transformations pour lesquelles les résultats détaillés sont donnés sont des transformations homographiques et les recherches sont limitées au cas de deux variables indépendantes; la possibilité d'étendre ces recherches est manifeste.

Les invariants ne contiennent *explicitement* ni les variables indépendantes x, y ni la variable dépendante z; ils sont homogènes par rapport aux dérivées de z; ils sont d'un degré uniforme de différentiation par rapport à chacune des variables x, y; ils sont symétriques ou symétriques gauches.

Un invariant vérifie six équations linéaires aux dérivées partielles; quatre de ces équations sont caractéristiques et déterminent la forme de l'invariant: les deux autres sont des équations d'*indice* et sont vérifiées identiquement, quand la forme est connue et que l'indice est déduit de la considération de la forme.

Chaque invariant contient les deux dérivées partielles du premier ordre.

Relativement aux invariants irréductibles relatifs à une seule variable dépendante z, on établit les résultats qui suivent : les invariants peuvent être rangés en classes; chaque classe étant *propre* à un rang déterminé, en entendant qu'un invariant est propre au rang n quand n est l'ordre de la dérivée la plus élevée qui y figure. Il n'y a pas d'invariant propre au rang 1; il y a un invariant propre au rang 2, à savoir

$$A_0 = q^2 r - 2pqs + q^2 t,$$

en employant les notations usuelles pour les dérivées p, q du premier ordre et les dérivées r, s, t du second; en employant la notation anglaise pour les formes binaires, on peut écrire aussi

$$A_0 = (z_{20}, z_{11}, z_{02})(z_{01}, -z_{10})^2$$

en posant en général, comme on fera dans la suite,

$$z_{ij} = \frac{\partial z^{i+j}}{\partial x^i \, \partial y^j};$$

il y a trois invariants propres au rang 3, à savoir

$$Q_5 = H_1 + 2L_2 - 4H_0^2,$$
$$Q_6 = A_1^3 + 3A_0A_1J_{01} - 72A_0^2A_1H_0 + \frac{9}{2}A_0^3H_{01},$$
$$Q_7 = A_1^2 + 2A_0J_{01} + 12A_0^2H_0,$$

où l'on suppose

$$A_1 = (z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03})(z_{01}, -z_{10})^3,$$
$$J_{01} = \frac{\partial A_0}{\partial z_{10}}\frac{\partial A_1}{\partial z_{01}} - \frac{\partial A_0}{\partial z_{01}}\frac{\partial A_1}{\partial z_{10}},$$
$$H_0 = z_{20}z_{02} - z_{11}^2,$$
$$H_{01} = \frac{\partial^2 A_0}{\partial z_{10}^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial z_{01}^2} - 2\frac{\partial^2 A_0}{\partial z_{10}\,\partial z_{01}}\frac{\partial^2 A_1}{\partial z_{10}\,\partial z_{01}} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z_{01}^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial z_{1}^2},$$
$$L_2 = \frac{1}{24}\left(\frac{\partial A_0}{\partial z_{10}}\frac{\partial H_{01}}{\partial z_{01}} - \frac{\partial A_0}{\partial z_{01}}\frac{\partial H_{01}}{\partial z_{10}}\right);$$

enfin H_1 est le hessien de A_1 consideré comme une forme cubique en $q = z_{01}$ et $-p = -z_{10}$.

Il y a $n+1$ invariants propres au rang n, quand n est plus grand que 3 : ils peuvent être regardés comme linéaires par rapport aux dérivées de rang n. Chaque invariant s'exprime au moyen de ces invariants irréductibles et une pareille expression ne comporte pas d'invariants irréductibles propres à un rang supérieur à celui auquel l'invariant proposé est propre.

Pour ce qui est des invariants irréductibles relatifs à deux variables dépendantes z, z', on montre qu'il y en a un, à savoir, le jacobien $pq' - p'q$ qui est propre au rang 1 et quatre propres au rang 2, à savoir, outre l'invariant A_0 et son analogue où p, q, r, s, t sont remplacés par p', q', r', s', t',

$$q^2 r - 2pqs' + p^2 t' + 2[qq'r - (pq' + p'q)s + pp't],$$

et celui qui en résulte par l'échange des lettres accentuées et non accentuées.

M. Forsyth montre le rôle des *opérateurs* dans la théorie des invariants; le point de départ est dans le fait que l'opérateur

$$q\frac{\partial}{\partial x} - p\frac{\partial}{\partial y},$$

appliqué à z', produit un invariant d'indice 1.

La théorie de ces invariants fonctionnels est liée avec la théorie des formes binaires : les invariants fonctionnels s'expriment au moyen de concomitants simultanés d'un certain système de quantités où q et $-p$ sont les variables; c'est ce qui apparait, en particulier, sur les invariants propres au rang 3 qui ont été donnés plus haut explicitement.

L'auteur montre les rapports et les différences de ses recherches avec celles de Halphen et de M. Elliott.

Abney (*W. de W.*). — Éclipse totale de Soleil observée à l'île Caroline le 6 mai 1883. (119-135).

Bryan (*G.*). — Les ondes sur un sphéroïde liquide, d'ellipticité finie, animé d'un mouvement de rotation. (187).

Application de la méthode exposée par M. Poincaré dans son Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta Mathematica*, t. VII). Le cas traité par M. Bryan est celui d'un ellipsoïde de révolution (sphéroïde de Maclaurin). La solution est obtenue en se servant des fonctions sphériques (tesserales ou zonales) ordinaires relatives au sphéroïde fluide ou sphéroïde auxiliaire introduit par M. Poincaré pour la résolution de l'équation différentielle; on n'a plus affaire aux difficultés que comporte, comme dans le cas général, l'emploi des fonctions de Lamé; le problème est simplifié par ce fait que chaque solution indépendante contient seulement des fonctions sphériques d'un degré et d'un rang particuliers.

On n'a qu'une seule équation à la limite, relative à la surface du sphéroïde, qui détermine l'amplitude des marées dues à une force perturbatrice connue, de même que l'élévation de la marée au-dessus de la surface moyenne en un point quelconque à un moment donné. S'il n'y a pas de forces perturbatrices.

cette équation détermine la fréquence des diverses ondes libres par des fonctions sphériques d'ordre et de rang donnés.

Les lois simples de cette fréquence sont étudiées en détail et même avec des applications numériques. La question de la stabilité est traitée pour le cas d'un liquide parfait, et les critériums sont alors très différents de ceux qui concernent un liquide visqueux. Le cas d'une faible vitesse de rotation et d'une excentricité faible est traité avec détail. L'auteur termine enfin par quelques considérations relatives aux théories cosmogoniques.

Darwin (*L.*), *Schuster* (*A.*), *Maunder* (*W.*). — Sur l'éclipse totale de Soleil du 29 août 1886. (291-350).

Perry (Rev.). — Rapport sur les observations de l'éclipse totale de Soleil du 29 août 1896, faites à l'île du Carriacou. (351-362).

Abney (*W. de W.*), *Thorpe* (*T.*). — Sur la détermination de l'intensité photométrique de la lumière de la couronne pendant l'éclipse totale de Soleil du 29 août 1886. (363-384).

Turner (*H.*). — Rapport sur les observations de l'éclipse totale de Soleil du 29 août 1886 faites à Grenville, dans l'île de Grenada. (385-393).

Schuster (*A.*). — La variation diurnale du magnétisme terrestre, avec un appendice par *Lamb* (*H.*). (467-518).

Tome 181; 1890.

Elliott (*E.*). — Sur l'échange des variables dans certains opérateurs différentiels linéaires. (19-52).

Les *opérateurs* que considère M. Elliot renferment tous ceux que l'on a considérés comme annihilateurs ou générateurs dans la théorie moderne des invariants, réciprocants, cyclicants, etc., et ses recherches se rapportent directement aux travaux poursuivis dans ce sens par le major Mac-Mahon (1). Elles concernent les opérateurs binaires et les opérateurs ternaires. Nous nous bornerons à indiquer la nature du problème traité par l'auteur.

Si l'on regarde provisoirement y comme une fonction de x, ou x comme une

(1) *The Theory of a multilinear Partial Differential Operator with applications to the Theories of Invariants and Reciprocants; The algebra of multilinear Partial Differential Operators* (*Proceedings de la Société Mathématique de Londres*, t. XVIII et XIX).

fonction de y et que l'on pose

$$y_r = \frac{1}{1.2\ldots r}\frac{d^r y}{dx^r}, \qquad x_r = \frac{1}{1.2\ldots r}\frac{d^r x}{dy^r}.$$

Les deux équations

$$\eta = y_1\xi + y_2\xi^2 + y_3\xi^3 + \ldots,$$
$$\xi = x_1\eta + x_2\eta^2 + x_3\eta^3 + \ldots,$$

dont l'une entraîne l'autre, donne l'expression de l'accroissement η de y en fonction de l'accroissement ξ de x, ou inversement. Désignons par $Y_s^{(m)}$ le coefficient de ξ^s dans le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ de $\eta = y_1\xi + y_2\xi^2 + \ldots$ ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ; de même, par $X_s^{(m)}$ le coefficient de η^s dans le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ de $\xi = x_1\eta + x_2\eta^2 + \ldots$, ordonnée suivant les puissances ascendantes de η; m est un entier, positif ou négatif; $X_s^{(m)}$, $Y_s^{(m)}$ sont des fonctions de x_1, x_2, ... d'une part, de y_1, y_2, ... de l'autre. Adoptant une notation du major Mac-Mahon, M. Elliott pose

$$\frac{1}{m}\sum\left\{(\mu + \nu s)X_s^{(m)}\frac{\partial}{\partial x_{n+s}}\right\} = \left\{\mu, \nu;\, m, n\right\}_x,$$
$$\frac{1}{m}\sum\left\{(\mu + \nu s)Y_s^{(m)}\frac{\partial}{\partial y_{n+s}}\right\} = \left\{\mu, \nu;\, m, n\right\}_y;$$

μ, ν sont des nombres donnés; n est un entier positif, négatif ou nul; s est un indice de sommation qui doit prendre toutes les valeurs entières depuis le plus petit jusqu'au plus grand des deux nombres m et $-n+1$; et les symboles $\left\{\mu, \nu;\, m, n\right\}_x$, $\left\{\mu, \nu;\, m, n\right\}_y$, que les égalités précédentes définissent, sont des *opérateurs* destinés à agir sur une fonction des variables x_1, x_2, ..., ou sur une fonction des variables y_1, y_2, ... qui dépendent des précédentes; dans ces opérateurs entrent linéairement les dérivées partielles par rapport à x_1, x_2, ... ou les dérivées partielles par rapport à y_1, y_2, ...; le but de l'auteur est de représenter l'opérateur du type $(\mu, \nu;\, m, n)_x$ comme un opérateur ou une somme d'opérateurs du type $(\mu, \nu;\, m, n)_y$; il parvient ainsi à une suite très riche d'élégantes identités qui ont pour base l'égalité symbolique

$$\frac{\partial}{\partial x_r} = -(y_1\xi + y_2\xi^2 + \ldots)^r(y_1 + 2y^2\xi + 3y_3\xi^2 + \ldots),$$

où r est un entier positif et où, après avoir effectué dans le second membre l'élévation aux puissances et le produit, il est sous-entendu que l'on doit remplacer ξ^s par $\frac{\partial}{\partial y_s}$. Signalons par exemple la relation

$$\left\{m\mu, \mu';\, m, m'-1\right\}_x = -\left\{m'\mu', \mu;\, m', m-1\right\}_y,$$

où $m + m'$ doit être un nombre positif, qui contient comme cas très particulier les relations explicites,

$$x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + 3x_4\frac{\partial}{\partial x_4} + \ldots = y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_3\frac{\partial}{\partial y_3} + 3y_4\frac{\partial}{\partial y_4} + \ldots,$$
$$2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 3x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 4x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots = -\left[2y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + 4y_3\frac{\partial}{\partial y_3} + \ldots\right].$$

Les opérateurs que l'on vient de considérer, obtenus en prenant pour point de départ une relation entre y et x, sont dits opérateurs *binaires;* l'auteur considère de même des opérateurs ternaires ayant un point de départ analogue dans une relation supposée entre trois variables x, y, z.

Michell (*J.*). — Sur la théorie des lignes de courants libres. (389-432).

L'origine des recherches de l'auteur est dans le Mémoire de von Helmholtz *Sur les mouvements discontinus d'un fluide* (*Monatsberichte de l'Acad. de Berlin,* 1868); l'illustre physicien a étudié l'influence exercée sur le mouvement d'un fluide par les arêtes vives d'un corps solide; on peut être alors conduit à considérer une surface de discontinuité d'un côté de laquelle le liquide serait en repos; il a donné une solution mathématique dans un cas de mouvement à deux dimensions; depuis, le problème a été repris par Kirchhoff (*Vorlesungen über mathematische Physik*) et par Rayleigh (*Phil. Magazine,* 1876). L'auteur, en étudiant la méthode de transformation conforme des polygones (Schwarz et Christoffell), a trouvé le moyen de donner une solution générale du problème pour les lignes de courants non rentrantes en supposant planes les limites rigides. Il traite en détail un très grand nombre de cas intéressants; enfin dans la seconde partie de son Mémoire, il donne diverses extensions des formules de transformation qui sont applicables aux problèmes des condensateurs et à la forme des vortex creux, dans certains cas.

Basset (*A.*). — Sur l'extension et la flexion des enveloppes rigides minces, de forme cylindrique ou sphérique. (433-480).

Critique du Mémoire de M. Love inséré dans les *Transactions* pour 1888; l'hypothèse faite par différents auteurs qu'on peut négliger les composantes R, S, T n'est pas admissible; toutefois elle a conduit M. Love à des résultats exacts pour des raisons que discute M. Basset; ce dernier reprend d'ailleurs le problème par une méthode qu'il a employée aussi pour le problème des plaques (*Proceedings de la Société Mathématique de Londres*, t. XXI).

Mac-Mahon (*P.*). — Mémoire sur les fonctions symétriques des racines d'un système d'équation. (481-536).

De même que les fonctions symétriques entières des racines d'une équation s'expriment au moyen des coefficients (fonctions symétriques élémentaires) des diverses puissances de x dans le développement du produit

$$(1+\alpha_1 x)(1+\alpha_2 x)\ldots(1+\alpha_n x)\ldots,$$

où il convient de laisser illimité le nombre des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ dont on veut former les fonctions symétriques, de même la théorie des fonctions symétriques des racines de deux équations doit reposer sur l'étude du produit

$$(1+\alpha_1 x+\beta_1 y)(1+\alpha_2 x+\beta_2 y)\ldots$$

et les fonctions symétriques cherchées devront s'exprimer au moyen des coefficients de ce développement, qui joueront le rôle de fonctions symétriques

élémentaires; ce développement est de la forme

$$1 + x\Sigma\alpha_1 + y\Sigma\beta_1 + x^2\Sigma\alpha_1\alpha_2 + xy\Sigma\alpha_1\beta_2 + y^2\Sigma\beta_1\beta_2 + \ldots = 1 + \Sigma a_{pq}x^py^q.$$

La fonction symétrique la plus générale est de la forme

$$\Sigma\,\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1}\alpha_2^{p_2}\beta_2^{q_2}\alpha_3^{p_3}\beta_3^{q_3}\ldots,$$

où la sommation, s'il y a n couples (α_i, β_i) de solutions, doit être étendue à toutes les permutations des indices 1, 2, 3, ..., n. Cette fonction symétrique peut être représentée symboliquement par

$$(\overline{p_1q_1}\,\overline{p_2q_2}\,\overline{p_3q_3}\ldots).$$

Le poids de cette fonction doit être regardé comme se composant de deux parties Σp, Σq : c'est un *double poids;* le poids total est $\Sigma p + \Sigma q$. Ainsi à chaque entier w, considéré comme un poids total, sera attaché un double poids correspondant à chaque composition de w comme somme de deux nombres entiers (positifs ou nuls). Deux compositions dans lesquelles l'ordre diffère doivent être regardées comme distinctes, en sorte que leur nombre est $w+1$. A chaque double poids correspondent des doubles partitions; l'expression

$$(\overline{p_1q_1}\,\overline{p_2q_2}\,\overline{p_3q_3}\ldots),$$

est une double partition du double poids

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \qquad \Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n;$$

p_1, q_1 est une double part de la double partition; de même p_2, q_2, ou p_3, q_3, ...

M. Mac-Mahon montre comment la règle connue pour trouver le nombre de partitions d'un nombre s'étend à la détermination du nombre de partitions d'un double poids, dans le sens que l'on vient d'indiquer; il donne une liste des fonctions symétriques distinctes pour les poids totaux 1, 2, 3, 4. Les sommes de puissances semblables telles que $\sum_i \alpha_i^p\beta_i^q$ s'obtiennent sans peine. La formule de Waring-Vandermonde est susceptible d'une belle généralisation. On rencontre diverses lois de symétrie. La théorie des opérations différentielles donne lieu à d'intéressants développements. Enfin l'auteur termine en donnant les résultats relatifs aux fonctions symétriques jusqu'au poids 4 inclusivement.

Walker (*J.*). — Compte rendu d'observations des pendules pour la détermination des forces relatives de gravité aux Observatoires de Kew et de Greenwich. (537-558).

Tome 182; 1891.

Darwin (*G.*). — Sur la prédiction des marées. (159-230).

Niven (*W.*). — Sur les harmoniques elliptiques. (231-278).

La théorie des fonctions harmoniques relatives à l'ellipsoïde (harmoniques elliptiques) est fondée habituellement sur l'expression des solutions de l'équation de Laplace au moyen des coordonnées elliptiques considérées comme variables indépendantes. C'est à Lamé que l'on doit les principes de cette théorie, dont M. Heine a donné une exposition complète dans son livre classique *sur les fonctions sphériques*. Quoique cette théorie soit, le plus souvent, celle qui s'adapte le mieux aux applications pratiques, il peut être avantageux, dans certains cas, d'exprimer ces fonctions au moyen des coordonnées cartésiennes : c'est à ce point de vue que M. Niven reprend la théorie.

Considérant un ellipsoïde à trois axes inégaux, il développe d'abord (§ 2-15) les propositions relatives aux points intérieurs, puis (§ 16-21) les propositions relatives aux points extérieurs à cet ellipsoïde. Pour ce qui est de l'intérieur, il établit entre les harmoniques elliptiques et certaines fonctions harmoniques sphériques qui leur correspondent d'intéressantes relations qui permettent, en premier lieu, d'exprimer explicitement les harmoniques elliptiques au moyen des coordonnées cartésiennes, puis, en second lieu, de déterminer le développement, en série d'harmoniques elliptiques, d'une fonction ayant des valeurs arbitrairement assignées sur la surface de l'ellipsoïde. M. Niven traite en particulier ce problème quand ces valeurs arbitraires sont celles que prend une fonction homogène des coordonnées x, y, z; l'extension au cas d'une fonction qui peut se développer par la formule de Taylor est aisée. L'auteur a donné l'expression d'un tel développement en série d'harmoniques elliptiques pour l'inverse de la distance d'un point fixe à un point variable de la surface de l'ellipsoïde.

La proposition fondamentale concernant les harmoniques elliptiques consiste dans l'expression de ces harmoniques au moyen d'opérations différentielles effectueés sur le potentiel relatif à un point extérieur d'un ellipsoïde de densité variable. Elle est obtenue par une marche analogue à celle de Maxwell dans sa théorie de l'attraction fondée sur l'interprétation physique des harmoniques sphériques.

Comme applications, l'auteur a considéré successivement le problème du magnétisme induit dans un corps de forme ellipsoïdale (§ 22-24), le potentiel dû à une enveloppe mince limitée par deux ellipsoïdes homothétiques, la densité variant en raison inverse de la distance à un point fixe (§ 25-27), un théorème concernant la détermination de la capacité électrique (§ 28).

Dans la dernière partie de son Mémoire, M. Niven étudie ce que deviennent ses harmoniques elliptiques dans le cas d'un ellipsoïde de révolution aplati ou allongé (§ 30-52). Les fonctions harmoniques, pour l'ellipsoïde allongé, peuvent se ramener aux fonctions harmoniques du cylindre circulaire, ou du paraboloïde de révolution. Enfin l'auteur termine en s'occupant des théorèmes d'addition pour les fonctions harmoniques elliptiques, les fonctions sphériques de seconde espèce et les fonctions de Bessel.

Sampson (*R.*). — Sur la fonction de courant de Stokes. (449-518).

Dans la théorie que développe l'auteur, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = 0,$$

où $\mu = \cos\theta$, joue un rôle analogue à celui de l'équation de Laplace dans la

théorie des fonctions sphériques; la quantité $R = \sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}$ se développe en une série de la forme

$$R = -\Sigma \alpha^n I_n(x),$$

où les fonctions $I_n(x)$ satisfont à l'équation différentielle linéaire

$$(1 - x^2)\frac{d^2 I_n(x)}{dx^2} + n(n-1) I_n(x) = 0.$$

La théorie de ces fonctions se développe parallèlement à celle des fonctions sphériques et remplit la première partie du Mémoire de M. Sampson. La seconde partie contient des applications à l'Hydrodynamique, pour des mouvements où tout se passe symétriquement par rapport à un axe. Les liquides sont supposés visqueux. L'auteur examine successivement les cas d'un obstacle sphérique, en forme d'hyperboloïde ou d'ellipsoïde de révolution, de tore, de paraboloïde de révolution, de disque circulaire, etc.

Poynting (*J.*). — Sur la détermination de la densité moyenne de la Terre au moyen de la balance ordinaire. (565-656).

Tome 183; 1892.

Grylls Adams. — Comparaison des perturbations magnétiques pour divers observatoires. (131-140).

Hill (*J.*). — Rôle des lieux de points singuliers et de lignes singulières dans la théorie des surfaces enveloppes. (141-278).

Le Mémoire de M. Hill se partage naturellement en deux parties suivant que l'équation de la famille de surfaces dont on considère l'enveloppe contient un ou deux paramètres. On suppose dans tous les cas que cette équation est entière tant par rapport aux coordonnées que par rapport aux paramètres. Dans le premier cas, si l'équation de la surface est

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

le discriminant Δ de cette équation, considéré comme une équation en a, a un sens précis. Il contient évidemment en facteur le premier membre E de l'équation de l'enveloppe. S'il y a une courbe lieu de points coniques, cette courbe est sur la surface $\Delta = 0$. S'il y a une surface $B = 0$ lieu d'une ligne binodale, Δ contient B^2 en facteur. Le facteur s'élève cube s'il s'agit d'une ligne nodale telle que, en chaque point, les deux plans tangents coïncident, etc. M. Hill étudie avec détails les cas exceptionnels où, l'équation $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ admettant des racines égales, deux caractéristiques coïncident.

Le cas où l'équation $f(x, y, z, a, b) = 0$ de la famille de surfaces contient deux paramètres donne lieu à une étude analogue, d'une nature un peu plus compliquée. En conservant la lettre Δ pour désigner le premier membre de

l'équation obtenue en éliminant a, b entre les équations

$$f = 0, \quad f'_a = 0, \quad f'_b = 0,$$

si $C = 0$ est l'équation du lieu d'un point conique, Δ contient C^2 en facteur; si $B = 0$ est l'équation du lieu d'un point double biplanaire, Δ contient B^3 en facteur; si $U = 0$ est l'équation du lieu d'un point double uniplanaire, Δ contient U^6 en facteur. Ces facteurs s'élèvent à des degrés plus élevés dans certains cas particuliers. L'auteur accompagne ses développements théoriques de nombreux exemples.

Walker (*G.*). — Répulsion et rotation produites par des courants électriques alternatifs. (279-330).

Burbury (*E.*). — Sur le choc de corps élastiques. (407-422).

Examen de la doctrine de Maxwell-Boltzman.

Heaviside (*O.*). — Sur les forces, tensions et flux d'énergie dans le champ électro-magnétique. (423-480).

Macaulay (*A.*). — Sur la théorie mathématique de l'électromagnétisme. (685-780).

Tome 184; 1893.

Bennet (*G.*). — Sur les résidus de puissances pour un module composé, réel ou complexe. (189-336).

Considérons le cas d'un module réel m : il existe alors, comme on sait, des racines primitives si le module est un nombre premier impair, ou une puissance d'un tel nombre premier, ou encore le double d'une telle puissance. Une racine primitive du module, quand elle existe, engendre par les restes de ses puissances le système complet des $\varphi(m)$ nombres premiers à m et inférieurs à lui. En général quand le module est un nombre composé quelconque, le concept de racine primitive doit être remplacé par le concept d'un système de nombres dits *générateurs :* ce sont les puissances de ces générateurs et les produits de ces puissances qui engendrent, comme restes, le système des $\varphi(m)$ nombres.

L'objet principal de la première partie du Mémoire de M. Bennet est l'étude de ces systèmes de générateurs : déterminer leur forme générale; d'un système de générateurs déduire tous les autres systèmes; reconnaître si un système donné de nombres constitue ou non un système de générateurs.

Dans la seconde partie, l'auteur étend aux nombres complexes les recherches qu'il vient de développer pour les nombres entiers réels; les propositions relatives aux entiers complexes suivent parallèlement celles qui se rapportent aux entiers réels; quelques cas, toutefois, demandent une étude spéciale : tel est, en particulier, le cas d'un module égal à $(1+i)^m$. Le Mémoire de M. Bennet reprend la théorie des restes de puissances à ses premiers principes, en sorte

que l'unité de méthode apparaît bien nettement. On trouvera, dans un appendice, une table d'indices pour les modules complexes dont la norme ne dépasse pas 100.

Lodge (*O.*). — Problème de l'aberration. Discussion relative au mouvement de l'éther dans le voisinage de la Terre et la connexion entre l'éther et la matière. (727-804).

Dyson (*F.*). — Potentiel d'un tore annulaire. (43-96; 1041-1106).

Considérons un tore annulaire admettant l'axe des z pour axe de révolution et ayant son axe circulaire de rayon C dans le plan des xy; si l'on désigne par r, θ, φ les coordonnées polaires d'un point (x, y, z) extérieur au tore, la fonction

$$I = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr\sin\theta\cos\varphi}}$$

est une solution de l'équation de Laplace, finie pour tous les points extérieurs au tore et s'annulant à l'infini; $\frac{\partial I}{\partial z}$ est une autre solution et deux autres systèmes de solutions s'obtiennent en différentiant I ou $\frac{\partial I}{\partial z}$ par rapport à c, autant de fois que l'on veut. Lorsque la plus courte distance R du point considéré au cercle central est moindre que c, l'intégrale précédente peut être développée suivant les puissances de $\frac{R}{c}$; les fonctions ainsi engendrées et quelques autres analogues servent dans certains problèmes d'Hydrodynamique. L'auteur montre ensuite comment le potentiel relatif à un tore annulaire peut, pour tous les points extérieurs, être développé en une série d'intégrales. Les premiers termes du développement sont ramenés à la forme d'intégrales elliptiques. Les surfaces équipotentielles sont déterminées pour quelques valeurs simples du rapport de l'épaisseur de l'anneau au diamètre moyen. M. Dyson étudie ensuite le potentiel d'un anneau conducteur pour les points extérieurs, puis le mouvement d'un anneau dans un fluide indéfini.

Enfin l'auteur s'occupe de la forme annulaire d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation quand l'épaisseur de l'anneau est petite par rapport au rayon moyen. La forme de la section par l'axe peut être représentée par la formule

$$R = a(1 + \beta_2 \cos 2\chi + \beta_3 \cos 3\chi' + \ldots),$$

où β_2, β_3, ... sont du second, du troisième ordre par rapport à $\frac{a}{c}$. Ces termes sont donnés jusqu'au quatrième ordre.

Dans la seconde partie le potentiel est déterminé pour les points intérieurs. L'étude est faite de la stabilité d'un anneau fluide tournant, pour trois sortes de perturbations : 1° l'anneau reste symétrique par rapport à l'axe de révolution et à l'axe circulaire, mais la section méridienne est déformée; 2° cette dernière section reste circulaire, mais l'axe circulaire est déformé; 3° l'axe circulaire reste non troublé, mais la section est un cercle de rayon variable.

En vue de l'anneau de Saturne, l'auteur détermine le potentiel pour un

anneau à section elliptique; les résultats qu'il obtient concordent avec ceux de Laplace. L'auteur étudie ensuite le mouvement d'un vortex annulaire de section finie. Les résultats concordent avec ceux de M. Hicks obtenus au moyen des fonctions toroïdales. Il traite enfin du mouvement de plusieurs vortex annulaires ayant même axe et des sections très petites.

Mac-Mahon (*P.*). — Mémoire sur la théorie de la composition des nombres. (835-901).

Les problèmes dont s'occupe le major Mac-Mahon dans ce Mémoire ont leur origine dans certaines questions numériques qui se posaient naturellement dans un Mémoire antérieur sur les fonctions symétriques des racines de deux équations. Pour en faire comprendre la nature, bornons-nous au cas le plus simple, celui d'un ensemble de deux nombres entiers positifs p, q ou, si l'on veut, d'un nombre à deux parties (p, q). Décomposer ce nombre en r parties : c'est trouver r couples de nombres entiers positifs ou nuls, sans qu'un couple puisse être composé de deux nombres nuls (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_r, β_r) tels que l'on ait

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = p, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r = q;$$

le système $(\overline{\alpha_1\beta_1}, \overline{\alpha_2\beta_2}, \ldots, \overline{\alpha_r\beta_r})$ est une *composition* du nombre à deux parties (p, q) en r parts. Par exemple le nombre $(2, 1)$ est susceptible des compositions suivantes en une, deux, trois parts,

$$(2, 1),$$
$$(\overline{20}, \overline{01}), \quad (\overline{01}, \overline{20}), \quad (\overline{11}, \overline{10}), \quad (\overline{10}, \overline{11}),$$
$$(\overline{10}, \overline{10}, \overline{01}), \quad (\overline{10}, \overline{01}, \overline{10}), \quad (\overline{01}, \overline{10}, \overline{10}).$$

Le nombre de compositions de (p, q) en r parts est représenté par $f(p, q; r)$ tandis que le nombre total de compositions est

$$F(p, q) = \sum_{r=1}^{r=p+q} f(p, q; r).$$

Ces problèmes se généralisent facilement et l'auteur donne des règles pour le calcul des fonctions numériques telles que f et F. On a, par exemple,

$$F(p, q) = 2^{p+q-1}\frac{(p+q)!}{p!\,q!} - 2^{p+q-2}\frac{(p+q-1)!}{1!(p-1)!(q-1)!} + 2^{p+q-3}\frac{(p+q-2)!}{2!(p-2)!(q-2)!} + \ldots,$$

les termes étant continués tant qu'on ne rencontre pas, en dénominateur, de factorielle nulle. Une représentation graphique peut aider cette étude; on considère l'ensemble des points ayant pour abscisse l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, p$ et pour ordonnée l'un des nombre $0, 1, 2, \ldots, q$ en excluant toutefois l'origine, que nous désignerons par o et le point de coordonnées (p, q), que nous désignerons par A; les points restants seront ce que nous appellerons les *points du réseau*. Imaginons maintenant un chemin, allant du point O au point A,

qui soit composé uniquement de segments parallèles aux axes toujours parcourus, quand on va de O à A dans le sens des x ou des y positifs, et qui soient toujours limités à des points du réseau, l'origine du premier segment étant le point O, l'extrémité du dernier étant le point A. Un tel chemin est une *route* de O à A : si l'on désigne sous le nom de *nœud essentiel* tout point, non situé sur les axes, où la route change de direction, on démontre que le nombre de toutes admettant s nœuds essentiels est le produit des deux coefficients binomiaux $\binom{p}{s}\binom{q}{s}$. Si l'on considère, en outre des nœuds essentiels, d'autres points du réseau situés sur la route comme étant aussi des nœuds, de manière à avoir en tout $r-1$ nœuds de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{r-1}, y_{r-1})$, ces points étant rangés dans l'ordre où on les rencontre en allant de O à A, on aura défini une composition

$$(\overline{\alpha_1\beta_1}, \overline{\alpha_2\beta_2}, \ldots, \overline{\alpha_r\beta_r}),$$

du nombre (p, q) en r parts, en posant

$$\begin{matrix} \alpha_1 = x_1, & \alpha_2 = x_2 - x_1, & \ldots, & \alpha_r = p - y_{r-1}, \\ \beta_1 = y_1, & \beta_2 = y_2 - y_1, & \ldots, & \beta_r = q - y_{r-1}; \end{matrix}$$

le nombre de compositions qui correspondent ainsi à une route admettant s nœuds essentiels est

$$2^{p+q-s-1}.$$

M. Mac-Mahon établit diverses lois concernant ces modes de composition, qui correspondent à d'intéressantes identités numériques. Le mode de représentation que nous venons d'expliquer s'étend aisément à l'espace, pour les nombres (p, q, r) à trois parties. Le problème est d'ailleurs généralisé dans diverses directions.

Gwyther (R.). — Sur les covariants différentiels des courbes planes et sur les opérateurs employés dans leur développement.

Recherches dans le même ordre d'idées que celles d'Halphen : conditions pour que la forme d'une fonction reste inaltérée, à un facteur près, par une transformation homographique; forme du facteur; introduction de trois opérateurs différentiels; méthode de formation des covariants, relations de réciprocité entre les opérateurs; déduction des fonctions réciproques et contravariantes. Application aux cubiques. Équation de la cubique osculatrice. Usage des coordonnées invariantes. Équation intrinsèquement invariante d'une courbe.

Tome 185; 1894.

Taylor (H.). — Sur une forme spéciale de l'équation générale d'une surface du troisième degré et sur un diagramme représentant les vingt-sept droites de la surface. (37-70).

La forme considérée est la suivante :

$$xyzu = (x - aT)(y - bT)(z - cT)(u - dT).$$

où $T = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u$. Sur cette forme douze droites apparaissent immédiatement situées sur les faces du tétraèdre de référence : on trouve ensuite trois droites, dont l'une a des équations de la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{u}{d} - T = 0,$$
$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - T = 0;$$

les douze autres se déduisent aisément de ce fait qu'une droite quelconque de la surface rencontre et rencontre une seule parmi trois droites qui forment un triangle; deux de ces douze droites sont données, par exemple, par les équations

$$x - aT = \lambda y,$$
$$z - cT = \mu u,$$

où λ et μ sont déterminés par les conditions

$$\alpha b\lambda\mu + (a\alpha + b\beta - 1)\mu - c\delta = 0,$$
$$\gamma d\lambda\mu + (c\gamma + d\delta - 1)\lambda - a\beta = 0.$$

L'auteur donne différents diagrammes qui facilitent l'étude des intersections mutuelles de ces droites. L'un d'eux est constitué comme il suit : les 27 droites sont représentées schématiquement sur un plan, d'une part, par 27 droites parallèles; d'autre part, par 27 droites encore parallèles, mais perpendiculaires aux premières. Chaque droite est ainsi représentée deux fois : les 27^2 points d'intersection sont distingués au moyen de trois signes différents : l'un de ces signes correspond au cas où il s'agit de deux droites du diagramme qui représentent la même droite de la surface, un autre au cas où il s'agit de deux droites du diagramme qui représentent deux droites de la surface qui ne se coupent pas; le troisième enfin correspond au cas où l'on a affaire à deux droites du diagramme qui représentent deux droites de la surface qui sont dans un même plan. De tels diagrammes rendent aisée l'énumération des ensembles de deux, trois, quatre, cinq ou six droites de la surface dont aucune ne rencontre les droites d'un même ensemble, ou des triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones situés sur la surface. L'auteur étudie encore les plans triplement tangents.

Pearson (*K.*). — Contribution à la théorie mathématique de l'évolution. (71-110).

Nous ne pouvons donner ici que l'idée des recherches de M. Pearson. Imaginons qu'après avoir mesuré dans un très grand nombre de cas un organe déterminé d'un animal appartenant à un même type ou à une même famille, on prenne pour abscisses x la dimension de cet organe, puis, ayant fixé un petit écart δx, pour ordonnée le nombre de cas où la mesure de l'organe considéré tombe entre $x + \delta x$ et $x - \delta x$, on formera une courbe dite *courbe de fréquence*. Il est naturel de transporter l'origine des abscisses au point de l'axe des x qui correspond à la moyenne des observations. Il peut se faire alors que la courbe obtenue soit de la forme (normale) définie par l'équation

$$y = e^{-Kx^2}.$$

bien connue dans la théorie des erreurs. C'est ce qui arrive, par exemple, comme Quetelet l'a montré dans son Anthropométrie, pour les observations de la taille humaine, résultant des mensurations de conscrits. Dans ce cas le type considéré correspond vraisemblablement à certaines conditions de stabilité : l'espèce est fixée, au moins dans une certaine mesure. Mais il peut arriver aussi que la courbe présente quelque déviation de la forme normale, et l'on conçoit que l'étude de ces déviations puisse avoir un grand intérêt pour déterminer les tendances à la modification de l'espèce.

Mac Mahon. — Sur une certaine classe de fonctions génératrices dans la théorie des nombres. (111-160).

Considérons les formes linéaires

$$X_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et la fraction

$$\frac{1}{(1 - s_1 X_1)(1 - s_2 X_2)\ldots(1 - s_n X_n)},$$

que l'on suppose développée suivant les puissances ascendantes et les produits de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la partie de ce développement qui est fonction seulement des produits $s_1 x_1, s_2 x_2, \ldots, s_n x_n$ et des coefficients a_{ij} des formes linéaires est donné par la quantité $\frac{1}{V_n}$ où V_n est le produit par $(-1)^n s_1 s_2 \ldots s_n x_1 x_2 \ldots x_n$ du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{s_1 x_1} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{s_2 x_2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \frac{1}{s_n x_n} \end{vmatrix}.$$

Le développement de $\frac{1}{V_n}$ ne dépend que des mineurs relatifs aux éléments de la diagonale de ce déterminant (mineurs coaxiaux).

Il résulte de là que la fonction génératrice des coefficients de $x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \ldots x_n^{\xi_n}$ dans le développement de $X_1^{\xi_1} X_2^{\xi_2} \ldots X_n^{\xi_n}$ est précisément fournie par la quantité $\frac{1}{V_n}$.

Par exemple, les coefficients de $x_1^{\xi_1} x_2^{\xi_2} \ldots x_n^{\xi_n}$, dans le développement de

$$(x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{\xi_1} (x_1 + x_3 + \ldots + x_n)^{\xi_2} \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^{\xi_n},$$

auxquels il est aisé de donner une signification dans la théorie des permutations, ont pour fonction génératrice l'expression

$$\frac{1}{1 - \Sigma x_1 x_2 - 2 \Sigma x_1 x_2 x_3 - 3 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 - \ldots - (n-1) x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

L'auteur développe les importantes conséquences que l'on peut déduire de la proposition précédente au point de vue arithmétique.

Incidemment, il obtient des résultats intéressants qui se rapportent à la théorie des déterminants. Ils considère le déterminant spécial (inversement symétrique) dans lequel les éléments de la diagonale principale sont égaux à l'unité, tandis que les éléments symétriques par rapport à cette diagonale sont inverses l'un de l'autre. Il étudie aussi les relations entre un déterminant général et les mineurs coaxiaux. Le déterminant général d'ordre pair, plus grand que deux, s'exprime en fonction irrationnelle de ses mineurs coaxiaux, et cela de deux manières différentes. Pour les déterminants d'ordre impair, il n'y a pas d'expression pareille. Pour un ordre n supérieur à 3, on ne peut pas prendre arbitrairement le déterminant lui-même et ses mineurs coaxiaux. Ces quantités sont liées par $2^n - n^2 + n - 2$ relations; si ces conditions sont vérifiées, on peut construire le déterminant en laissant indéterminées $n - 1$ quantités.

Hill (*M.*). — Sur un vortex sphérique. (213-245).

Le point de départ de l'auteur se trouve dans un résultat obtenu dans un Mémoire de lui, inséré dans les *Transactions* pour l'année 1884 et intitulé : *On the motion of Fluid, part of which is moving rationally and part irrationally,* à savoir : la possibilité d'un mouvement symétrique autour de l'axe des z et tel que la surface dont l'équation est

$$r^2\left[\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z-z)^2}{c^2} - 1\right] = \text{const.},$$

contienne toujours les mêmes particules de fluide : dans cette équation, r est la distance à l'axe des z; a, c sont des constantes; z est une fraction arbitraire du temps. Dans le présent Mémoire l'auteur examine le cas où, a étant égal à c, la surface précédente, si on ne tient pas compte d'un cylindre évanouissant, se réduit à une sphère. Le mouvement qui comporte des rotations moléculaires à l'intérieur de la sphère et n'en comporte pas à l'extérieur, est alors étudié en détail tant à l'intérieur, qu'à l'extérieur et sur la surface.

Angas Scott (*Charlotte*). — Sur les cubiques planes. (247-278).

Ce Mémoire, orné de belles figures, est consacré à l'étude géométrique de la façon dont la hessienne et la cayleyenne d'une cubique varient avec cette dernière courbe. On y trouvera aussi d'intéressantes constructions géométriques des trois courbes.

Reynolds (*O.*). — Sur la torsion et la vibration des arbres de machines. (279-360).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Tome CXIX; 1894 [1].

Painlevé. — Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires. (37-40).

L'auteur rappelle certains résultats qu'il a obtenus antérieurement et qu'il complète dans sa Communication actuelle.

Étant donnée une équation linéaire d'ordre q à coefficients algébriques

$$\frac{d^q y}{dx^q} + A_{q-1}\frac{d^{q-1} y}{dx^{q-1}} + \ldots + A_1\frac{dy}{dx} + A_0 y = 0,$$

dont les coefficients A sont exprimés rationnellement en fonction des variables x et X liées par une relation algébrique, on peut toujours (à l'aide d'un nombre fini d'opérations) reconnaître si l'intégrale est algébrique ou ramener l'équation à une quadrature

$$\frac{q'}{q} = B(x, X),$$

B désignant une fonction algébrique à N valeurs de (x, X); on est alors ramené à reconnaître si la différentielle $B(x, X)\,dx$ s'intègre par un seul logarithme.

D'ailleurs on peut toujours calculer algébriquement toutes les intégrales algébriques ou ramener le problème à reconnaître si une certaine différentielle algébrique s'intègre par un seul logarithme.

Plus généralement, si, au lieu d'une équation linéaire, on considère une équation d'ordre q, dont l'intégrale générale est une fonction algébrique *connue* des q constantes, on peut toujours calculer algébriquement toutes les intégrales algébriques ou ramener leur détermination à des quadratures.

Les considérations précédentes s'étendent en partie aux intégrales algébriques, mais qui n'admettent qu'un nombre fini (non donné) de valeurs.

Delassus. — Sur les équations aux dérivées partielles, linéaires et à caractéristiques réelles. (40-42).

M. Delassus étudie les équations, aux dérivées partielles, sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{n-1} \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)z = \theta(x, y),$$

où les caractéristiques

$$\frac{dx}{dy} = -y_1, \qquad \frac{dx}{dy} = -\lambda_2, \qquad \ldots$$

sont mises en évidence.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XX_2.

Dans la région où l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles, les intégrales analytiques ne peuvent présenter que trois sortes de lignes singulières :

1° Les lignes singulières essentielles des coefficients;
2° Les lignes le long desquelles deux racines distinctes de l'équation caractéristique viennent se confondre;
3° Des caractéristiques.

Dans le cas particulier où les λ sont des constantes ayant m valeurs distinctes, le domaine dans lequel une intégrale quelconque est analytique est l'aire d'un polygone convexe ayant au plus $2m$ côtés, qui sont parallèles aux $2m$ directions caractéristiques distinctes.

Toute intégrale définie par des conditions initiales analytiques tout le long d'une droite Δ (non caractéristique) est analytique dans tout le plan.

Moutard. — Sur une classe de polynomes décomposables en facteurs linéaires. (42-45).

Soit Δ un symbole d'opération, linéaire par rapport aux dérivées partielles d'une fonction de p variables, dans lequel le multiplicateur de chaque dérivée est une forme d'un degré égal à l'ordre de la dérivée. Le problème qui a pour objet de trouver une forme d'un degré donné qui, soumise à l'opération Δ, se reproduira à un facteur constant près, est *en général* un problème déterminé.

M. Moutard envisage en particulier le symbole

$$\Theta = (a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p)\left(x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + x_p \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right) + k\left(a_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_p x_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right),$$

où les a, h, k sont des constantes et $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les variables.

Le symbole Θ jouit de cette propriété singulière que les formes qui lui sont associées, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\frac{\Theta(u)}{u}$ est une constante, sont en général décomposables en facteurs linéaires.

Parmi les corollaires de cette proposition, il convient de citer le suivant : Les formes harmoniques qui admettent un diviseur quadratique sont, en général, décomposables en un produit de facteurs quadratiques et de facteurs linéaires homofocaux.

Riquier. — Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable. (267-268).

Étant donné un système différentiel impliquant à la fois un nombre quelconque de fonctions inconnues et un nombre quelconque de variables indépendantes, de simples éliminations, combinées avec des différentiations, permettent en général de le ramener d'abord à une forme complètement intégrable dont l'ordre est presque toujours supérieur à 1, puis, de proche en proche, à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre.

Tannenberg (*de*). — Sur la théorie des formes différentielles quadratiques. (321-324).

La réduction de la forme quadratique à n variables

$$2\mathrm{T}\,dt^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

que l'on rencontre dans les équations de la Mécanique, donne lieu au problème suivant :

« Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme $2\mathrm{T}\,dt$ soit réductible à la suivante

(1) $$2\mathrm{T}\,dt^2 = dy_1^2 + \ldots + dy_p^2 + f(dy_{p+1}, \ldots, dy_n),$$

les coefficients de f étant indépendants de $y_1, \ldots, y_p$. Effectuer la réduction dans le cas où elle est possible ».

M. de Tannenberg donne la solution complète de ce problème. Il introduit le système invariant

$$dx'_i - \sum_k \varphi_k^{(i)}\,dx_k = 0, \qquad \varphi_k^{(i)} = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_k}, \qquad x'_i = \frac{dx_i}{dt}$$

lié à la forme 2T et défini dans sa Communication précédente (15 mai). Les intégrales du premier degré de ce système ont la forme

$$\mathrm{I} = \sum_i \frac{\partial\,\theta(x_1, \ldots, x)_n}{\partial x_i}\,x'_i$$

et sont définies par le système

(2) $$\mathrm{W}_{ih} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\,\partial x_p} + \sum_k b_{ih}^k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} = 0.$$

Pour que la forme $2\mathrm{T}\,dt^2$ soit réductible à la forme (1) il faut et il suffit qu'elle soit de la classe (p), c'est-à-dire que le système invariant (2) admette précisément p solutions distinctes.

Riquier. — Sur l'intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant plusieurs fonctions inconnues. (324-327).

Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Cela posé, si les cases vides du tableau résultant sont toutes situées dans une même colonne; si, de plus, le système considéré est complètement intégrable, son intégration se ramène à celle de systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales.

Maillet. — Sur les groupes de substitutions isomorphes aux groupes symétriques ou alternés. (362-364).

Soit T un sous-groupe d'ordre τ du groupe symétrique ou alterné S de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'ordre σ. On suppose $\sigma > 2\tau$ et $n > 4$: on peut former un groupe transitif G d'ordre γ, de degré $\rho = \frac{\sigma}{\tau}$, holoédriquement isomorphe à S, le groupe T correspondant au groupe H des substitutions de G qui laissent une même lettre de G immobile.

On peut énoncer au sujet des groupes transitifs G les propriétés suivantes :

1° S *est un groupe symétrique.*

I. En général, G n'est qu'une fois transitif; les seules exceptions ont lieu pour $n \leq 6$, ρ pouvant prendre les valeurs 10 et 6.

II. G ne peut contenir un groupe K transitif entre les lettres qu'il déplace et de degré $< \rho$, si $n > 8$.

III. En général, G ne peut renfermer de substitution circulaire quand $n > 8$. Cependant il existe des groupes G de degré $2n$ (n impair), non primitifs, contenant une substitution circulaire d'ordre $2n$, et pour lesquels H est holoédriquement isomorphe au groupe alterné de $n-1$ éléments.

2° S *est un groupe alterné.*

IV. En général, G n'est qu'une fois transitif; les seules exceptions ont lieu pour $n \geq 8$, ρ pouvant prendre les valeurs 15, 10 et 6.

V. G ne peut contenir un groupe K transitif entre les lettres qu'il déplace et de degré $< \rho$, si $n > 8$.

VI. G ne peut renfermer de substitution circulaire quand $n > 8$.

Desaint. — Sur les zéros de certaines fonctions discontinues. — Principe de la méthode pour trouver les zéros de certaines fonctions. (364-367).

1° Si $A\,dx + B\,dy$ conserve un signe constant sur des arcs de courbes L_1, $L_2, \ldots, L_n$, la fonction

$$F(z) = \int_{L_1+L_2+\ldots+L_n} \frac{A\,dx + B\,dy}{Z - z},$$

qui admet comme coupures $L_1, \ldots, L_n$, a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant ces coupures;

2° Si $f(z)\,dz$ reste réelle et garde un signe constant le long d'arcs $L_1, L_2, \ldots$, L_n, la fonction

$$F(z) = \int_{L_1+\ldots+L_n} \frac{f(z)\,dx}{Z - z}$$

qui admet comme coupures $L_1, \ldots, L_n$, a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant ces lignes.

Passant des intégrales aux séries, l'auteur énonce au sujet de ces dernières des théorèmes analogues à ceux qui précèdent.

Liouville. — Sur les équations de la Dynamique. (367-368).

L'auteur fait ressortir les relations qui existent entre les Communications récentes de M. de Tannenberg et les recherches que lui-même a consacrées antérieurement aux équations de la Dynamique.

Mannheim. — Nouvel emploi du conoïde de Plücker (394-396).

L'emploi d'un conoïde de Plücker fournit une solution très simple de ce problème :

« Étant donnés sur une normale les centres de courbure des courbes de contour apparent d'une surface (S) relatives à trois directions données des projectantes, déterminer les éléments principaux de courbure de (S) ».

Pepin (le P.). — Nouveaux théorèmes d'arithmétique. (397-399).

Vernier (*P*.). — Sur la transformation des équations canoniques du problème des trois corps. (451-454).

Serret (*Paul*). — Sur la possibilité de remplacer par un problème déterminé le problème indéterminé que comporte la généralisation du théorème de Pascal. (454-457).

Si l'on désigne par N le nombre des éléments tangentiels qui définissent une enveloppe de classe n, chaque groupe de $N-2$ tangentes ou de $N-3$ plans tangents donne naissance à un cercle ou à une sphère *dérivés*, représentés par l'une ou l'autre des équations

$$\sum_1^{N-2} T_1^n = 0, \qquad \sum_1^{N-3} l_1 T_1^n = 0,$$

et coupés toujours à angles droits par un cercle ou une sphère fixes, de même centre que l'enveloppe : les *axes ou plans radicaux* de ces cercles ou de ces sphères deux à deux, c'est-à-dire les droites ou les plans *dérivés*, définis individuellement par des équations de la forme

$$\sum_1^{N-1} l_1 T_1^n = 0, \qquad \sum_1^{N-2} l_1 T_1^n = 0,$$

passent à leur tour par un point fixe qui est le centre de l'enveloppe.

Il en résulte que, si l'on suppose en présence $N+1$ éléments, désignés par les numéros d'ordre 1, 2, ..., N, $N+1$ et avec lesquels on aura formé les trois

groupes distincts

$$(1, 2, \ldots, N-1), \quad (2, 3, \ldots, N), \quad (3, 4, \ldots, N+1),$$

les droites dérivées une à une de chacun de ces groupes, ou les plans dérivés un à un des quatre groupes analogues

$$(1, 2, \ldots, N-2), \quad (2, 3, \ldots, N-1) \quad (3, 4, \ldots, N), \quad (4, 5, \ldots, N+1)$$

se couperont toujours en un même point.

M. P. Serret montre que, dans le cas de $n = 3$ (courbes de la 3e classe), ce théorème est analogue de celui de Pascal.

Serret (*Paul*). — Sur la construction du cercle dérivé de sept droites ou défini par l'équation $0 = \Sigma_1^7 l_1 T_1^3 = X^2 + Y^2 - R^2$. (474-477).

Tannenberg (*de*). — Sur les équations de la Mécanique. (487-489).

Réponse à la réclamation de priorité de M. R. Liouville.

Stodolkievitz. — Sur le problème de Pfaff. (489-493).

Simplification des conditions d'intégrabilité indiquées par l'auteur dans une précédente Commnnication (*Comptes rendus*, 1892).

Serret (*Paul*). — Sur une autre détermination du cercle dérivé de sept droites et sur quelques-unes de ses applications (493-496).

Stæckel. — Sur les problèmes de Dynamique dont les équations différentielles admettent une transformation infinitésimale. (508-510).

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les variables indépendantes qui déterminent la position d'un système mobile. L'équation des forces vives est

$$\frac{1}{2}\sum_{k,\lambda} a_{k,\lambda}(p_1, \ldots, p_n)\frac{dp_k}{dt}\frac{dp_\lambda}{dt} = \Pi + h,$$

où $\Pi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ désigne la fonction des forces et h une constante.

A quelles conditions les ∞^{2n-2} mouvements du système qui correspondent à une valeur déterminée, d'ailleurs arbitraire, de la constante h, admettent-ils une transformation infinitésimale

$$P_f = \sum_\nu \xi_\nu(p_1, p_2, \ldots, p_n)\frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

dans laquelle les coefficients $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont indépendants de la constante h?

Il faut pour cela :

1° Que la fonction Π soit un invariant de la transformation P_f;

2° Que cette transformation soit conforme et relative à l'expression différentielle

$$A = \sum_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}\, dp_k\, dp_\lambda;$$

3° Que les géodésiques de la variété dont le carré de l'élément linéaire est donné par A admettent la transformation P_f.

Reste à reconnaître si un problème donné de Dynamique satisfait ou non à ces conditions. La réponse à cette question est plus simple qu'on ne pouvait s'y attendre.

Une transformation infinitésimale P_f, qu'admettent les $n-1$ équations différentielles entre $p_1, p_2, \ldots, p_n$, n'existe que dans le cas où l'on peut choisir les variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de telle sorte que :

1° La fonction des forces Π dépende seulement de $p_2, p_3, \ldots, p_n$;

2° L'expression de la force vive se réduise à

$$\frac{1}{2} e^{cp_1} \sum_{k,\lambda} b_{k,\lambda}(p_2, p_3, \ldots, p_n) \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt},$$

c étant une constante arbitraire et les coefficients $b_{k,\lambda}$ dépendant seulement de $p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Alors la transformation infinitésimale P_f a la forme canonique

$$P_f = \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Petot. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (510-512).

Chaque solution particulière d'une équation de Laplace quelconque donne naissance à une solution nouvelle, celle-là à une troisième et ainsi de suite, par l'emploi répété d'une formule où interviennent seulement des différentiations et des quadratures. Pour que l'on puisse construire explicitement cette formule, il suffit que l'on connaisse cinq solutions particulières de l'équation proposée, ou encore quatre solutions de cette équation et une de son adjointe.

Picard (Émile). — Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. (584-589).

M. Picard a montré, il y a quelques années, comment on pouvait étendre aux équations différentielles linéaires la théorie de Galois relative aux équa-

tions algébriques. Il a introduit à ce propos la notion du *groupe de transformations* d'une équation linéaire : la proposition fondamentale au sujet de cette notion consiste en un théorème et sa réciproque que l'auteur avait énoncée avec une restriction inutile.

Depuis, ces questions ont été approfondies par M. Vessiot. Mais M. Vessiot s'est placé à un tout autre point de vue, qui s'éloigne beaucoup de celui de Galois. La marche qu'avait suivie M. Picard étant à divers égards préférable, celui-ci reprend actuellement la question en comblant la petite lacune qu'il avait laissée subsister dans la réciproque du théorème fondamental.

Boussinesq. — Théorie de l'écoulement sur un déversoir sans contraction latérale quand la nappe déversante se trouve ou déprimée, ou noyée, ou adhérente au barrage. (589-595).

Dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, juin 1893) l'auteur a fait voir comment on peut calculer les principales circonstances de l'écoulement sur un déversoir sans contraction latérale, dans le cas relativement simple d'une nappe déversante *libre,* c'est-à-dire au-dessous de laquelle l'air extérieur afflue librement par des ouvertures ménagées des deux côtés. Quand ces ouvertures manquent, la nappe est *noyée* en dessous, et peut même être *adhérente* à la face aval du barrage : ce cas est fréquent dans la pratique. En outre le cas d'une nappe *déprimée,* c'est-à-dire en contact avec une masse d'air à une pression moindre que celle de l'atmosphère, peut aussi se présenter, quoique exceptionnellement.

Pour élucider ces divers cas, M. Boussinesq reprend une théorie qu'il avait ébauchée en 1887; il montre ensuite que les résultats en sont d'accord avec les observations de M. Bazin (*Annales des Ponts et Chaussées*, novembre 1891 et février 1894) et spécialement avec trois formules empiriques qui résument les mesurages de débits suivant la plus ou moins grande pression ou non-pression relative exercée sur la nappe.

Boussinesq. — Détermination, en partie expérimentale et en partie théorique, de la contraction inférieure d'une nappe de déversement déprimée ou noyée en dessous, ou même adhérente, sur un barrage ayant sa face d'amont verticale. (618-624).

Poincaré. — Rapport sur un Mémoire de M. Stieltjes intitulé : *Recherches sur les fractions continues.* (630-631).

Laguerre et Halphen n'ont abordé que dans des cas particuliers l'étude des fractions continues algébriques.

Le travail de M. Stieltjes, « un des plus remarquables Mémoires d'Analyse » qui aient été écrits dans ces dernières années », dit M. Poincaré, apporte dans un cas fort étendu la solution de toutes les questions relatives à la convergence de ces expressions analytiques.

Painlevé. — Sur les transformations infinitésimales des trajectoires des systèmes. (637-639).

Dans une Note récente, l'auteur a indiqué une classification des transformations $q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_n)$ qui conservent les trajectoires d'un système (A) de Lagrange,

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \mathrm{Q}_i(q_1, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\mathrm{T} = \sum_{i,j} \mathrm{A}_{ij}(q_1, \ldots, q_n) q'_i q'_j.$$

Actuellement, il donne le tableau des formes auxquelles peuvent être ramenées, moyennant un choix convenable des variables q_i, tous les systèmes qui admettent une transformation infinitésimale *conforme*. L'une des formes en question est identique au type récemment indiqué par M. Stæckel.

Les principes établis par M. Painlevé permettent d'énumérer tous les types des systèmes (A) dont les trajectoires admettent au moins une transformation infinitésimale. La véritable difficulté consiste à distinguer, parmi ces systèmes, ceux qui admettent d'autres transformation infinitésimales, autrement dit, à former tous les groupes de transformation des trajectoires et les systèmes (A) qui s'y rattachent. M. Painlevé est en mesure d'effectuer cette déduction entièrement pour le cas de deux paramètres et partiellement pour le cas de trois.

Cartan. — Sur la réduction de la structure d'un groupe à sa forme canonique. (639-642).

Lorsqu'on a à intégrer une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre à $n+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ admettant un groupe fini et continu G, simplement transitif, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont on connaît les équations finies, on réduit le problème à l'établissement d'un certain nombre d'équations *irréductibles*, à groupes *simples* et qui rentrent toutes dans un certain nombre de types connus.

Mais pour arriver à l'établissement de ces équations auxiliaires, il faut résoudre les problèmes suivants :

1° Décomposer un groupe donné G en une série de sous-groupes $G_1, G_2, \ldots, G_p$, dont chacun est un sous-groupe invariant de celui qui le précède, le dernier G_p se réduisant à la transformation identique;

2° Étant donné un groupe, réduire la structure de ce groupe à sa structure canonique.

M. Cartan revient sur la solution de ces deux problèmes, qui ont déjà fait l'objet de sa thèse.

Boussinesq. — Vérifications expérimentales de la théorie des déversoirs à nappes noyées en dessous ou adhérentes : vérifications relatives au débit et à la contraction inférieure. (663-669).

Saint-Germain (de). — Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec un port à marée. (673-675).

Soient, à l'instant t, u et z les cotes (positives ou négatives), au-dessus du niveau moyen de la mer, des surfaces de l'eau dans le port et dans le bassin; l'équation du problème est

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4m^2(u-z). \quad (1)$$

La hauteur u est une donnée du problème; c'est une fonction périodique du temps dont l'auteur donne une expression qui ne s'écarte pas sensiblement de la réalité. Cette expression lui permet de trouver explicitement l'intégrale générale de (1) et, par suite, de calculer z à une heure quelconque du flux ou du reflux.

Boussinesq. — Vérifications expérimentales de la théorie des déversoirs à nappe noyée en dessous ou adhérente : vérifications relatives aux pressions. (707-711).

Marey. — Des mouvements que certains animaux exécutent pour retomber sur leurs pieds lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé. (714-717).

Par la photographie instantanée, M. Marey a constaté qu'un chat qu'on laisse tomber d'un lieu élevé retombe toujours sur ses pattes. L'inspection des figures exclut l'idée que l'animal imprime à son corps un mouvement de rotation en prenant un point d'appui sur les mains de l'opérateur. L'hypothèse d'un appui sur la résistance de l'air n'est pas plus admissible, car elle produirait une rotation inverse de celle qu'on observe.

Guyou. — Note relative à la Communication de M. Marey. (717-718).

Le retournement spontané de l'animal semble au premier abord en contradiction avec le théorème des aires. Mais cette contradiction n'existe pas. Ici, la somme totale des aires reste constamment nulle, bien que la somme algébrique des rotations soit positive.

Lorsque l'animal, par une contraction des muscles, communique à son corps un mouvement de torsion, il donne, par l'extension de ses membres, un grand moment d'inertie à la partie qui tourne dans le sens négatif. Il résulte alors du théorème des aires que les rotations négatives ont une valeur moindre que les positives. Le contraire a lieu lorsque le chat, intervertissant ensuite les moments d'inertie par la contraction des pattes de derrière et l'allongement de celles de l'avant, donne à son corps une torsion inverse. Le corps est alors revenu dans une position telle que toutes ses parties ont tourné dans le sens positif. La rotation totale de 180° peut ainsi s'effectuer par mouvements différentiels successifs.

Lévy (Maurice). — Observations sur le principe des aires. (718-719).

Un système matériel, soumis uniquement à la pesanteur et à ses actions mutuelles et partant du repos, peut-il se donner à lui-même une rotation autour d'un axe horizontal, passant par son centre de gravité, en décrivant constamment des aires dont la somme est nulle? Ce serait impossible, s'il était assujetti à tourner comme un système invariable. Mais on exige seulement que la forme finale soit la même que la forme initiale avec une orientation différente.

Dans ces conditions, il existe un grand nombre de systèmes matériels articulés, comme le chat et d'autres animaux, qui peuvent effectuer le mouvement indiqué.

Touche. — Réduction de l'équation de continuité en hydraulique à la forme $\frac{d\rho}{dt} + v_1 \frac{d\rho}{ds} + \rho \frac{dv_1}{ds} - 2\rho v_1 \frac{\delta' \alpha}{ds''} = 0$. (721-723).

Dans cette équation, v_1 est la vitesse suivant la trajectoire dont ds est un élément; ds'' est un élément de la binormale à la trajectoire et sa longueur est la même que celle de ds.

Si l'on considère simultanément l'élément de trajectoire ds et l'élément de la normale principale à la trajectoire ds' ou AB, qui partent tous deux d'un point A, la tangente en B à la trajectoire qui passe par ce point fait avec ds l'angle $d\alpha$; de même, si nous considérons simultanément l'élément de la trajectoire ds et l'élément de binormale à la trajectoire ds'' ou AC, qui partent tous deux du point A, la tangente en C à la trajectoire qui passe par ce point fait avec ds l'angle $\delta'\alpha$.

ρ est la densité et t le temps.

Stæckel. — Sur des problèmes de Dynamique dont les équations différentielles admettent un groupe continu. (723-725).

L'équation différentielle en p_1, p_2 d'un problème de Dynamique à deux variables, où la fonction des forces n'est pas une constante, admet au plus *une* transformation infinitésimale indépendante de la constante h de la force vive.

En général, pour que le système de $n-1$ équations différentielles en p_1, $p_2, \ldots, p_n$ admette un groupe continu G_2, à deux paramètres, indépendant de la constante h de la force vive, il faut et il suffit qu'on puisse choisir les variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de telle sorte que :

1° La fonction des forces Π dépende seulement de $p_3, p_4, \ldots, p_n$;

2° L'expression de la force vive se réduise à une des deux formes

$$\frac{1}{2} e^{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2} \sum_{k, \lambda} C_{k\lambda}(p_3, p_4, \ldots, p_n) \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt},$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k, \lambda} p_2^{\gamma - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_2}} C_{k\lambda}(p_3, p_4, \ldots, p_n) \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_\lambda}{dt};$$

ω_1, ω_2, γ sont des constantes arbitraires et on doit prendre $\varepsilon_{k\lambda} = 0$ pour $k \neq \lambda$ et $\varepsilon_{kk} = 1$.

Lerch. — Sur la différentiation des séries trigonométriques. (725-728).

Étant donnée la série

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi$$

et supposant la série

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin(2\nu+1) x\pi,$$

uniformément convergente, l'auteur montre que la dérivée de $f(x)$ est donnée par la formule

$$f'(x) = g(x) \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Appliquant cette formule à la série de Kummer

$$\log \Gamma(w) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin w\pi}{\pi} + \left(w - \frac{1}{2}\right)[\log 2\pi - \Gamma'(1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \pi}{n\pi} \sin 2nw\pi,$$

on trouve

$$\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} \sin w\pi + \frac{\pi}{2} \cos w\pi + [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \sin w\pi$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} \sin(2n+1) w\pi.$$

Deprez (Marcel). — Sur un appareil servant à mettre en évidence certaines conséquences du théorème des aires. (767-769).

M. Marcel Deprez a construit un système matériel, dont le principe lui a été communiqué par M. Picard, et qui peut, par le seul jeu de ses forces intérieures, tourner d'un angle quelconque autour de son centre de gravité, tous ses points matériels se retrouvant finalement dans les positions relatives qu'ils occupaient primitivement.

Soit un disque matériel homogène, mobile autour d'un axe vertical passant par son centre de figure. Sur la face supérieure de ce disque on a tracé une courbe fermée, entièrement comprise dans une portion angulaire du disque, inférieure à un angle droit. Si un point matériel, partant d'un point quelconque de la courbe, la décrit tout entière, le disque devra tourner d'un certain angle pour que la somme des aires décrites autour du centre de gravité commun soit constamment nulle.

Pour que le centre de gravité reste constamment sur l'axe de rotation, M. Deprez a remplacé le point mobile unique par deux petites sphères qui, sous l'action d'un ressort rendu libre par la combustion d'un fil, décrivent chacune une circonférence complète, chacune de ces courbes égales étant placée symétriquement par rapport au centre du disque.

Appell (P.). — Sur le théorème des aires. (770-771).

L'auteur donne un exemple élémentaire d'un système qui, sollicité par des forces extérieures dont le moment est nul par rapport à un axe fixe, revient, par des déformations successives, à sa configuration primitive après avoir tourné d'un certain angle.

Voici d'ailleurs une remarque générale qui permet de ramener à un même type simple tous les problèmes de cette nature.

Qu'on imagine un système formé par un corps solide, mobile autour d'un axe fixe Oz, et par des points matériels m_1, m_2, ... animés de mouvements prescrits à l'avance par rapport au corps solide : les coordonnées semipolaires r_1, θ_1, z_1; r_2, θ_2, z_2, ... de ces points par rapport à des axes liés au corps solide sont des fonctions données du temps. On suppose que la somme des moments des forces extérieures par rapport à Oz soit nulle. On peut alors, sans altérer le mouvement du reste du système, remplacer plusieurs des points m_1, m_2, ... par un seul point de masse M dont les coordonnées relatives R et Θ, par rapport au corps solide, sont définies en fonction du temps par les deux relations

$$MR^2 = \Sigma mr^2, \qquad MR^2\, d\Theta = \Sigma mr^2\, d\theta.$$

Boussinesq. — Sur la théorie de l'écoulement par un déversoir à nappe déprimée ou noyée en dessous, dans le cas où une armature horizontale rend la contraction inférieure maximum. (771-776).

Dujardin. — Sur une erreur relevée dans la théorie des nombres de Legendre. (843-845).

Autonne. — Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur une formule d'Halphen. (845-848).

On sait que toute courbe gauche algébrique indécomposable peut être représentée par les équations

$$f(x, y) = 0 \qquad z = \frac{P_1(x, y)}{P_0(x, y)}.$$

On peut, sans changer la courbe, remplacer les deux polynomes P_0, P_1 de degrés r, $r+1$, par deux autres polynomes P'_0, P'_1, de degré r', $r'+1$, choisis à volonté, pourvu que $P'_1 P_0 - P'_0 P_1$ soit divisible par n.

Excluant les courbes à points multiples, Halphen a montré que l'on pouvait prendre pour P_0 tout polynome qui s'annule en chaque point double apparent.

Étendant l'analyse d'Halphen à des courbes douées de singularités quelconques, M. Autonne parvient à ce théorème :

Peut être pris pour dénominateur de z tout polynome tel que la courbe $P_0 = 0$ passe par chaque point double apparent et coupe chaque cycle de $f(x, v) = 0$, issu du point multiple m en σ points confondus avec m, σ ne pouvant être plus petit qu'un nombre fixe σ_0, que l'auteur calcule à l'aide de développements en série.

Cesaro. — Sur une formule empirique de M. Pervouchine. (848-849).

L'auteur conteste l'exactitude théorique d'une formule arithmétique de M. Pervouchine. A cette formule

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log \log n - 1 + \frac{5}{12 \log n} + \frac{1}{24 \log \log n}$$

où p_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, il montre qu'il convient de substituer la suivante

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log \log n - 1 + \frac{\log \log n - 2}{\log n} - \frac{(\log \log n)^2 - 6 \log \log n + 11}{2(\log n)^2}.$$

Kœnigs. — Sur le mouvement d'un corps solide. (897-899).

Une courbe quelconque, liée à un solide en mouvement, n'a généralement pas d'enveloppe. Les courbes qui jouissent de cette propriété ont un intérêt particulier. M. Kœnigs montre qu'il suffit de quadratures pour déterminer les courbes du corps qui ont une enveloppe.

L'auteur considère ensuite la surface réglée mobile R_m qui, dans le mouvement, se raccorde constamment avec une surface réglée fixe R_f tout en glissant le long de la génératrice de contact. Il suppose qu'on substitue à la surface fixe R_f une autre surface R'_f, sur laquelle doit virer R_m, de façon que le pas h du mouvement hélicoïdal instantané reste la même fonction du temps. Dans ces conditions, les courbes liées à R_m, qui ont une enveloppe, demeurent les mêmes, quelle que soit la surface réglée R'_f.

Lecornu. — Sur une application du principe des aires. (899-900).

Si une aire plane S, ayant par rapport à son centre de gravité C un rayon de giration K, tourne autour de C avec une vitesse ω, et si en même temps la ligne OC de longueur constante a, issue d'un point fixe O du plan, tourne en sens contraire autour de O avec une vitesse φ, on peut faire en sorte que la somme des aires décrites par les rayons vecteurs joignant aux divers éléments de S soit nulle à tout instant; il suffit pour cela de poser la relation

$$\frac{\omega}{\varphi} = 1 + \frac{a^2}{K^2}.$$

La rotation de S s'effectue alors avec la vitesse angulaire absolue $\omega - \varphi$, c'est-à-dire $\frac{a^2}{K^2}\varphi$; c'est la vitesse de retournement.

M. Lecornu se sert de ce théorème pour montrer qu'un serpent, dont l'axe serait assujetti à conserver une forme invariable, n'aurait aucune difficulté à effectuer une inversion analogue à celle du chat.

Leau. — Sur les équations fonctionnelles. (901-902).



Extension aux équations fonctionnelles du théorème fondamental qui démontre l'existence et l'holomorphie des intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Cartan. — Sur un théorème de M. Bertrand. (902).

Il s'agit du célèbre théorème de M. Bertrand :

Si une fonction rationnelle de n lettres prend plus de deux valeurs distinctes par l'ensemble des substitutions effectuées sur ces n lettres, elle en prend au moins n, sauf toutefois si $n = 4$.

Ce théorème, comme le fait remarquer M. Cartan, dérive immédiatement de ce fait que le groupe symétrique de n lettres n'admet, dans le cas où n est différent de 4, d'autre sous-groupe invariant que le groupe alterné.

Staude. — Réclamation relative à une Note précédente de M. Stæckel, sur les problèmes de Dynamique dont les équations différentielles admettent une transformation infinitésimale. (903).

André (D.). — Sur les permutations quasi-alternées. (947-949).

Perrin. — Sur la résolution des équations numériques au moyen des suites récurrentes. (990-993).

On sait, depuis Bernoulli et Euler, que si $f(x) = 0$ est l'équation génératrice d'une suite récurrente $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, la plus grande et la plus petite en valeur absolue des racines de cette équation sont les limites vers lesquelles tend le rapport $\frac{u_n + 1}{u_n}$, selon qu'on s'éloigne indéfiniment, dans le sens des n positifs ou des n négatifs, des termes initiaux de la suite, de quelque manière que ceux-ci aient été choisis.

Jusqu'ici cependant l'emploi des suites récurrentes, malgré des perfectionnements dus à M. Laisant et à M. d'Ocagne, n'a pas été considéré comme fournissant un procédé régulier et sûr pour le calcul par approximation des racines des équations numériques. Il subsiste toujours cette grave objection que, la racine a étant supposée ainsi calculée approximativement, il faut, pour obtenir les suivantes, opérer à nouveau de la même manière sur une autre équation $\frac{f(x)}{x-a} = 0$, dont tous les coefficients ne sont plus qu'approchés, de sorte que les erreurs s'accumulent à mesure qu'on avance dans les calculs.

En reprenant cette question, M. Perrin a rencontré certaines propriétés des suites récurrentes qui conduisent à un procédé simple et net de séparation et de calcul des racines des diverses catégories.

Stouff. — Sur la composition des formes linéaires et sur les groupes à congruences. (995-996).

Les groupes à congruences, par rapport à des modules premiers ou non, ont déjà été étudiés par M. Gierster.

M. Stouff indique un procédé nouveau pour définir une partie de ces groupes, et les conséquences étendues qu'on peut tirer de cette nouvelle définition.

Hadamard. — Sur l'élimination. (995-997).

Étant données trois équations

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_3(x, y) = 0,$$

aux deux inconnues x, y et de degrés m, n, p, on peut en écrire l'éliminant par le produit $\pi_3 = \Pi f_3(x, y)$ où la multiplication est étendue aux mn valeurs x, y qui vérifient les deux premières équations. Mais la même solution pourrait être obtenue par le produit $\pi_1 = \Pi f_1(x, y)$, étendue aux solutions communes à f_2 et f_3, ou par le produit analogue π_2.

Il est intéressant de comparer entre elles ces différentes expressions.

Dans le cas de deux équations à une inconnue $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ de degrés m, n, on sait trouver le résultant sous forme d'une expression R_{12} entière par rapport à tous les coefficients et telle que

$$R_{12} = (-1)^{mn} R_{21}.$$

Dans le cas actuel, $f_i^0(y)$ désignant l'ensemble des termes de plus haut degré de $f_i(x, y)$ pour $x = 1$ et R_{ik}^0 le résultant des polynomes $f_i^0(y)$, $f_k^0(y)$, l'expression π_3 a pour dénominateur $(R_{12}^0)^p$. M. Hadamard démontre que, à ces dénominateurs près, les quantités π_1, π_2, π_3 sont identiques en valeur absolue.

Chapel. — Sur la loi de résistance de l'air. (997).

Pour les vitesses, à partir de 300^m jusqu'aux plus hautes expérimentées (plus de 1000^m), la loi de résistance de l'air peut être représentée par une ligne droite.

Picard (Émile). — Sur deux nombres invariants dans la théorie des surfaces algébriques. (1169-1172).

Considérant une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

M. Picard pose les deux équations

$$F(x, y, z) = u,$$
$$\varphi(x, y, z) = v,$$

où F et φ sont deux fonctions rationnelles de x, y, z.

On suppose que ces deux équations déterminent un certain nombre de points (x, y, z) de la surface variables avec u, v, et tels que pour eux le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ ne s'annule pas identiquement. On admet qu'il soit possible de choisir F et φ, de manière que, pour un système particulier de valeurs de u et v les μ points correspondants soient μ points arbitrairement donnés sur f; soit $\rho + 1$ le minimum de ce nombre μ.

Le nombre ρ est un *invariant*, et l'on voit qu'il s'introduit par l'extension aux surfaces du point de vue auquel s'était placé Weierstrass pour définir le genre des courbes algébriques.

En étudiant les conditions d'existence du nombre ρ, M. Picard est conduit à un second invariant en général distinct de celui-ci. Il peut exister sur une surface une correspondance birationnelle entre deux ensembles de ν points, correspondance dépendant de paramètres arbitraires. Le minimum ρ' du nombre ν sera un invariant de la surface. On obtient ainsi deux éléments intéressants de classification pour des classes très étendues de surfaces algébriques.

Siacci. — Sur le problème des trois corps. (1189).

La Note de M. Vernier (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 451) est la reproduction d'une Note de M. Siacci (*Comptes rendus*, 12 janvier 1874).

Stæckel. — Remarques au sujet de la réclamation de M. O. Staude. (1189).

Perrin. — Sur la résolution des équations numériques au moyen des suites récurrentes. (1190-1192).

Andrade. — Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. (1192-1195).

Lafay. — Sur les abaques de 16 à 18 variables. (1195-1198).

Picard (*Émile*). — Rapport sur un Mémoire de M. Riquier sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre. (1250-1251).

Dyck (*W.*). — Sur la détermination du nombre des racines à un système d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction de ces points. (1254-1257).

Perrin. — Sur la résolution des équations numériques au moyen des suites récurrentes. (1257-1260).

Bougaïeff. — Sur les intégrales définies suivant les diviseurs. (1259-1261).

L'intégrale définie suivant les diviseurs

$$\sum_{a(n)}^{b} \theta(d)$$

est une somme de fonctions $\theta(d)$ prises pour tous les diviseurs d du nombre entier n entre les limites a et b inclusivement. La théorie de ces intégrales est intimement liée avec la théorie des intégrales numériques suivant les diviseurs. Elle donne des lois numériques nouvelles pour l'arithmologie ou la théorie des fonctions discontinues. M. Bougaïeff donne quelques exemples de ces lois.



BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXII, 1894 (¹).

Picard (Émile). — Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'Électricité. (2-8).

Il s'agit de l'équation

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial V}{\partial t} = C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui régit les variations du potentiel électrique dans un fil supposé transmettre une perturbation électrique. M. Picard ramène cette équation à la forme plus simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\,\partial Y} + z = 0,$$

et lui applique la méthode générale de Riemann, qui permet d'en faire une discussion complète.

Raffy (L.). — Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques. (8-19).

On sait que, si l'élément linéaire d'une surface est réductible à la forme *harmonique*

$$ds^2 = (U - V)(du^2 - dv^2), \tag{1}$$

les lignes géodésiques de cette surface ont pour équation finie

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int\frac{dv}{\sqrt{a-V}} = b.$$

L'auteur étudie, sous le nom de *géodésiques spéciales,* les familles de courbes représentées par cette équation, où a reçoit des valeurs fixes et b varie seul. Il établit, entre ces géodésiques spéciales et la forme de l'intégrale quadratique, une relation qui est réciproque :

(¹) Voir *Bulletin*, XIX_2, p. 278.

Étant donnée une surface harmonique d'élément linéaire (1), *si on la rapporte à une famille de géodésiques spéciales* $\theta_1 =$ *const. et à leurs trajectoires orthogonales* $\theta =$ *const., en sorte qu'il vient*

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma\, d\theta_1^2, \tag{2}$$

l'équation aux géodésiques, relative aux variables θ *et* θ_1,

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1,$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 *est affecté d'un coefficient constant, et peut, par suite, être supposé nul.*

Il indique ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément linéaire, donné sous la forme (2), convienne à des surfaces harmoniques, rapportées à une famille de géodésiques spéciales et à leurs trajectoires orthogonales. Ces caractères, appliqués à certaines surfaces présentant une famille de courbes parallèles, dont la courbure géodésique en chaque point est fonction de la courbure totale, conduisent à divers éléments linéaires de forme simple, notamment à ceux des paraboloïdes imaginaires dont M. Weingarten a trouvé toutes les déformations. En terminant, M. Raffy rectifie une assertion qui a été émise d'une façon trop absolue sur l'existence d'enveloppes pour toute famille de géodésiques spéciales.

Picquet. — Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques; son identité avec un problème plan. (19-25).

Rappel de la solution donnée par l'auteur dans le *Journal de Crelle*, t. 99, en 1885; examen du cas particulier où quatre des sept points donnés sont dans un même plan. Le problème du huitième point commun à trois quadriques qui ont sept points communs revient, comme le montre M. Picquet, à la recherche du neuvième point d'un faisceau de cubiques planes. Cette identité, qui n'avait pas été remarquée, permet à l'auteur de donner une nouvelle solution du problème relatif aux quadriques.

Kœnigs. — Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan. (25-27).

Le point est attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube des distances. La trajectoire est une courbe fermée. Mais elle ne peut être parcourue qu'en partie, le problème n'ayant plus de sens à partir d'un certain instant, où la vitesse et l'accélération sont infinies. Faute d'avoir observé ce principe, certains auteurs ont donné à des questions analogues des solutions qu'on ne saurait admettre.

Appell (P.). — Sur les courbes autopolaires, par rapport à une conique donnée. (27).

Simple énoncé : l'équation générale des coniques (Σ) autopolaires par

rapport à une conique (S) contient deux paramètres; si l'on établit une relation entre eux, la conique (Σ) enveloppe une courbe autopolaire par rapport à (S); toute courbe autopolaire peut être obtenue de cette façon.

Laisant. — Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques. (28-36).

Genty (E.). — Note sur des couples de surfaces applicables. (36-44).

Dans un travail inséré au *Bulletin* en 1893, M. Caronnet a cherché tous les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance des points correspondants soit constante. Il a trouvé deux groupes de telles surfaces. Celles de l'un des deux groupes sont des surfaces réglées déjà considérées par M. Beltrami : elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même paramètre et sont applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices correspondantes. Celles de l'autre groupe dépendent de deux fonctions arbitraires de deux paramètres différents. Elles ont été étudiées par Ribaucour dans son grand *Mémoire sur les élassoïdes,* où est établi le lien étroit de cette théorie avec celle des surfaces qui correspondent à la sphère avec orthogonalité des éléments.

La Note de M. Genty a pour sujet de montrer avec quelle facilité on peut retrouver les résultats précités au moyen de la Géométrie vectorielle.

Goursat. — Sur les tangentes à une cubique plane. (45-47).

Démonstration analytique fort simple de ce théorème connu : *Le rapport anharmonique des quatre tangentes qu'on peut mener à une cubique par l'un de ses points reste constant quand le point décrit la courbe.* (La cubique est supposée sans point double, et l'on fait abstraction de la tangente qui la touche au point considéré).

Demoulin. — Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution. (47-49).

Démonstration du théorème suivant et de sa réciproque :

Si deux surfaces (S) et (S_1) se correspondent ponctuellement de telle manière que deux éléments correspondants MM', $M_1M'_1$ et la normale en M soient parallèles à un même plan; si, en outre, les droites MM_1 sont tangentes à la surface (S), cette dernière sera applicable sur une surface de révolution. L'élément linéaire ayant été ramené à la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha)\, d\beta^2,$$

les droites MM_1 seront tangentes aux lignes $\beta = \text{const.}$ et l'on aura

$$MM_1 = m\sqrt{A(\alpha)},$$

m désignant une constante.

Andrade. — Note sur les intégrales de M. Schwarz. (50-52).

Soient une suite infinie de fonctions $V_0, V_1, V_2, \ldots$, qui s'annulent toutes à la surface d'un volume (D) et satisfont à l'intérieur de ce volume aux équations

$$\Delta V_{i+1} + V_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les intégrales de volume

$$W_{m,n} = \int V_m V_n \, d\tau,$$

relatives au domaine (D), sont toutes positives et vérifient, en vertu du théorème de Green, les identités $W_{m,n} = W_{0,m+n}$. De plus, on a

$$\frac{W_{01}}{W_{03}} < \frac{W_{02}}{W_{01}} < \frac{W_{03}}{W_{02}} < \ldots.$$

C'est là un théorème dû à M. Schwarz. L'auteur en présente une nouvelle démonstration fort simple.

Picard (Émile). — Sur la méthode des approximations successives et les équations linéaires. (52-57).

L'auteur applique la méthode des approximations successives aux équations linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + A_m(x)y = 0,$$

et montre que cette méthode fournira toutes les intégrales par des développements valables dans tout intervalle où les coefficients A_i seront des fonctions continues de x.

Si les coefficients A_i dépendent d'un paramètre k et sont, pour x variant entre o et a, des fonctions holomorphes dans tout le plan de la variable k, toutes les intégrales ont cette même propriété pour x compris entre o et a.

M. Picard considère ensuite une équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A_1(x)\frac{dy}{dx} + A_2(x)y = 0,$$

dont les coefficients sont continus pour toute valeur réelle de x et admettent la période ω. Il existe, en général, un système d'intégrales qui se reproduisent multipliées par des constantes μ_1 et μ_2, quand on change x en $x + \omega$. La détermination de ces facteurs est un problème important et difficile : au moyen des approximations successives on peut former l'équation qui les admet pour racines. Par le même procédé on détermine les deux facteurs par lesquels se trouvent multipliées deux intégrales de l'équation ci-dessus, quand, ses coefficients étant supposés holomorphes dans une couronne comprise entre deux cercles concentriques, la variable tourne dans la couronne autour du cercle intérieur.

Antomari. — Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices. (58-63).

L'auteur donne une génération des couples de surfaces réglées applicables

génératrice sur génératrice et de telle sorte que la distance des points correspondants reste constante.

On partira d'une courbe gauche quelconque (C), dont les points M seront définis par l'arc t de la représentation sphérique de leurs tangentes. Sur la normale principale en M, on portera de part et d'autre de ce point deux segments égaux à $l \sin(t+h)$ (l et h étant deux constantes), et par les extrémités de ces segments, on mènera deux parallèles à la tangente à (C) en M. Quand le point M parcourt la courbe, ces deux droites engendrent les deux surfaces répondant à la question.

Raffy (*L.*). — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé). (63-66, 84-96).

Comme l'indique son titre, cette Communication résume un ensemble étendu de recherches sur les *surfaces harmoniques*, ou surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = [\mathrm{U}(u) - \mathrm{V}(v)](du^2 + dv^2).$$

Après avoir rappelé les travaux de ses devanciers, notamment deux résultats de la plus haute importance, dus à M. Weingarten, l'auteur s'exprime ainsi :

« Tout ce qui constitue aujourd'hui la théorie des surfaces harmoniques, en dehors des travaux que nous venons d'énumérer, est contenu, à fort peu de chose près, dans nos *Recherches*. C'est ce qui résulte du Rapport présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXV, p. 1122, 1892) sur le concours dont cette théorie a fait le sujet. Le Mémoire couronné traite exclusivement des éléments linéaires doublement harmoniques, dont la détermination complète forme la seconde Partie de mon travail. Un autre, qui a partagé avec le mien une mention honorable, ne contient, sauf quelques théorèmes communs aux trois Mémoires approuvés, que les deux beaux résultats mentionnés ci-dessus, le second trouvé sans nul doute avant que M. Weingarten le publiât. »

Suit l'analyse, Chapitre par Chapitre, des trois Parties des *Recherches* de M. Raffy.

Première Partie (publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1894). — Au Chapitre Ier est rappelé le théorème fondamental de M. Massieu qui rattache à la forme harmonique de l'élément linéaire l'existence d'une intégrale quadratique pour le problème des lignes géodésiques; cette proposition est mise sous une forme qui se prête à d'importantes applications. Ainsi il est prouvé au Chapitre II que toute surface harmonique à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution. La seconde application (Chap. III) est la détermination complète des surfaces réglées harmoniques ; à part celles qui sont applicables sur des surfaces de révolution, elles résultent toutes de la déformation de surfaces du second degré, réelles ou imaginaires. Le Chapitre IV traite des intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques, telle que l'a présentée M. Darboux. Il est prouvé que l'intégrale linéaire n'existe que pour les surfaces de révolution; s'il existe une intégrale quadratique, la surface est généralement harmonique et son élément linéaire satisfait à une équation fonctionnelle.

Deuxième Partie (publiée par le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1894). — Elle a pour objet *la détermination des éléments linéaires doublement harmoniques*, c'est à dire réductibles de deux manières, et, par suite, d'une infinité de manières à la forme harmonique. Il s'agit de trouver toutes les fonctions $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ qui vérifient, conjointement avec deux autres fonctions inconnues $X(x)$ et $Y(y)$, l'équation différentielle indéterminée

$$(E)\quad (X''+Y'')(\varphi-f)+3(X'-Y')\varphi'-3(X'+Y')f'+2(X-Y)(\varphi''-f'')=0.$$

Au Chapitre Ier, après une classification des éléments linéaires harmoniques, qui fournit, quand l'élément est donné sous la forme $(\varphi-f)\,dx\,dy$, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit doublement harmonique, viennent « deux lois intuitives, qui, bien qu'essentiellement distinctes, concourent à faire connaître des exemples nouveaux d'éléments linéaires doublement harmoniques; l'une est la loi de passage, l'autre la loi de réciprocité ».

Grâce aux développements des Chapitres II et III où sont déterminées toutes les solutions de l'équation (E) quand $(\varphi-f)\,dx\,dy$ est l'élément linéaire d'une développable, d'une surface à courbure totale constante, ou d'une surface de révolution doublement harmonique, les deux lois précitées fournissent (Chap. IV) dix solutions nouvelles du problème, ce qui en fait trente-six en tout. Le reste du Chapitre est employé à démontrer qu'*il n'en existe point d'autres,* ainsi que l'auteur l'avait annoncé dès 1889. Il y arrive par des considérations empruntées à la théorie des fonctions de variable complexe, en établissant d'abord que *toutes les fonctions* X, Y, φ, f, *qui satisfont à l'équation* (E), *sont des fonctions uniformes,* puisqu'elles *ne présentent, à distance finie, d'autres singularités que des pôles à résidu nul.* La distinction une fois faite entre les solutions possibles, d'après leurs pôles et leurs périodes, un raisonnement direct détermine toutes les solutions doublement périodiques. Mais la recherche des autres serait bien peu avancée si l'auteur ne faisait dépendre leur connaissance d'un problème, en apparence tout autre et plus général : *trouver toutes les fonctions* $X(x)$ *qui sont uniformes et qui deviennent des fonctions uniformes de* ξ *par le changement de variable*

$$d\xi=\frac{dx}{\sqrt{X(x)}}.$$

La solution complète de cette dernière question fournit toutes les formes analytiques, parfaitement déterminées, que peuvent revêtir les fonctions X, Y, φ et f et qui comportent au plus huit constantes arbitraires. On est ramené à une question de calcul algébrique pour déterminer, dans la mesure où elles doivent l'être, les constantes arbitraires et l'on reconnaît que les éléments linéaires doublement harmoniques énumérés au début du Chapitre sont bien les seuls qui existent.

Le Chapitre V traite d'une classe importante d'éléments linéaires que M. Sophus Lie a considérés le premier, mais sans les calculer, et dont la détermination est implicitement contenue dans le Chapitre précédent. Des résultats obtenus par M. Lie et convenablement complétés par l'auteur, il suit que *toute surface susceptible d'être représentée sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de lignes de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

Troisième Partie (publiée dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1895). — L'objet de cette dernière Partie est *la détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des surfaces spirales.*

Le problème revient à trouver toutes les fonctions T de $x+y$, qui vérifient, conjointement avec deux autres fonctions inconnues $X(x)$ et $Y(y)$, l'équation différentielle

$$(S)\qquad \begin{cases} 2X(T'+T^2-2iT-1)-2Y(T'+T^2+2iT-1) \\ \qquad +3X'(T-i)-3Y'(T+i)+X''-Y''=0, \end{cases}$$

où les accents désignent des dérivées et i l'unité imaginaire. L'auteur montre d'abord que, pour les spirales simplement harmoniques, les fonctions X et Y sont nécessairement de la forme Ae^{2rx}, Be^{-2ry}, où A, B, r sont trois constantes dont la dernière peut être nulle. Il est ainsi conduit à traiter l'équation (S) d'abord en réduisant X et Y à des constantes, puis en prenant pour X et Y deux exponentielles, ce qui donne les deux éléments linéaires

$$(m)\qquad ds^2=(au^m-bv^m)(du^2+dv^2),$$

$$(l)\qquad ds^2=(\log au-\log bv)(du^2+dv^2),$$

où a, b, m désignent des constantes arbitraires.

Le Chapitre I finit par la détermination des éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution : ils rentrent tous dans le type $(x+y)^m\,dx\,dy$.

Au Chapitre II l'équation (S) est complètement discutée et résolue. Laissant de côté les cas particuliers déjà traités, on exprime X′ et Y′ sous la forme linéaire

$$(\tau)\qquad X'=T_1X+T_2Y,\qquad Y'=T_3X+T_4Y,$$

les lettres T_i désignant des fonctions rationnelles de T et de ses quatre premières dérivées. Il suit de là que la fonction T doit satisfaire à deux équations différentielles du cinquième ordre, tellement compliquées, qu'on ne peut songer à les employer. C'est pourquoi M. Raffy procède tout autrement. Il considère les T_i comme des fonctions inconnues, sans relation entre elles, et démontre que le système (τ) admet deux solutions et deux seulement, qui sont déterminées à des constantes près. Substituant les expressions de X, Y et des T_i, qui forment ces deux solutions, dans l'équation (S), on la décompose en deux équations de Riccati, dont la discussion comporte l'examen de cas assez nombreux. La conclusion finale est que le type (m), avec ses formes dégénérées (l) et (e)

$$(e)\qquad ds^2=(e^{au}-e^{bv})(du^2+dv^2),$$

comprend tous les éléments linéaires cherchés, sans toutefois les représenter tous sous leur forme harmonique la plus générale.

Dans les recherches que nous venons de résumer, l'auteur ne s'est occupé que de déterminer des éléments linéaires jouissant de certaines propriétés assignées à l'avance. « Il y aurait assurément intérêt, dit-il, à connaître les surfaces qui correspondent à ces éléments linéaires. Mais de pareils problèmes

sont en général, comme Ossian Bonnet l'a dit, au-dessus des forces de l'analyse actuelle. Plus d'un d'ailleurs, parmi ceux que nous avons résolus, présentait déjà des difficultés considérables, qu'on pourra mesurer aux ressources mises en œuvre pour les surmonter. »

Fehr. — Remarque sur le théorème de M. Moutard. (67-68).

D'après le théorème de M. Moutard, si l'on sait intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda(x, y)\, z,$$

on peut, en général, en déduire une suite illimitée d'équations de même forme qu'on intègre par de simples quadratures. Pour que deux équations consécutives de cette suite soient les mêmes, il faut et il suffit que λ soit de la forme $f(x)\,\varphi(y)$, ainsi que le montre M. Fehr.

Zaremba. — Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique. (68-70).

Disons qu'un système de périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ d'une fonction $f(x)$ est un *système complet* si une période quelconque Ω de $f(x)$ est une fonction linéaire et homogène, à coefficients entiers, des périodes ω_i. On sait que si les ω_i vérifient p relations distinctes, linéaires et homogènes, à coefficients entiers, il existe pour $f(x)$ des systèmes complets de périodes se composant chacun de $n-p$ périodes indépendantes. L'intérêt de la démonstration que M. Zaremba donne de ce théorème consiste à fournir un procédé régulier pour calculer les systèmes complets de périodes en question.

Burkhardt. — Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension. (71-75).

Barbarin. — Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices. (76-80).

Lecornu. — Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique. (81-84).

« Quand l'expression analytique d'une accélération passe par l'infini, il est toujours possible, en modifiant un peu les données, de faire en sorte que cette expression devienne simplement très grande. On obtient alors un mouvement bien déterminé, et il est naturel de chercher comment se transforme ce mouvement, quand on revient graduellement aux données initiales.... La nature du mouvement limite dépend de la manière dont on procède pour substituer tout d'abord une force très grande à la force infinie. » Conclusion établie par l'examen de deux exemples, dont un est celui que M. Kœnigs a signalé précédemment dans le même volume.

Balitrand. — Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi. (97-102).

Picard (*Émile*). — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites. (103-106).

L'auteur considère l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x et y et se propose de déterminer celle de ses intégrales qui se réduit à $f(x)$ pour $y=0$ et à $\varphi(x)$ pour $y=x$, les deux fonctions f et φ étant arbitraires. Il montre que la méthode des approximations successives fournit pour z une série qui est convergente dans tout rectangle parallèle aux axes et comprenant l'origine, où les a, b, c ainsi que f et φ sont des fonctions déterminées et continues. Extension à la recherche de l'intégrale z qui se réduit à $f(x)$ pour $y = \alpha x$ et à $\varphi(x)$ pour $y = \beta x$, sous la condition

$$|f(x) - \varphi(x)| < \mathrm{A}\,|x|^p,$$

A et p étant des constantes positives.

Genty (*E.*). — Sur les surfaces à courbure totale constante. (106-109).

L'objet de cette Note est de retrouver simplement, par la théorie des congruences, les transformations que MM. Bianchi et Bäcklund ont découvertes pour les surfaces à courbure totale constante. L'auteur montre en effet que :

Si deux surfaces se correspondent point par point, de telle manière que la distance p des deux points soit constante et que les deux plans tangents en ces deux points contiennent la droite qui les joint et forment entre eux un angle constant θ, *les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, pour lesquelles les courbures totales sont constantes et égales à* $p^{-2}\sin^2\theta$. Pour $\theta = 90°$ on a la transformation de M. Bianchi; si θ est quelconque, on a celle de M. Bäcklund.

Adam (*Paul*). — Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux. (110-115).

Ossian Bonnet a déterminé toutes les surfaces qui jouissent de la propriété énoncée. Sa solution, fondée sur les formules de Codazzi, exige des calculs qui n'occupent pas moins de dix-sept pages. M. Adam en expose une beaucoup plus simple, qui revient à la détermination de trois fonctions U_i de u et de trois fonctions V_i de v satisfaisant à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{U}_i + \mathrm{V}_i}{u+v}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{U}_i + \mathrm{V}_i}{u+v}\right) = 0.$$

A son tour celle-ci est ramenée à la suivante

$$2(u+v)(U_i+V_i)+\sum_{i=1}^{i=3}(U_i+V_i)^2=0,$$

dont la discussion, abrégée par diverses remarques, conduit rapidement l'auteur aux formules de Bonnet

$$x=\frac{\sqrt{u(\alpha-u)}}{u+v},\qquad y=\frac{\sqrt{v(\alpha+v)}}{u+v}\cos V,\qquad z=\frac{v\sqrt{\alpha+v}}{u+v}\sin V.$$

Painlevé. — Note sur une identité entre certains déterminants. (116-119).

Raffy (*L.*). — Sur le problème général de la déformation des surfaces. (117-132).

Grâce aux travaux de M. Weingarten, on connaît aujourd'hui une série de surfaces, dont on peut trouver toutes les déformations. L'ensemble des surfaces applicables sur chacune d'elles est représentée par des formules telles que

$$dx_i = A_i\,d\alpha + B_i\,d\beta \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les x_i sont des coordonnées rectangulaires, les A_i et les B_i des fonctions déterminées de deux variables α et β, de deux fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, ainsi que de leurs dérivées successives en nombre limité. M. Raffy démontre que *quand un problème de déformation comporte une solution complète rentrant dans ce type analytique, les lignes $\alpha = const.$ et les lignes $\beta = const.$ sont nécessairement les asymptotiques des surfaces cherchées*. Cette proposition lui a suggéré, pour traiter les questions d'applicabilité, deux procédés généraux, inverses l'un de l'autre, qu'il applique successivement.

Premier procédé. — Une surface étant rapportée à ses asymptotiques (α, β) les différentielles dx_i de ses coordonnées dépendent d'après les formules de M. Lelieuvre, de trois fonctions qui vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \rho(\alpha, \beta)\theta.$$

Il s'agit de choisir ces trois fonctions de telle sorte que les dx_i rentrent dans le type considéré et que la somme de leurs carrés puisse être ramenée à la même forme, quelles que soient les deux fonctions $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$. En procédant ainsi, l'auteur retrouve les beaux résultats dus à M. Weingarten.

Second procédé. — On peut aussi partir d'un élément linéaire donné

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et chercher à intégrer les deux équations par lesquelles M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 290) a défini les coordonnées curvilignes u, v comme fonctions de α et β, paramètres des lignes asymptotiques. En effet, quand on a

trouvé une solution (u, v) de ce système, on a virtuellement déterminé (à la position et à une symétrie près) une surface qui admet l'élément linéaire considéré.

Après avoir traité, par ce second procédé, les exemples étudiés au moyen du premier, M. Raffy rapproche les deux procédés et démontre quelques propositions propres à faciliter leur emploi.

Vernier (P.). — Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (133-135).

Painlevé. — Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes. (136-184).

Dans ce Mémoire étendu, l'auteur étudie le mouvement réel d'un système matériel (S), à liaisons indépendantes du temps, soumis à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps. La proposition principale qu'il établit concerne les positions *régulières* du système ou positions dans le voisinage desquelles les coefficients des équations de Lagrange sont des fonctions régulières des k, paramètres φ_i qui définissent la position du système.

Si, t tendant vers t_1, (S) *tend vers une position régulière, ses vitesses tendent respectivement vers une limite finie. Si, t croissant indéfiniment,* (S) *tend vers une position régulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre, et toutes les vitesses tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

De ce théorème résultent diverses conséquences au sujet des trajectoires réelles; pour les énoncer, remarquons que dans tout domaine (E_k), où les coefficients des équations de Lagrange sont holomorphes, une trajectoire ne comporte que deux mouvements distincts différant seulement par le sens, mouvements *réels* si la force vive T est positive, *imaginaires* si T est négative. « Mais les mouvements imaginaires deviennent réels (et réciproquement) si l'on change t en it, ce qui revient à changer le sens de toutes les forces appliquées au système. En appelant mouvement *conjugué* du mouvement *vrai* de (S) le mouvement qui correspond aux nouvelles forces, on voit que les trajectoires réelles se divisent naturellement en *trajectoires vraies* et *trajectoires conjuguées*. Il existe un faisceau (à k paramètres) de trajectoires pour lesquelles T s'annule au moins en un point M', qui n'est pas un point d'équilibre; en ces points, dits *points d'arrêt,* le système rétrograde sur la trajectoire, qui est alors formée de segments alternativement vrais ou conjugués, séparés par les points M'; nous la nommons trajectoire *mixte*.

» Il peut exister toutefois (mais il n'existe pas, en général) des trajectoires exceptionnelles qui comportent une infinité de mouvements; ces trajectoires sont nécessairement des *géodésiques* de T, et elles dépendent au plus de $k-1$ paramètres. Elles sont dites *trajectoires remarquables*.

» Ces définitions adoptées, soit M un point de (E_k); par ce point passent une infinité de trajectoires réelles (C) tangentes à une direction quelconque donnée et qui dépendent d'une constante arbitraire; ces trajectoires sont toutes des

courbes analytiques régulières dans le voisinage de M. Elles comprennent un faisceau à un paramètre de trajectoires *mixtes* présentant dans (E_k) un point d'arrêt, une trajectoire (C) et une seule pour laquelle M est un point d'arrêt. Quand par un point M passe une trajectoire *remarquable*, elle se confond avec (C_1) ; si toutes les trajectoires (C_1) sont remarquables, elles se confondent dans (E_k) avec les trajectoires mixtes. *Il ne passe pas par le point* M *d'autres trajectoires, si le point* M *n'est pas une position d'équilibre.... Par un point d'équilibre* M, *il peut passer, en outre du faisceau régulier de trajectoires, des branches singulières de trajectoires* (C)... : en général, le système (S) tend sur (C) vers la position M, quand t croît indéfiniment dans l'un des deux mouvements vrai ou conjugué. »

L'auteur détermine aussi les conditions de temps dans lesquelles sont parcourues les trajectoires réelles, dans un mouvement soit vrai, soit conjugué et il établit, entre autres, ce théorème : *Quand les forces dérivent d'un potentiel, tout segment* (*intérieur à* E_k) *d'une trajectoire prise au hasard, est parcouru entièrement en un temps fini, dans le mouvement vrai ou conjugué. Il n'y a d'exception que pour des faisceaux particuliers de trajectoires.*

Andrade. — Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques. (186-189).

Lorsqu'un mobile, assujetti à rester sur une surface, est abandonné à lui-même avec une vitesse initiale, on sait qu'il décrit une géodésique tangente à la direction de cette vitesse. On admet parfois comme évident que, si une force vient à agir sur le mobile, sa trajectoire différera peu de la géodésique tangente à la vitesse initiale, pourvu que celle-ci ait une valeur suffisamment grande. C'est cette proposition que M. Andrade démontre en la précisant avec soin.

Appell (*P.*). — Sur le théorème des aires. (190-195).

Les observations, faites sur le chat qui tombe, ayant mis hors de doute un fait que d'aucuns croyaient contradictoire avec le principe des aires, divers auteurs ont donné soit des explications du prétendu paradoxe, soit des exemples mécaniques de faits analogues. Dans ce dernier ordre d'idées, il faut imaginer un système sollicité par des forces extérieures telles que la somme de leurs moments par rapport à un axe fixe Oz soit nulle, et partant du repos, en sorte que la somme des aires décrites par les projections de ses divers points sur un plan perpendiculaire à Oz sera constamment nulle; puis faire passer ce système par des déformations successives qui le ramènent à une configuration identique à sa configuration première, et déduite de celle-ci par une rotation autour de Oz.

M. Appell indique une manœuvre d'ouvriers placés sur une roue, mobile sans frottement sur un plan horizontal, manœuvre après laquelle le système formé de la roue et des ouvriers a repris la même configuration, mais a tourné d'un certain angle. Il généralise ensuite cet exemple et applique la théorie au cas de la roue et des ouvriers.

Picard (Émile). — Sur la rotation d'un système déformable. (195-197).

Exemple d'un système, partant du repos, pouvant par le seul travail des forces intérieures, tourner d'un angle quelconque autour de son centre de gravité, tous ses points se retrouvant à la fin de la rotation dans les positions relatives qu'ils occupaient primitivement.

C'est l'exemple, aussi simple que possible, d'après lequel M. Marcel Deprez a construit un appareil qui montre le phénomène. M. Picard, qui l'a imaginé, en donne ici la théorie et indique une autre forme, tout à fait théorique, de l'expérience : un homme debout sur un plan horizontal poli, étend les bras, et fait décrire à ses mains deux courbes fermées, situées dans un plan horizontal; il pourra, de la sorte, prendre un mouvement continu de rotation.

D'Ocagne. — Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler. (197-204).

Adam (Paul). — Sur l'équation d'Euler et sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde. (205-208).

Nouvelle intégration géométrique de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

L'auteur y est conduit en cherchant les lignes de courbure d'un ellipsoïde rapporté aux coordonnées tangentielles imaginaires d'Ossian Bonnet. Si α, β désignent ces paramètres, a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, et si l'on pose

$$(1) \qquad \frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)} = \frac{k^2+1}{2k}\quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \sqrt{k},$$

ce qui donne pour k une valeur positive et moindre que l'unité, moyennant l'hypothèse $a > b > c$, l'équation différentielle des lignes de courbure coïncide avec l'équation d'Euler. Or, ces lignes de courbure sont situées sur les quadriques homofocales de l'ellipsoïde. D'où l'intégrale

$$(2) \qquad \frac{a^2k(x+y)^2}{a^2+\lambda} - \frac{b^2k(y-x)^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2(kxy-1)^2}{c^2+\lambda} = 0,$$

où λ désigne la constante arbitraire.

Vessiot. — Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique. (208-216).

On peut généraliser la méthode de transformation des figures par projection, en prenant comme projetantes les droites d'une congruence linéaire. Cette *perspective quadratique,* comme l'appelle l'auteur, correspond à la transformation quadratique birationnelle des figures planes comme la projection conique, ou *perspective linéaire,* correspond à la transformation linéaire de ces figures. On a, en effet, ce théorème : *Toute transformation birationnelle*

du second degré s'obtient par une perspective quadratique associée à une perspective linéaire.

Après avoir employé la perspective quadratique pour faire correspondre les points de deux plans, M. Vessiot indique qu'on peut s'en servir aussi pour établir une correspondance entre les points de figures tracées dans l'espace. Il en déduit, en particulier, une solution simple de ce problème : *Faire correspondre birationnellement à une courbe algébrique plane, n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes, une courbe algébrique gauche sans points singuliers.* De là résulte une nouvelle démonstration de ce théorème connu : *Toute courbe algébrique plane, n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes peut être transformée, par une transformation birationnelle, en une courbe algébrique plane n'ayant pas d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes.* L'auteur y ajoute celui-ci : *Toute courbe algébrique plane est la perspective d'une courbe gauche n'ayant aucun point singulier, et la perspective linéaire de celle-ci n'a que des points doubles à tangentes distinctes, si le point de vue est convenablement choisi.*

Laisant. — Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace. (217-219).

Nouvelle démonstration et généralisation de ce théorème, dû à l'auteur : *Si un point matériel* M, *animé de la vitesse* MV *et soumis à la force* MF, *satisfait à la loi des aires par rapport à un point fixe* O, *c'est-à-dire si les aires décrites par* OM *sur la surface du cône de sommet* O *sont proportionnelles aux temps, les deux plans* OMV, OMF *sont constamment perpendiculaires.*

Mannheim. — Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice. (219-220).

En un point M d'une surface (S), les rayons de courbure des courbes de contour apparent de (S), obtenues sur des plans menés par la normale à (S) en M au moyen de projetantes respectivement perpendiculaires à ces plans, sont proportionnels aux carrés des distances de M aux tangentes de l'indicatrice de (S) en ce point, tangentes qui sont parallèles à ces projetantes.

Genty (E.). — Note sur la déformation infinitésimale des surfaces. (221-227).

M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (B) sont *associées* lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué.

La surface (A) étant donnée, la recherche des surfaces associées (B) dépend d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. M. Genty prouve que toute solution de cette équation fait connaître : 1° une surface (B) associée à (A); 2° deux surfaces (M) et (N) correspondant respectivement à (A) et (B) par orthogonalité des éléments; 3° quatre couples de surfaces

applicables; 4° une déformation infinitésimale pour chacune des surfaces (A), (B), (M) et (N).

De plus, au réseau conjugué commun aux deux surfaces associées (A) et (B) correspondent les asymptotiques des surfaces (M) et (N).

Aux asymptotiques de (A) correspondent : les réseaux conjugués des surfaces (B) et (N) qui restent conjugués dans la déformation infinitésimale de ces surfaces; un réseau conjugué sur (M) : les asymptotiques de la surface (N_1) associée à (N).

En terminant, M. Genty retrouve ce théorème de Ribaucour : *Considérons une déformation infinitésimale d'une surface* (A) *et par chaque point* A *de* (A) *menons, dans le plan tangent à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point* A *dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.*

Cahen. — Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler. (227-229).

L'auteur établit que l'expression

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}-\frac{n^{1-s}-1}{1-s}$$

tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite, savoir

$$\zeta(s)+\frac{1}{1-s},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction de Riemann. Pour $s=1$ cette limite se réduit à la constante C d'Euler, en vertu du développement connu

$$\zeta(s)+\frac{1}{1-s}=\mathrm{C}+\mathrm{A}(s-1)+\mathrm{B}(s-1)^2+\ldots.$$

Cartan. — Sur un théorème de M. Bertrand. (230-234).

Toute fonction rationnelle de n lettres ($n \lesseqgtr 4$), qui n'est ni symétrique, ni alternée, prend au moins n valeurs distinctes, lorsqu'on y permute ces lettres. Telle est la proposition célèbre que M. Cartan démontre à nouveau, en ne supposant connues que les notions de substitutions, de produit de substitutions et de groupes de substitutions. Il s'appuie sur deux lemmes connus qu'il établit d'une façon élémentaire :

1° *Si* F *est une fonction rationnelle des* n *lettres* $a, b, \ldots, l$, *prenant* p *valeurs distinctes lorsqu'on y permute ces lettres, il existe un système de* $1.2.3\ldots n : q$ *permutations distinctes de* p *lettres, où* q *désigne le nombre des substitutions d'un groupe de* n *lettres invariant dans le groupe symétrique, et de plus on a les inégalités*

$$p \leqq \frac{1.2\ldots n}{q} \leqq 1.2\ldots p;$$

2° *Si n est différent de 4, il n'y a pas d'autre groupe invariant dans le groupe symétrique que la substitution identique et le groupe alterné.*

Carvallo. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique. (234-240).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - k^2 U + F(x, t),$$

qui se réduit à l'équation dite *des télégraphistes,* quand on suppose

$$F = 0, \qquad a^2 = -k^2 = 1.$$

M. Carvallo suppose que la fonction F se réduit à zéro pour toute valeur négative de t et que, pour $t = 0$, la fonction U et sa dérivée première par rapport à t sont nulles. Il cherche à satisfaire à l'équation proposée, ainsi qu'aux conditions ci-dessus, en posant

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r)\, d\xi,$$

et désignant par r la valeur absolue de la distance du point x au point ξ variable dans le champ de l'intégration; il démontre, chemin faisant, que *l'ébranlement* U *se propage avec la vitesse a,* résultat obtenu par M. Poincaré pour l'équation des télégraphistes, et conclut ainsi :

f est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 f = 0,$$

qui satisfait aux conditions

$$f(t, at) = 0, \qquad \left[\frac{\partial f(t, r)}{\partial r}\right]_{r=0} = -\frac{1}{2a^2} F(t).$$

La méthode employée par l'auteur s'étend d'abord à l'espace à trois dimensions, puis à des cas où les équations du mouvement renfermeraient des termes proportionnels aux vitesses.

Frolov (M.). — Sur les racines primitives. (241-245).

Complément du Mémoire inséré sous le même titre dans le Tome précédent du même Recueil.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. IX, 1894 (1).

Elliot. — Sur les cas d'intégrabilité du mouvement d'un point dans un plan. (9-22).

Le Mémoire de M. Elliot est relatif à un problème particulier, qui relève à la fois de deux théories dues, l'une à M. Bertrand, l'autre à M. Liouville. M. Bertrand avait considéré les problèmes où, le mouvement d'un point matériel étant produit par des forces qui dérivent d'un potentiel, il existe, outre l'intégrale des forces vives, une autre intégrale du second degré par rapport aux composantes des vitesses (intégrale quadratique). Liouville avait antérieurement indiqué un cas étendu où le mouvement d'un point peut être déterminé par des quadratures : dans ce cas il existe une intégrale quadratique. La méthode aujourd'hui classique de Jacobi rend ce résultat intuitif, l'équation du problème prenant alors la forme

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y_1}\right)^2 = \varphi(x_1) + \psi(y_1),$$

qui permet d'obtenir une intégrale complète par séparation des variables.

M. Elliot se propose d'abord de trouver toutes les fonctions U de x et y telles qu'un changement de variables approprié

$$x_1 = A(x, y), \qquad y_2 = B(x, y)$$

transforme l'équation de Jacobi

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 2U,$$

en une autre du type ci-dessus. Il arrive à cette conclusion : le problème ne comporte pas d'autres solutions que celles que Liouville avait fait connaître. C'est ce qui résulte avec évidence d'un théorème beaucoup plus général démontré par M. G. Morera (*Atti della R. Accad. di Torino,* t. XVI, 1880-1881, p. 276) et qui explique le peu de succès du procédé d'intégration employé par Jacobi : « Pour que l'équation de Jacobi, relative au mouvement d'un point sur une surface, sous l'action de forces dérivant d'un potentiel, s'intègre par séparation des variables, il faut que l'élément linéaire de cette surface soit réductible à la forme

$$[\varphi(q_1) + \psi(q_2)](dq_1^2 + dq_2^2),$$

(1) Voir *Bulletin,* XX_2, p. 21.

et que le potentiel ait pour expression

$$\frac{\varphi_1(q_1) + \psi_0(q_2)}{\varphi(q_1) + \psi(q_2)},$$

ce qui est précisément le cas étudié par Liouville. »

Au cours de son analyse, M. Elliot trouve l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction des forces pour qu'il existe une intégrale quadratique.

M. Bertrand avait déduit de cette équation les intégrales particulières qui correspondent aux cas où les forces ne dépendent que des distances du mobile à des points fixes du plan. Dans la seconde Partie de son travail, l'auteur étend la méthode de M. Bertrand aux cas où les forces dépendent des distances du mobile à des droites fixes du plan.

Si l'on considère des forces, dont les intensités ne soient pas indépendantes les unes des autres, on peut trouver, comme le montre M. Elliot, de nouveaux cas où la méthode de Jacobi est applicable. Tel est, par exemple, celui d'un mobile sollicité simultanément par les forces suivantes : 1° une force constante parallèle à Oy; 2° une force perpendiculaire à Oy et inversement proportionnelle au cube de la distance; 3° une force dirigée vers l'origine en raison inverse du carré de la distance; 4° une force hy émanant de Ox; 5° une force $-h_1 x$ émanant de Oy; 6° une force dirigée vers l'origine et ayant pour expression $(h + 4h_1)\frac{r}{3}$.

Weill. — Sur les substitutions orthogonales à déterminant — 1. (22-36).

Kluyver. — Évaluation des intégrales et des fonctions elliptiques au moyen de la transformation du second degré. (38-73).

Les méthodes usuelles d'évaluation des intégrales et des fonctions elliptiques sont fondées sur le développement en série. Une autre méthode, plus élémentaire et qui, dans une foule de cas, conduit à des calculs remarquablement rapides, est une simple application de la transformation du second degré.

Toutefois, les formules auxquelles conduit cette dernière méthode continuent, dans les traités, à être adaptées aux notations anciennes de Legendre et de Jacobi. M. Kluyver montre quels changements il faut y apporter quand on fait usage des notations de Weierstrass.

Cahen. — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur les fonctions analogues. (74-164).

Dans son célèbre Mémoire *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée,* Riemann a considéré la fonction uniforme $\zeta(s)$ qui, pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à 1, est représentée par la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Les séries de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ sont dans un rapport étroit avec les séries de la forme $\sum a_n e^{-ns}$, et ces deux types de séries sont des cas particuliers du type $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, les λ_n croissant indéfiniment avec n.

C'est sur ces dernières séries, déjà étudiées brièvement par Kronecker, que porte le travail de M. Cahen. L'auteur démontre l'existence d'une droite de convergence, dont il détermine l'abscisse au moyen des coefficients de la série.

Il cherche ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(s)$ soit développable en série de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$. Il énonce un théorème relatif à la multiplication de ces séries. Enfin, il applique ces résultats aux séries de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ et donne de ces dernières quelques applications arithmétiques immédiates. Ces divers résultats font l'objet du premier Chapitre.

Dans le Chapitre II, l'auteur rappelle, en y ajoutant quelques corollaires de nature arithmétique, les résultats obtenus par Riemann relativement à la fonction $\zeta(s)$.

Étant conduit à étudier la fonction

$$\chi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

introduite par Schlömilch, M. Cahen montre qu'on peut en faire une théorie complètement analogue à celle de $\zeta(s)$.

Dans le Chapitre III est indiquée une nouvelle généralisation : $\zeta(s)$ et $\chi(s)$ ne sont que des cas particuliers des séries $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$ dans lesquelles les coefficients α_n se reproduisent périodiquement de p en p.

Dans le cas où p est premier, il y a $p-1$ séries indépendantes de la forme indiquée. On peut précisément en choisir $p-1$ qui jouissent d'une relation fonctionnelle analogue à celles de $\zeta(s)$ et $\chi(s)$. En particulier, on obtient les séries

$$\sum \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{n^s},$$

$\left(\frac{n}{p}\right)$ étant le caractère quadratique de n par rapport à p.

En étudiant les zéros de ces fonctions, M. Cahen est conduit à des fonctions holomorphes analogues à la fonction $\xi(t)$ que Riemann rattache à $\zeta(s)$. Il emploie pour cela une méthode générale qui, d'une relation fonctionnelle relative à une série de la forme $\sum \frac{\alpha_n}{n^s}$, permet d'en déduire une relative à une série de la forme $\sum a_n e^{-nx}$.

L'auteur termine par quelques applications de cette méthode générale à d'autres fonctions.

La relation relative à la série $\sum \alpha_n e^{-nx}$, jointe à la relation

$$\sum \alpha_n e^{-n(x+2ia)} = \sum \alpha_n e^{-nx},$$

permet d'en trouver une infinité d'autres. D'ailleurs ces fonctions sont de celles qu'on rencontre dans la théorie des fonctions modulaires.

Greenhill. — Les modules dans la multiplication complexe des fonctions elliptiques. (165-248).

Ce Mémoire, traduit de l'anglais par M. L. Laugel, est extrait des *Proceedings of the London Math. Society*, vol. XIX, n°s 323-327, mars 1888.

Grévy. — Étude sur les équations fonctionnelles. (249-323).

Le point de départ de cette étude est une proposition de M. Kœnigs relative à une fonction $\varphi(z)$, uniforme à l'intérieur d'une région R et jouissant de la propriété suivante : si z est l'affixe d'un point intérieur à R,

$$z_1 = \varphi(z), \qquad z_2 = \varphi(z_1), \qquad z_3 = \varphi(z_2), \qquad \ldots$$

sont également les affixes de points tous intérieurs à cette région.

D'après cette proposition, la suite $z_1, z_2, \ldots, z_p$ converge régulièrement vers une limite x qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point essentiel; x est une racine de la fonction $\varphi(z) = z$, et cette racine doit vérifier l'inégalité

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Réciproquement, soit x une racine de $\varphi(z) - z$ vérifiant l'inégalité $|\varphi'(x)| < 1$; le point d'affixe x est centre d'un cercle C_x, à l'intérieur duquel : 1° $\varphi(x)$ est holomorphe; 2° le module de $\dfrac{\varphi(z) - x}{x - z}$ reste constamment inférieur à l'unité et diffère même de l'unité d'une quantité qui reste finie.

La question que se pose M. Grévy est celle-ci :

Soit $\varphi(z)$ une fonction de transformation et x un point limite à convergence régulière; chercher s'il existe une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle C_x et satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$p_0(z) f(z_0) + p_1(z) f(z_1) + \ldots + p_n(z) f(z_n) = 0,$$

dans laquelle $p_0, \ldots, p_n$ sont des fonctions holomorphes dans le cercle C_x.

La recherche de telles fonctions repose sur le théorème suivant :

Si le coefficient $p_0(z)$ ne s'annule pas au point x, et si l'on a la relation

$$p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_n(x) = 0,$$

si, de plus, il n'existe aucune relation de la forme

$$p_0(x) + p_1(x)\varphi'^{\alpha}(x) + p_2(x)\varphi'^{2\alpha}(x) + \ldots + p_n(x)\varphi'^{n\alpha}(x) = 0,$$

α étant un entier positif, l'équation fonctionnelle admet une solution holomorphe

dans le domaine du point x et ne s'annulant pas en ce point; sa valeur en ce point est d'ailleurs arbitraire.

Maltézos. — Les enveloppes solides minces, les cloches. (325-375).

C'est Poisson qui, le premier, a donné la théorie de l'équilibre et du mouvement vibratoire des plaques planes homogènes et isotropes, en admettant que les forces élastiques et les déformations sont développables en séries convergentes suivant les puissances de la variable qui donne la distance d'un point quelconque de la plaque à la courbe moyenne; en gardant les deux premiers termes de ces développements, Poisson arrive aux vraies équations indéfinies.

La légitimité du développement en série étant contestable, Kirchhoff a proposé une autre méthode : il admet que chaque droite primitivement normale aux couches de la plaque reste droite et normale aux couches après la déformation. Mais ceci n'est plus exact quand la texture de la plaque est quelconque.

M. Boussinesq suppose les plaques formées de couches sensiblement planes et parallèles, et dont la contexture constante ou assez lentement variable d'un point à l'autre d'une même couche peut changer brusquement d'une couche à l'autre. Sans autre hypothèse, il retrouve les équations de Poisson et de Kirchhoff en première approximation. Revenant plus tard sur ce sujet, il a donné les équations de seconde approximation de l'équilibre élastique des plaques.

Quant aux conditions du contour, elles avaient été trouvées par Poisson et Cauchy au nombre de trois. Kirchhoff a montré qu'elles se réduisaient à deux.

Les premières notions sur le mouvement vibratoire des enveloppes minces se trouvent dans la *Théorie mathématique de l'élasticité* de Lamé.

En 1874, Aron appliqua à la question des enveloppes la méthode cinématique de Gerhing relative aux plaques.

En 1881, Lord Rayleigh a étudié brièvement la déformation d'une surface de révolution, en admettant sans preuves suffisantes qu'une ligne tracée sur cette surface a la même longueur avant et après la déformation.

En 1882, Émile Mathieu donne une théorie générale des cloches en faisant les mêmes hypothèses que Poisson avait faites sur les plaques. Il trouva pour le travail des forces élastiques une expression de la forme $-\mu(A\varepsilon + B\varepsilon^3)$, ε étant l'épaisseur de l'enveloppe. Admettant que les vibrations tangentielles d'une cloche vibrante sont, en général, du même ordre que les vibrations normales, il put négliger le terme $B\varepsilon^3$ devant $A\varepsilon$.

En 1888, M. Love, faisant usage de la méthode cinématique de Gerhing, trouva une expression de la même forme que celle de Mathieu et négligea également $B\varepsilon^3$ devant $A\varepsilon$.

Mais Lord Rayleigh fit observer qu'en raison de la grande énergie potentielle qui accompagne l'extension, c'est au contraire le terme $A\varepsilon$ qui est négligeable et le terme $B\varepsilon^3$ qu'il faut conserver.

Reprenant la question au double point de vue physique et expérimental, M. Maltézos trouve que ces deux termes sont du même ordre de grandeur et, par conséquent, doivent être conservés l'un et l'autre.

L'auteur cite encore un travail de M. Basset, qui, le premier, a introduit dans le calcul la notion de la variation de l'aire de l'élément quand on passe de la surface moyenne à une autre.

2ᵈᵉ Partie.

Aucun des prédécesseurs de M. Maltézos n'a touché le problème des enveloppes quelconques d'épaisseur variable.

Guidé par la théorie des plaques de M. Boussinesq, M. Maltézos fait, sans hypothèse douteuse, la théorie générale des enveloppes solides minces, d'épaisseur continuellement variable d'un point à l'autre.

Des équations auxquelles il parvient, on tire aisément celles qui régissent l'équilibre et le mouvement des enveloppes homogènes, isotropes, d'épaisseur variable ou constante.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (¹). — 3ᵉ série.

Tome XIV, 1895.

Vaschy. — [R6] (²) Sur la définition des masses et des forces. (5-10).

L'auteur fait observer qu'au début même de l'enseignement de la Dynamique, on donne la définition de la force après l'énoncé de trois principes fondamentaux. Il montre que l'on oublie de définir le rapport des forces appliquées à des points matériels différents, et qu'il serait plus naturel de commencer par définir la notion de masse. C'est ce que l'auteur fait ici en partant de la loi de Newton.

Bourlet (*C*.). — [O6*f*] Remarque sur la surface dont tous les points sont des ombilics. (10-13).

L'auteur se propose l'intégration directe du système d'équations simultanées qui définit la surface cherchée :

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Utilisant les résultats obtenus dans un Mémoire antérieur (*Ann. scient. de l'École Normale supérieure*, 1891), il montre que toutes les dérivées du troisième ordre de z peuvent être exprimées en fonction de p, q, t. Il en déduit facilement l'intégrale générale, qui est l'équation d'une sphère.

Varicak (*V*.). — [F2*g*] Note éclaircissant la définition des fonctions elliptiques d'après G.-H. Halphen. (14-20).

(¹) Voir *Bulletin*, XVII₂, p. 204; XIX₂, p. 117; XX₂, p. 47.

(²) Les indications entre crochets sont celles de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Génération et propriétés de la courbe algébrique du quatrième degré, dont les secteurs peuvent servir à la représentation géométrique des arguments des fonctions elliptiques. R désignant le rayon d'un cercle fixe, et δ la distance du centre à un point C, intérieur au cercle et pris pour origine, cette courbe a pour équation

$$R^2(x^2+y^2)^2-\delta^2(x^2+y^2)y^2=R^2(R+\delta)^2.$$

Kagan (*H.*). — [Q1*b*] Démonstration nouvelle des équations fondamentales de la Géométrie de l'espace de courbure constante négative. (20-30).

Démonstration, basée sur un seul théorème, des formules trigonométriques et de l'équation fondamentale de la Géométrie de Lobatcheffsky.

Cazamian (*A.*). — [K9*a*] Sur le théorème de Carnot. (30-40).

Déduction, par la méthode des figures polaires réciproques relatives à un cercle, des propriétés du polygone sur chacun des côtés duquel se trouve un même nombre de points liés par une relation segmentaire, dite *relation de Carnot*. Application au triangle. Théorèmes de Ménélaüs et de Jean de Céva. Extension à un théorème énoncé et démontré algébriquement par M. L. Ravier (même *Journal*, 1892). Applications aux triangles homologiques. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Ferrari (*F.*). — [K9*a*] Théorèmes sur les transversales. (41-48).

Nouvelle étude du théorème de M. Ravier (voir *loc. cit.*, 1892), et énoncé de diverses propositions qui s'en déduisent et qui peuvent être étendues à des polygones gauches. Relations entre une surface de deuxième classe et un quadrilatère gauche ou un pentagone gauche.

Blazeievski (*R.*). — [K1*b*α] Sur un problème de Géométrie plane. (49-55, 385-391, 442-446).

L'auteur a employé les ressources d'une analyse ingénieuse et savante à la discussion d'un problème qui a préoccupé depuis longtemps bien des mathématiciens, la détermination d'un triangle par ses trois bissectrices intérieures w_1, w_2, w_3. Pris dans sa généralité ou moyennant certaines hypothèses particulières, ce problème a été traité par MM. F.-J. Van den Berg et Barbarin. On le trouve énoncé, il y a près d'un siècle, dans le *Ladie's Diary*, et dans le premier Volume des *Nouvelles Annales* (1842, p. 86). O. Terquem observait que ce problème présentait une extrême difficulté, qu'il attribuait à l'intervention de solutions se rapportant probablement aussi aux bissectrices extérieures. M. R. Blazeievski a repris la question et en a exposé une solution analytique (*Ibid.*, 28-40, 1894) dans laquelle il a été amené à considérer les équations de trois hyperboles dont un certain paramètre dépend de l'inconnue D, diamètre du cercle inscrit au triangle.

Le détail des éliminations et des transformations a été poussé assez loin

pour que le problème puisse être considéré comme résolu. L'auteur montre que l'équation en D ne doit pas dépasser le douzième degré.

Ballue (*E.*). — [K13*a*] Une nouvelle définition du plan. (56-58).

L'auteur se propose d'établir une définition du plan, indépendante de la notion de situation, sur cette surface, de la droite tout entière qui passe par deux points du plan.

Sintsof (*D.*). — [O4*d*] Note sur l'équation différentielle des surfaces réglées. (58-61).

Démonstration ayant pour objet de parvenir à mettre cette équation sous forme de déterminant égal à un certain trinome

$$\Delta \begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = t\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 - 2s\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right) + r\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)^2,$$

Δ désignant $rt - s^2$.

Capelli (*A.*). — [B1*c*] Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique. (62-63).

Ces sortes de déterminants peuvent se développer à l'aide de déterminants de même forme, ne dépendant que d'une seule des deux variables.

Lemaire (*J.*). — [L[1]18*d*] Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1894. (63-70).

Propositions diverses relatives à une famille des coniques représentée par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a-b)y = 0,$$

a, b désignant deux constantes et λ un paramètre variable.

Musso (*G.*). — [I23*a*] Sur les réduites des fractions continues symétriques. (70-73).

Rectification à une proposition énoncée par Ed. Lucas à la page 453 de sa *Théorie des nombres*.

Fehr (*H.*). — [B12*c*] Sur l'emploi de la multiplication extérieure en Algèbre. (74-79).

L'auteur se propose d'adapter la notion de produit symbolique à la résolution

d'un système d'équations linéaires, et à l'élimination d'après Sylvester. Il termine par un exposé de la notion d'invariance d'une forme algébrique.

Cet Article fait naturellement suite aux lumineux exposés de la multiplication extérieure et des principes de la méthode de Grassmann, par M. Carvallo (Volumes de 1891 et de 1892). Le même sujet, en Géométrie, a été traité dans le présent Recueil, par M. F. Caspary (*Bulletin*, 222-242; 1887).

Barisien (*E.-N.*). — [O2qα] Sur les podaires successives d'une courbe. (89-94, 157-164, 207-213, 233-244, 463-471).

Établissement et recherche de formules ayant pour objet la quadrature et la rectification des podaires successives d'une courbe, sans avoir à connaître les équations de ces podaires.

Voici les principales subdivisions de cette monographie.

Aire de la $m^{\text{ième}}$ podaire. Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire. Rectification de la $m^{\text{ième}}$ podaire. Aire des anti-podaires successives de la courbe donnée. (L'auteur appelle *anti-podaire* une courbe telle que sa podaire soit la courbe donnée; cette désignation est équivalente à celle de podaire négative.) Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Rectification de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Aire de la podaire de la développée de la courbe. Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{\text{ième}}$ podaire. Aire de la podaire de la développée de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. Applications : 1° à l'ellipse et à ses podaires du centre; 2° à la parabole et à ses podaires du sommet; 3° au cercle et à ses podaires par rapport à un point de la circonférence du cercle; 4° à la lemniscate de Bernoulli et à ses podaires du centre; 5° aux courbes de la famille $r^m = a^m \cos m\theta$ (spirales sinusoïdes).

Une Note ajoutée ultérieurement est consacrée à la détermination de l'aire de la podaire de la seconde développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire d'une courbe avec application à la cardioïde, à l'ellipse, à la développante de cercle, à la spirale logarithmique et à la spirale d'Archimède.

Barrieu (*P.*). — [I2a] Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables. (95-101, 165-173, 214-232).

Dans l'exposé de cette théorie classique, l'auteur a pour but d'appliquer sa démonstration à tous les nombres commensurables, entiers ou fractionnaires.

Farjon (*F.*). — [Q2] Note de Géométrie. (101-108).

Appelant *centre concourant* du réseau (ab) un point quelconque d'une droite déterminée par deux points distincts a et b, l'auteur montre comment cette notion, établie pour des réseaux de plusieurs points du plan, peut servir à étudier les propriétés géométriques des hyperespaces.

Cazamian (*A.*). — [M³5d] Sur quelques propriétés des cubiques gauches. (108-111).

Corrélation entre les cubiques gauches et les cubiques unicursales, en par-

tant de diverses propriétés, signalées par Chasles, par M. Astor et dans des travaux de l'auteur.

D'Ocagne (*M.*). — [O2q2] Sur le centre de courbure des podaires. (111-112).

Énoncé d'une proposition géométrique donnant une construction très simple du centre de courbure demandé.

Leinekugel (*G.*). — [L¹18d] Solution géométrique de la question proposée au Concours d'admission à l'École Centrale en 1889. (112-116).

Lieu des foyers et des sommets et propriétés diverses de paraboles passant par un point fixe du plan et admettant pour directrice une droite donnée.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1895). — Programme des questions d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites; sujets de leçons. (116-120).

Concours d'admission a l'École navale en 1894. — Énoncés des compositions. (121-123).

Concours général de 1894. — Énoncés des compositions. (123-131).

Concours d'admission a l'École spéciale militaire en 1894. — Énoncés des compositions. (132-133).

D'Ocagne (*M.*). — [J2e] Sur la combinaison des écarts. (133-137).

Prenant pour hypothèse la loi de probabilité sous la forme que lui a donnée Gauss, l'auteur expose une démonstration du théorème fondamental relatif à la combinaison des écarts. Le carré de l'écart (probable, moyen quadratique, moyen) résultant est égal à la somme des carrés des écarts (probables, moyens quadratiques, moyens) composants.

Caron (*J.*). — [O5f] Sur le rayon de courbure de la projection d'une courbe. (138-141).

Démonstration et utilisation de la propriété ci-après énoncée : Étant donnée une droite tangente à une surface du second degré, en un point du contour apparent horizontal dans l'espace; si, par cette droite, on mène une série de plans sécants, toutes les sections en projection horizontale sont osculatrices.

Bossut (*L.*). — [T2*a*] Note relative à la théorie mathématique de l'élasticité. (141-145).

λ, μ, ν étant trois angles tels que l'on ait la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

les coordonnées d'un point M de l'ellipsoïde peuvent être représentées par les expressions $x = a\cos\lambda$, $y = b\cos\mu$, $z = c\cos\nu$. Les quantités λ, μ, ν sont appelées ordinairement *coordonnées angulaires* ou paramètres circulaires du point M. Elles ont une interprétation mécanique remarquable, intimement liée à la théorie mathématique de l'élasticité.

Leinekugel (*G.*). — [L[1] 17*e*] Généralisation et solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Normale en 1889. (146-151).

Détermination de certains points d'une parabole donnée, satisfaisant à une condition particulière. La discussion de ce problème fait intervenir une courbe du sixième degré ayant pour équation

$$27y^2(x^2+1)^2 = (2x^2+y^2-2)^3.$$

Maillet (*E.*). — [H12*d*] Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible. (152-157, 197-206).

Considérations ayant pour objet de reprendre, de développer et de présenter sous une autre forme certains critères de réductibilité d'une loi de récurrence pour une suite donnée, sujet déjà traité en tous détails par M. d'Ocagne dans un Mémoire sur les suites récurrentes, publié en 1894 dans le *Journal de l'École Polytechnique.*

Leinekugel (*G.*). — [L[1] 17*a*] Note de Géométrie. (173-175).

Propriété d'une parabole variable ayant son foyer au centre d'une conique donnée, et telle que deux des tangentes communes se coupent sur une droite fixe.

Picard (*E.*). — [R1*b*] Sur deux théorèmes classiques de Cinématique. (177-183).

Démonstration des deux théorèmes fondamentaux de la cinématique des systèmes invariables : mouvement d'un plan sur un plan, et glissement de deux surfaces réglées l'une sur l'autre.

Saint-Germain (*A. de*). — [R6*a*γ] Sur le théorème de la conservation des aires. (184-187).

Contribution à des remarques faites déjà par MM. Guyou, Maurice Lévy, Appell, Picard, à la suite d'expériences de M. Marey sur la façon dont un chat

retombe sur ses pattes. Ces expériences, en contradiction apparente avec le principe de la conservation des aires, ont montré la nécessité de préciser l'énoncé de ce principe lorsqu'il s'agit d'êtres animés ou de systèmes déformables. A cette occasion, M. Lévy a inventé un appareil de démonstration. L'auteur imagine ici un autre dispositif qui permettrait à un homme de s'imprimer un mouvement de rotation sans intervention de force extérieure.

Tarry (*G.*). — [Q4*a*] Le problème des labyrinthes. (187-190).

Énoncé et démonstration d'une règle très simple, ayant pour objet de prouver que tout labyrinthe peut être parcouru en une seule course, en passant deux fois en sens contraire par chacune des allées, sans qu'il soit nécessaire d'en connaître le plan.

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — [O2*q*α] Constructions du centre de courbure d'une podaire. (190-192).

Démonstration géométrique de la proposition énoncée par M. d'Ocagne (p. 112).

Cazamian (*A.*). — [M¹5*c*α] Sur les applications des propriétés de la strophoïde. (192-196).

Énoncé de plusieurs propositions relatives à la strophoïde (oblique) et aux familles de coniques ayant certaines corrélations avec cette courbe.

Goursat (*E.*). — [K20*b*] Sur une application de la formule de multiplication des arcs. (245-248).

Trouver tous les arcs commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle du second degré.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1894. — Énoncés des compositions. (249).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895. — Énoncés des compositions. (250-251).

Kagan (*B.*). — Note sur une formule bien connue de la Géométrie imaginaire. (251-258).

Propriété du triangle rectiligne dans l'espace hyperbolique. Examen de ce qu'elle devient quand la courbure négative de l'espace tend vers zéro.

Varicak (*V.*). — [B12*a*] Remarque sur la valeur de i^i. (258-262).

L'auteur rappelle que, dans l'*Algèbre* d'Euler, on trouve $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Dans la

Géométrie de position, M. Mouchot ajoute que l'on peut déduire de cette formule l'égalité $-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}$, mais que ce résultat a été contesté par M. Vallès, parce qu'il résulterait de ces deux formules $e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0$, ou $e^{\pi} = -1$, conséquence absurde. Une discussion sur le même sujet s'est élevée déjà entre MM. Vallès et Catalan (*Nouvelles Annales*, 1869, 456-458 et 1870, 20-26 et 92). Plus récemment, dans le même journal, M. J. Évrard, rendant compte de la *Théorie des acceptions* de feu l'abbé George, a signalé une formule différente : $i^i = e^{\frac{\pi}{2} i^2}$ (1892, 103-113). Il est intéressant de rappeler ces résultats contradictoires et d'en rechercher la véritable origine. *Voir*, ci-après, les remarques de M. G. Tarry.

D'Ocagne (*M.*). — [O5*d*] Sur la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement. (262-264).

Le produit de la courbure en M de la section normale faite dans la surface S par la génératrice M*m* du cylindre projetant, par la courbure en *m* du contour apparent, est égal à la courbure totale de la surface S en M.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1895. — Énoncés des compositions. (264-266).

Correspondance. — M. Fouret : Remarques relatives à la solution géométrique de la composition mathématique donnée au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1895, ayant trait à la génération d'une certaine surface du troisième ordre. (266-268).

Tarry (*G.*). — [B12*a*] Sur les exponentielles imaginaires. (269-272).

Cet Article vient très naturellement compléter une recherche tentée précédemment par M. Varicak.

L'auteur avait relevé les mêmes divergences entre les résultats donnés par M. Vallès, en 1876, et par M. Mouchot en 1892 (*Nouvelles bases de la Géométrie supérieure*, p. 174). Les résultats de M. Vallès, avons-nous dit, avaient déjà préoccupé l'attention de M. Catalan, mais les deux contradicteurs ne semblent pas s'être mis d'accord. M. G. Tarry fait voir que le résultat de M. Vallès est dû à l'omission d'une parenthèse.

Sée (*R.*). — [L¹ 15*f*] Problème du Concours général de 1894. (272-280).

Génération d'une certaine enveloppe Σ que, par considérations géométriques, on reconnaît être la perspective d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

Lemaire (*J.*). — [L[1] 18*d*] Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'Agrégation en 1894. (280-291).

Lieu géométrique basé sur les propriétés d'un faisceau d'hyperboles équilatères définies par certaines conditions. Discussion des diverses formes de la courbe obtenue, qui a pour équation

$$(x - a - b)(x^2 + y^2) + abx = 0.$$

Meyer. — [L[1] 18*b*] Étude sur un faisceau de coniques. (291-297).

Cet Article a pour objet d'établir comment on peut étendre à un faisceau de quatre coniques certaines propriétés bien connues du système de deux coniques.

Cazamian (*A.*). — [M[1] 5*a*] Sur les cubiques unicursales. (297-304).

L'auteur se propose de montrer que tous les théorèmes sur la strophoïde s'appliquent, à un degré plus général, aux cubiques unicursales circulaires (et même pour quelques-unes non altérées par la projection, aux cubiques unicursales non circulaires).

Sondat (*P.*). — [L[1] 14*a*] Sur quelques propriétés des coniques. (309-329, 507-517).

Énoncé et démonstration de plusieurs propositions relatives aux coniques inscrites ou circonscrites au triangle, et de quelques autres théorèmes concernant les systèmes de deux triangles homologiques.

Lévy (*Lucien*). — [L[2] 7*a*] Sur la composition d'admission à l'École Polytechnique. (329-339).

L'auteur, qui a proposé le sujet de la composition mathématique, fait connaître les méthodes les plus simples à adopter pour obtenir la solution analytique et la solution géométrique. La question se rapportait à une génération particulière des surfaces du troisième ordre par l'intersection de deux hyperboloïdes réglés contenant tous deux une même droite variable OA d'un plan donné, et passant, l'un par deux droites données D et D′, l'autre par deux droites Δ et Δ′. *Voir*, sur le même sujet, les Mémoires de Schrœter et de M. F. Deruyts.

D'Ocagne (*M.*). — [M[2] 3*d*] Solution géométrique complète de la troisième Partie du problème d'admission à l'École Polytechnique. (339-344).

Il s'agit de la détermination des vingt-sept droites de la surface du troisième ordre considérée dans la question précitée et qui peut se définir ainsi :

Étant donnés un point O et quatre droites D, D', Δ, Δ' ne se rencontrant pas, on mène par le point O un plan quelconque qui coupe les quatre droites aux points d, d', δ, δ'. Les droites dd', $\delta\delta'$ se rencontrent en un point M dont le lieu est une surface du troisième ordre.

L'auteur, adoptant les notations de Schläfli et de M. Cremona, établit que cette surface admet 15 droites réelles et 12 autres droites, qui sont toutes à la fois réelles ou imaginaires.

Vahlen. — [Q2] Sur la surface de Fresnel. (344-347).

Établissement de l'équation de la variété de surface de Fresnel obtenue en appliquant la construction de Fresnel à la variété ellipsoïdale

$$\Sigma a_i x_i^2 = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

à n dimensions.

Weber (H.). — [A3k] Formule de Cardan modifiée par Cayley. (347-349).

Extrait du Tome I d'un *Traité d'Algèbre* de M. H. Weber, publié en 1894. Ce paragraphe, traduit par M. L. Laugel, fait connaître l'ingénieuse modification apportée, en 1861, par Cayley à la formule de Cardan pour l'expression des racines de l'équation du troisième degré.

Correspondance. — M. Mannheim : Démonstration et généralisation de la proposition énoncée précédemment par M. Caron, p. 138. (349-350).

En général, si des courbes tracées sur une surface (S) ont entre elles au point a un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, leurs projections sur un plan (P) ont au point α un contact du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre, α désignant la trace sur le plan (P) de la tangente à la surface en a.

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1895. — Énoncés des compositions. (350-352).

D'Ocagne (M.). — [L¹7] Les propriétés focales des coniques obtenues au moyen de la méthode des polaires réciproques. (353-364).

Étant donnés une conique K et un cercle de rayon nul, ayant son centre au point P, ces deux coniques se coupent en quatre points imaginaires, mais parmi les coniques du système il y a deux droites réelles Δ, Δ', qui pourront être dites les *conjointes du point* P et de la conique K. L'auteur applique cette notion à la recherche des propriétés focales.

Cazamian (A.) — [L¹6a] Sur le rayon de courbure des coniques. (365-369).

Détermination du rayon de courbure fondée sur la construction de l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique, la touchant au point considéré et passant par son centre.

Sauvage (*L.*). — [B10*b*] Note sur les équations en λ de la Géométrie. (369-385).

L'auteur se propose de faire connaître la notion de diviseur élémentaire de l'équation en λ déduite de deux formes quadratiques binaires. Il montre qu'un déterminant $\Delta(\lambda)$ qui n'a que des diviseurs élémentaires simples et réels peut s'appeler généralement un déterminant en *s*, et que toute équation en *s* a ses racines réelles.

Leinekugel (*G.*). — [M'6*h*] Note sur une méthode nouvelle de transformation et sur les quartiques unicursales. (391-406).

Dans la méthode de transformation ici considérée, à un point correspond une conique circonscrite au triangle de référence, à une droite un point, et à une conique une quartique unicursale.

Saint-Germain (*A. de*). — [R8*c*] Solution du problème de Mécanique proposé au Concours d'Agrégation en 1894. (406-415).

Étude du mouvement de rotation d'une plaque mince ayant la forme d'un triangle équilatéral dont on donne la position initiale, inclinée à 45° entre deux plans horizontaux, et qui tourne autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité.

Rigollet (*P.*). — [R8*c*] Solution du problème de Mécanique rationnelle donné au Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques en 1895. (415-433).

Étude du mouvement de rotation d'un cône de révolution mobile autour de son centre de gravité, pendant que l'axe reste horizontal et que la circonférence de base roule sur un plan fixe horizontal.

R. S. — [$N_1$1*i*] Étude géométrique d'un complexe du second ordre. (433-437).

Il s'agit du complexe formé par les cordes d'un hyperboloïde à une nappe vues du centre sous un angle droit. Détermination des cônes du complexe qui sont de révolution et des courbes du complexe qui sont des paraboles ou des cercles.

Jamet (*V.*). — [A3*a*α] Sur le théorème de d'Alembert. (437-442).

Essai de démonstration basée sur la notion d'intégrale définie et où l'auteur

se propose d'établir que, lorsque la variable imaginaire dont dépend le premier membre de l'équation décrit un contour fermé, la variation de l'argument est toujours la même lorsque ce contour se déforme d'une manière continue, sans jamais passer par un point représentant une racine de l'équation donnée.

Amigues (*E.*). — [M¹1*a*] Démonstration algébrique d'un théorème relatif à l'intersection de deux courbes. (447-448).

Si un même point est d'ordre p dans une courbe d'ordre m et d'ordre q dans une autre courbe d'ordre n, ces deux courbes se coupent au plus en $(mn - pq)$ autres points.

Pomey (*E.*). — [R4*a*] Formules de la statique d'un corps solide en axes obliques. (449-462).

Subdivisions de ce travail. Moment d'un vecteur. Exposé de cinq méthodes de détermination. Réduction des forces. Résultante de translation. Axe du couple résultant. Conditions d'équilibre. Conditions de réductibilité à un couple. Conditions de réductibilité à une force unique.

Barisien (*E.-N.*). — [O2*q*α] Sur le centre de courbure des podaires. (471-473).

Complément à l'Article de M. d'Ocagne sur le même sujet, inséré p. 111.

Maillet (*E.*). — [H12*d*] Sur le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes. (473-489).

L'auteur se propose de rechercher à quelles lois sont soumises les suites Σ obtenues en prenant dans une suite récurrente S les termes de k en k à partir d'un terme arbitrairement choisi. Ce problème a été traité aussi par M. d'Ocagne.

Pichot (*J.*). — [I1] Note sur la formation des carrés des nombres. (489-491).

Extension, à un carré quelconque, d'une propriété arithmétique du carré d'un nombre de deux chiffres.

Amigues (*E.*). — [O4*d*β] Sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure. (491-494).

Reprenant un sujet traité incidemment par M. Antomari dans une Thèse de 1894, l'auteur montre que l'équation générale de ces surfaces peut se déduire de formules qu'il a fait connaître dans les *Nouvelles Annales*, en 1889.

Amigues (*E.*). — [A3*a*] Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions symétriques. (494-496).

Si le quotient de deux polynomes en a et b est fonction symétrique de a et de b et si, en outre, ces polynomes n'ont aucun diviseur commun en a, ni aucun diviseur commun en b, chacun d'eux est une fonction symétrique de a et de b.

Amigues (*E.*). — [B1*a*] Théorème d'Algèbre. (496-497).

Un déterminant dont les éléments sont des lettres avec indices, et où les indices de chaque ligne forment des progressions de même raison, est un polynome dont tous les termes ont même poids.

Fouret (*G.*). — [L²7*a*] Sur la quatrième Partie du problème du dernier Concours d'admission à l'École Polytechnique. (497-501).

Exposé d'une démonstration géométrique basée sur les propriétés élémentaires du complexe linéaire.

Svechnicoff (*P.*). — [O6*c*] Sur une classe de surfaces. (501-506).

Une courbe A roule sans glisser sur une autre courbe fixe B, de sorte que leurs plans osculateurs au point de contact forment un angle constant δ. Les positions successives d'un point μ invariablement lié à A déterminent une nouvelle courbe C. Quand l'angle δ varie d'une manière continue, la courbe C décrit une surface S. Équations de la surface S. Cas particuliers.

Concours d'admission a l'École Centrale en 1895. — Énoncés des compositions. (518-525).

Exercices.

Terrier (*P.*). — Solution de la question 1257. (1*-5*).

Cette question, proposée par M. C. Moreau, qui la croyait nouvelle, revient en définitive à la proposition connue sous le nom de *théorème de Miquel.*

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1266. (5*-8*).

Lieu du centre du triangle équilatéral formé par les trois tangentes aux points de rencontre du rayon vecteur de la courbe $\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin(-\frac{1}{3}\omega)$, caustique par réflexion de la parabole pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1267. (8*-9*).

Propriété d'une circonférence, d'une droite et de deux divisions homographiques.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1277. (10*-11*).

Propriété de deux spirales logarithmiques.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1287. (11*-13*).

Enveloppe des cercles ayant pour diamètre la corde joignant les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

Polignac (*C. de*). — Solution de la question 1309. (13*-16*).

Question posée par M. C. de Polignac, et relative à des faisceaux harmoniques.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la question 1319. (16*-21*).

Aires des faces et volumes de certains tétraèdres.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1351. (22*).

Par un point, mener une sécante telle que la différence des cordes interceptées par deux circonférences données soit égale à une longueur donnée.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1372. (22*-24*).

Question de Géométrie cinématique; mouvement infiniment petit d'un plan sur lui-même.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1382. (24*-27*).

Lieu du centre de courbure d'une conique en un certain point d'une circonférence qui lui est tangente. L'auteur de la question, M. A. Mannheim, en a donné une solution géométrique, p. 27*-29*.

Franel (*J.*). — Solution de la question 1563. (29*-32*).

Solution et généralisation d'une question relative à une propriété des projections des diamètres d'un ellipsoïde sur le plan tangent à l'extrémité du diamètre.

QUESTIONS PROPOSÉES : 1686 à 1705. (33*-39*).

Deux énoncés différents ont été groupés dans le n° 1704; il y aura lieu de les séparer au moment de la publication des solutions.

Ce Volume est le dernier que les Rédacteurs aient publié. A partir de 1896, la Direction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* est passée entre les mains de MM. Laisant et Antomari, docteurs ès Sciences mathématiques.

Nous croyons savoir que les nouveaux Directeurs se proposent de transformer ce journal en un Bulletin mathématique dans lequel le problème tiendra une large place et où notamment les questions posées aux épreuves de Licence et d'Agrégation seront régulièrement insérées, grâce à la collaboration que les rédacteurs ont obtenue de MM. les Professeurs des diverses Facultés des Sciences.

H. B.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XVII, 1893.

Gyldén (Hugo). — Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. (1-168).

Suite du Mémoire publié au tome XV du même journal (p. 65-190).

II. *Transformation de quelques équations différentielles.* — 5. Intégration de l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 y}{dv^2} + Y_{01} y + Y_{02} y^2 + Y_{03} y^3 \\ &\qquad + (Y_{10} + Y_{11} y + Y_{12} y^2)\frac{dy}{dv} + (Y_{20} + Y_{21} y)\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \Omega, \end{aligned}\right.$$

les Y et Ω étant des fonctions connues de v, dont les premières ne renferment que des constantes et des termes purement trigonométriques, y étant une petite quantité de l'ordre des excentricités ou des inclinaisons; on a omis les termes de degré supérieur au troisième, non point seulement parce que ces termes sont très petits, mais surtout parce que l'approximation ainsi obtenue donne un point de départ convenable pour les approximations suivantes (ce qui n'arrive pas toujours, ainsi qu'on l'a vu précédemment, lorsqu'on se borne aux termes du premier degré).

On substitue pour y l'expression

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & (1 - \varphi_{01}) z + \varphi_{02} z^2 + \varphi_{03} z^3 + \dots \\ & + (\varphi_{10} + \varphi_{11} z + \varphi_{12} z^2 + \dots)\frac{dz}{dv} \\ & + (\varphi_{20} + \varphi_{21} z + \varphi_{22} z^2 + \dots)\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Les φ_{ik} étant des fonctions arbitraires. En négligeant les termes dont le degré, par rapport à z et à ses dérivées, dépasse le troisième, on trouve pour déterminer z l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 z}{dv^2} + \sum A_{ik}\left(\frac{dz}{dv}\right)^i z^k + \frac{d^2 z}{dv^2}\sum B_{ik}\left(\frac{dz}{dv}\right)^i z^k \\ &\quad + \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right)^2 \sum B'_{ik}\left(\frac{dz}{dv}\right)^i z^k + \sum C_{ik}\frac{d^3 z}{dv^3}\left(\frac{dz}{dv}\right)^i z^k = \Omega, \end{aligned}\right.$$

et il faut choisir les φ_{ik} de manière à donner aux coefficients A, B, C les formes les plus avantageuses possibles. Toutefois, ces fonctions φ_{ik} devront rester très petites du premier ordre [sans quoi on n'aurait plus le droit de négliger, dans l'équation (3), les termes de degré supérieur à trois] et ne contenir la variable que sous des signes trigonométriques.

Comme première application, on considère une équation du type (1), mais où $\frac{dy}{dv}$ ne figure pas, autrement dit l'équation

$$\frac{d^2y}{dv^2} + Y_1 y + Y_2 y^2 + Y_3 y^3 = \Omega_1, \tag{4}$$

les quantités Y et Ω étant de l'ordre des masses troublantes.

Dans ce cas, on choisit les fonctions φ de manière à égaler les A_{ik} à des constantes β_{ik} (on pourrait égaler ces quantités à zéro, mais il serait, dans certains cas, impossible d'éviter la présence de termes séculaires). On peut, de plus, considérer alors les B et les C comme du second ordre, et, par suite, négligeables dans la première approximation.

Une autre manière d'opérer consiste à prendre $\varphi_{01} = 0$. On cesse alors, il est vrai, d'être maître du coefficient A_{01} : l'équation obtenue est

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2z}{dv^2} + Y_1 z + \beta_{02} z^2 + \beta_{03} z^3 + (\beta_{10} + \beta_{11} z + \beta_{12} z^2)\frac{dz}{dv} \\ &\quad + (\beta_{20} + \beta_{21} z)\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \beta_{30}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 + (B_{01} z + B_{02} z^2)\frac{d^2z}{dv^2} + \ldots = \Omega. \end{aligned} \right.$$

Deuxième application. — Tous les Y_{mn} sont très petits, sauf Y_{01}, qui est très voisin de 1. On peut, par une transformation du type précédent, diriger le calcul de manière à commencer les approximations en intégrant l'équation

$$\frac{d^2E}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)E = \Omega - \varphi_{10}\frac{d\Omega}{dv} + \varphi_{01}\Omega,$$

H étant une constante. Mais cette méthode ne peut s'appliquer dans les cas où il y a des termes critiques (termes à longue période).

Dans ce cas, on peut prendre l'équation proposée sous la forme

$$\frac{d^2y}{dv^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \Psi]y + \left[\Phi + p\frac{d(H)^2}{dv}\right]\frac{dy}{dv} + \beta_0\chi_0(H)^2 = \Omega, \tag{6}$$

où Φ et Ψ sont des fonctions connues, à termes purement périodiques, p et β_0 sont des constantes petites, et

$$(H)^2 = (1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2.$$

On opère le changement de variable

$$y = \frac{z}{1 + \psi}, \qquad dv = \frac{e^{\int \Phi dv}}{(1 + \psi)^2} du,$$

ψ étant une fonction arbitraire. On adjoint, pour déterminer ψ, l'équation de condition

$$-\frac{1}{1+\psi}\frac{d^2\psi}{du^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \psi]\frac{e^{2\int \Phi dv}}{(1+\psi)^4} = 1 - \beta_1 - \beta_3\eta^2, \tag{7}$$

où $\eta^2 = (1 - \beta)z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2$. Cette quantité η^2 est liée très simplement à $(H)^2$.

En les supposant du second degré, on a

$$(\mathrm{H})^2 = \tau_1^2 e^{-\int \Phi_1 dv},$$

au quatrième degré près, et l'on peut écrire l'équation en z

$$(8)\qquad \frac{d^2 z}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \tau_1^2) z + \beta_0 \chi \tau_1^2 = (\Omega),$$

où χ et (Ω) sont liés simplement à χ_0 et Ω.

On intègre l'équation (8) en considérant z comme somme de termes successifs V_0, V_1, ..., déterminés par des équations telles que

$$\frac{d^2 V_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \mathrm{H}) V_0 = (\Omega),$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \mathrm{H}) V_1 = {} & \beta_3 \left[(1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - \mathrm{H}_0 \right] V_0 \\ & - \beta_0 \left[(1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 \right] X_1 \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

où $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \ldots$ est la partie constante de τ_1^2.

6. On considère ensuite l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^2 \mathrm{T}}{dv^2} = - \mathrm{A}_0 \sin(\mathrm{G}_0 + s_0 \mathrm{T}) - X_1 - \Omega_1,$$

où

$$X_1 = \sum_n \mathrm{A}_n \sin(\mathrm{G}_n + s_n \mathrm{T}) + \frac{d\mathrm{T}}{dv} \sum_n \mathrm{A}'_n \sin(\mathrm{G}_n + s_n \mathrm{T}),$$

$$\Omega_1 = \sum_n a_n \sin \mathrm{H}_n,$$

$$\mathrm{G}_n = 2\lambda_n v + 2\mathrm{B}_n,$$

$$\mathrm{H}_n = \sigma_n v + b_n,$$

les A, a étant, les uns du premier ordre et de degré quelconque, les autres du second ordre et au moins du second degré; les B, b étant constants.

On commence par intégrer l'équation où X_1 et Ω_1 sont supprimés; l'intégrale trouvée Z_0 est manifestement elliptique. On pose alors

$$\mathrm{T} = Z_0 + \frac{2}{s_0} V_1,$$

et l'équation en V_1 appartient au type de l'équation (4) considérée au paragraphe précédent : on peut donc lui appliquer la première transformation indiquée à cet endroit. Dans le cas des orbites intermédiaires, on réitère les opérations auxquelles on est ainsi conduit; l'auteur montre, en s'appuyant sur les propriétés des nombres s_i, établies dans son Mémoire de 1887, que la série d'approximation obtenue de cette façon est convergente. De plus, la variable indépendante n'y figure pas hors des signes trigonométriques.

Mais, lorsque le second membre de l'équation (9) contient des termes *élémentaires* (ne s'annulant pas avec les forces perturbatrices), la méthode ne s'applique plus et de nouvelles transformations sont nécessaires. Elles ont pour effet de faire naître, dans l'équation résultante, certains termes, qui ne dépendent pas explicitement de la variable indépendante mais seulement de y et de sa dérivée. La présence de ces termes (termes *horistiques*) rend convergentes les séries employées.

7. Prenons encore l'équation

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + Zz - \beta_3 z^3 = X, \tag{10}$$

où, cette fois (Z étant supposé connu et, le plus souvent, constant; β_3 constant), X n'est connu que par ses termes principaux, qui sont de la forme

$$-A_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\} G_n \qquad (G_n = 2\lambda_n v + B_n).$$

Comme il a été dit plus haut, on ne peut pas toujours supprimer, comme première approximation, le terme en z^3, parce que cela pourrait introduire dans les calculs des expressions à dénominateurs très petits. On se propose alors de ramener l'équation à la forme linéaire, tout en tenant compte du terme en z^3. On pose $z = \frac{y}{1+\psi}$, et l'on est conduit au système d'équations

$$\frac{d^2\psi}{dv^2} = (1+\psi)\nu^2 - \beta_3\frac{y^2}{1+\psi}, \tag{11}$$

$$\frac{d^2 y}{dv^2} - \frac{2}{1+\psi}\frac{d\psi}{dv}\frac{dy}{dv} + \left[Z - \nu^2 + \frac{2}{(1+\psi)^2}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2\right] y = (1+\psi)X, \tag{12}$$

dont la seconde est remplacée tout d'abord par

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + (Z - \nu^2)y = (1+\psi)X. \tag{13}$$

ν^2 est une constante déterminée par la condition que la valeur de ψ ne renferme pas de terme constant. Cette condition est équivalente à la suivante : si l'intégrale de l'équation (13) est

$$y = \sum_n \varkappa_n \cos G_n,$$

on aura

$$\nu^2 = \frac{\beta_3}{2}\Sigma\varkappa^2 = \beta_3 H.$$

Si Z est une constante $-g$, on peut exprimer les $\varkappa$ en fonction de H et, en reportant dans la relation $H = \frac{1}{2}\sum \varkappa^2$, on aura une équation servant à déterminer H. Lorsque cette équation donne pour H une valeur réelle et positive (ce qui arrive toujours, en particulier, lorsque g est positif) la série des $\varkappa$ est absolument convergente et, par conséquent, aussi la série qui donne y, et que l'on parvient à former.

Lorsque Z n'est plus une constante, on peut, en posant

$$y = \Psi_0 z + \Psi_1 \frac{dz}{dx} + \Psi_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots$$

(x étant la variable indépendante), satisfaire à l'équation simplifiée

(14) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + (X + \alpha) y = 0,$$

par une expression de la forme

(15) $$y = C_1 (P + \nu Q) e^{\nu x} + C_2 (P - \nu Q) e^{-\nu x},$$

P et Q étant les quantités

$$P = \Psi_0 + \nu^2 \Psi_2 + \nu^4 \Psi_4 + \ldots,$$
$$Q = \Psi_1 + \nu^2 \Psi_3 + \nu^4 \Psi_5 + \ldots.$$

On passe de là à l'intégration de l'équation complète.

Mais on peut déterminer directement P et Q, sans passer par les fonctions Ψ. En remplaçant, en effet, y par l'expression (15) et égalant à zéro l'ensemble des termes de degré pair en ν et l'ensemble des termes de degré impair, on trouve

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + 2\nu^2 \frac{dQ}{dx} + (X + \nu^2) P = 0,$$
$$\frac{d^2 Q}{dx^2} - 2 \frac{dP}{dx} + (X + \nu^2) Q = 0.$$

Ce système peut, à l'aide des relations

$$P + \nu Q = (1 + \psi) e^{\nu \int \frac{dx}{(1+\psi)^2} - \nu x},$$
$$P - \nu Q = (1 + \psi) e^{-\nu \int \frac{dx}{(1+\psi)^2} + \nu x},$$

être remplacé par l'équation unique

(16) $$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\nu^2}{(1 + \psi)^2} + X (1 + \psi) = 0.$$

Si, d'ailleurs, on part de l'équation en y et qu'on y pose

$$y = (1 + \varphi) e^{\nu x + \int z dx} dx,$$

φ et z étant deux nouvelles inconnues entre lesquelles on peut se donner une relation, on retombe, pour diverses formes de cette relation, sur l'équation en ψ précédente ou une de ses transformées simples.

Les équations ainsi trouvées renferment, en général, des termes horistiques, ce qui rend les solutions convergentes; toutefois il peut arriver que ces termes s'annulent, ou soient très petits, ce qui nécessite une discussion spéciale.

Pour passer à l'intégration de l'équation complète, on a à développer l'expression

$$E = e^{-\nu x - \int z\, dx} \int \Phi e^{\nu x + \int z\, dx} dx,$$

où ν est une constante, Φ et z deux développements uniformément convergents; après quoi l'intégration cherchée se déduit de ce qui précède.

III. *Application aux inégalités des planètes.* — 8. La détermination des inégalités du rayon vecteur et de celles de la latitude s'opère en intégrant des équations du second ordre et du troisième degré telles que celles qui ont été considérées au § 5. On ne peut pas supprimer les termes du troisième degré, à cause de la présence des termes critiques.

En employant les méthodes données au § 5 on trouve des approximations successives qui convergent à la façon des progressions géométriques. On constate que les coefficients ne sont pas des fonctions uniformes de la constante d'intégration, ce qui s'accorde avec le théorème de Poincaré sur la non-existence d'intégrales uniformes.

Les grandes inégalités de la longitude dépendent de l'équation (9) du § 6 et relèvent, par conséquent, des méthodes exposées dans ce paragraphe. Toutefois, dans le cas où l'inégalité provient d'un terme de la fonction perturbatrice à coefficient très grand par rapport à ν^2, cette méthode ne conviendrait plus; il y aurait alors lieu de ramener le problème à une équation du type étudié dans le § 7, l'équation

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \alpha z - \beta z^3 = - a \sin(\sigma u + b), \tag{17}$$

qui, privée de second membre, s'intègre par les fonctions elliptiques. On choisit l'arbitraire introduite par l'intégration de manière que la période de la fonction elliptique soit égale à celle du second membre.

9. M. Gyldén indique rapidement le rôle joué par les termes horistiques dans la théorie du phénomène connu sous le nom de *libration* et correspondant à l'existence de termes critiques.

Quand le coefficient de la libration est très petit, cette libration dépend de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dv^2} - \nu^2 y = - \mathrm{A} \sin s y, \tag{18}$$

laquelle, en développant le second membre suivant les puissances de sy et négligeant les termes de degré supérieur au premier, donne

$$y = l \sin\left(\sqrt{s\mathrm{A} - \nu^2}\, v - \mathrm{L}\right),$$

où l et L sont les deux constantes d'intégration, dont la première est très petite.

Si $s\mathrm{A} > \nu^2$, il y a périodicité; sinon, l'argument des sinus est imaginaire.

On voit par là qu'une relation de la forme

$$s_0 v + s_1 v' + s_2 v'' + \ldots = \text{termes périodiques},$$

v, v', v'' étant des arguments astronomiques et s_0, s_1, ... des entiers quelconques, ne reste pas maintenue par les forces attractives, si la somme de ces entiers dépasse une certaine limite.

Une plus grande partie des termes horistiques sera mise en évidence si, au lieu de l'équation (18), on part de l'équation (17) (paragraphe précédent), en

2de Partie.

y prenant pour second membre $-A\sin sz$. Si l'on développe ce terme suivant les puissances de sz, en ne retenant que les deux premiers termes, il vient

$$\frac{d^2 z}{du^2} + (\alpha + sA)z - \left(\beta + \frac{1}{6}s^3 A\right)z^3 = 0,$$

équation qui s'intègre par des fonctions elliptiques. De la discussion de ces fonctions résulte que si le coefficient

$$a = \frac{\alpha + sA}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\beta + \frac{1}{6}s^3 A)}}$$

est négatif, il ne peut y avoir de libration. En particulier, *les termes éloignés de la fonction perturbatrice ne peuvent engendrer de libration.*

Hilbert (D.). — Sur les formes ternaires définies. (169-197).

Dans les *Math. Annalen*, t. XXXII, M. Hilbert a démontré qu'une forme ternaire définie positive (c'est-à-dire qui ne devient négative pour aucun système de valeurs réelles des variables) est nécessairement une somme de carrés de formes réelles si elle est du second ou du quatrième ordre, mais que cette conclusion cesse d'être exacte si l'ordre dépasse 4. Par contre (et c'est ce que l'auteur démontre dans le Mémoire actuel) *toute forme ternaire définie peut être mise sous forme du quotient de deux sommes de carrés.*

1. Étant données l'équation (à coefficients réels) d'une courbe plane $F = 0$, d'ordre n à δ points doubles ordinaires $P_1, \ldots, P_\delta$ (et un nombre quelconque d'autres singularités); d'autre part, une forme F' du même ordre à coefficients réels qui s'annule aux points $P_1, \ldots, P_\delta$, mais non aux autres points singuliers de F; et supposons qu'il soit possible de déterminer dans le plan $N - \delta$ points $P'\left(N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$ de manière que, par ces points et les points P, ne passe aucune courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre. Dans ces conditions, il existera une courbe $G = 0$ infiniment voisine de F, ayant dans le voisinage de $P_1, \ldots, P_\delta$ autant de points doubles ordinaires, mais point d'autre singularité.

M. Hilbert démontre ce lemme en posant

$$G = F + t(F' + \Omega),$$

Ω étant une forme auxiliaire qui s'annule aux points P et dont les coefficients sont des fonctions convenablement choisies de t. La courbe $G = 0$ ainsi déterminée n'a pas de singularité au voisinage d'un point singulier de F qui ne figure pas parmi les P.

2. Construction d'une forme ternaire définie irréductible G telle que la courbe $G = 0$ ait le nombre maximum de points doubles, les uns réels (et isolés), les autres imaginaires conjugués deux à deux.

On suppose trouvée une telle forme Γ d'ordre $n-2$ et, pour construire la courbe d'ordre n, on adjoint à Γ deux droites imaginaires conjuguées coupant Γ en des points tous séparés; puis on applique à l'ensemble F de la courbe Γ

et des deux droites la proposition du n° 1, les points doubles P étant ceux de Γ et les intersections des deux droites entre elles et avec la courbe moins deux. La courbe ainsi formée ne peut avoir de branche réelle (car une telle branche devrait, pour $t=0$, se réduire à un point isolé de Γ, ce que l'on constate être impossible); elle est irréductible, comme on le voit par l'étude de la surface de Riemann correspondante [la surface qui correspond à $F(t=0)$ a trois parties séparées, correspondant à Γ et aux deux droites; mais ces trois parties se raccordent entre elles, pour $t \neq 0$, aux points doubles de F qui ne figurent pas dans G].

3. Le polynome G formé au numéro précédent peut se mettre sous forme d'une fraction ayant pour numérateur une somme de trois carrés

$$G = \frac{P^2+\Sigma^2+K^2}{h}. \tag{1}$$

Pour cela, soient ρ, σ, ϰ trois formes linéairement indépendantes d'ordre $n-2$ à coefficients réels, assujetties à s'annuler aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles et en $n-4$ points fixes $A_1, A_2, \ldots, A_{n-4}$ de G, imaginaires conjugués deux à deux. Ces formes définissent une transformation birationnelle qui fait correspondre à la courbe donnée une conique, dont le premier membre est une somme de trois carrés; d'où la conclusion demandée. Le dénominateur h s'annule aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-4}$ mais non aux points doubles de G.

4. De la forme G on déduit une forme f, cette fois à discriminant non nul, qui peut également se représenter par une fraction du type (1). Car l'identité (1) s'écrivant encore

$$f = \frac{\varphi^2+\psi^2+\chi^2}{h}, \tag{2}$$

moyennant les relations

$$\varphi = P + thp,$$
$$\psi = \Sigma + thq,$$
$$\chi = K + thm,$$
$$f = G + 2t(P_p + \Sigma_q + K_m) + t^2 h(p^2+q^2+m^2),$$

on constate que les formes p, q, m et le nombre t peuvent être déterminés de manière que $f=0$ n'ait pas de points doubles. Les courbes $\varphi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$ ont en commun avec f les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-4}$; la courbe $\psi+i\chi=0$ touche en outre $f=0$ aux $1+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points imaginaires A, U_1, $U_2, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$; la courbe $\psi-i\chi=0$ touche $f=0$ aux points B, V_1, $V_2, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$, conjugués des premiers; la courbe $\varphi=0$ coupe $f=0$ aux points A, $U_1, \ldots, U_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$, B, $V_1, \ldots, V_{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$. Enfin, il n'existe pas de courbe d'ordre $n-3$ passant par tous les points U, ni par tous les points V.

5. Pour étudier ce qui se passe lorsqu'on fait varier continûment la forme f,

M. Hilbert rappelle un certain nombre de principes relatifs aux fonctions Θ et d'après lesquels, lorsqu'on se donne les points A, A_1, A_2, ..., A_{n-4}, les points de contact U_1, U_2, ..., U_p $\left(p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$ sont les zéros de la fonction

$$(3) \qquad \Theta(w_1 - \alpha_1, w_2 - \alpha_2, \ldots, w_p - \alpha_p),$$

où

$$w_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

désigne successivement les intégrales abéliennes de première espèce et où α_s est, à une constante près, égal et de signe contraire à la somme

$$\frac{1}{2}[w_s(A_1) + \ldots + w_s(A_{n-4})] + w_s(A).$$

6. Dès lors, si nous faisons varier continûment la courbe $f = 0$ et les points A, A_1, ..., A_{n-4}, les points B, U, V varieront aussi continûment et l'on voit, à l'aide du théorème d'Abel, que tous ces points ne cesseront pas d'appartenir à une même courbe d'ordre $n - 2$. Il en résulte que la nouvelle forme F ainsi déduite de f est encore représentable par une fraction de la forme (2).

7. Les coordonnées des points U sont des fonctions algébriques des grandeurs dont elles dépendent. On peut toujours admettre que les équations qui les déterminent ne renferment pas toutes un même facteur indépendant des inconnues. Si l'on écrivait, dans ces conditions, que, pour tout choix possible des A, la fonction (3) s'annule identiquement (auquel cas les raisonnements précédents tomberaient en défaut), on aurait au moins deux équations entre les coefficients de F. Considérant ces coefficients comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $N - 1$ dimensions, les points correspondant à des courbes pour lesquelles cette circonstance aura lieu formeront une multiplicité μ, de moins de $N - 2$ dimensions.

8. Si les formes f_1, f_2, ..., f_s, ..., toutes représentables par les fractions du type (2), ont pour limite F, celle-ci est aussi représentable de la même façon (car on peut, de la suite des f_s, extraire une suite partielle telle que les fonctions φ, χ, ψ, h aient chacune une limite). Dès lors, on voit aisément que, pour représenter ainsi une forme définie quelconque F, il suffira de partir de la forme particulière f du n° 4 et d'en faire varier continûment les coefficients sans rencontrer la multiplicité μ.

9. Ayant ainsi obtenu l'équation

$$(4) \qquad F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H},$$

on peut supposer le théorème démontré pour la forme H qui est d'ordre $n - 4$. L'équation (4) montre immédiatement qu'il s'étend à la forme F.

Netto (*E.*). — Deux théorèmes sur les déterminants. (199-204).

1. *Soit*

$$c_{\varkappa\lambda} \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 3, 4, \ldots, n \\ \lambda = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

un tableau carré à n colonnes et $n-2$ *lignes, et soit* $\Delta_{\alpha\beta}$ *le déterminant qui en résulte par la suppression des colonnes de rangs* α *et* β (*avec les conditions* $\Delta_{\alpha\alpha} = 0$, $\Delta_{\alpha\beta} = -\Delta_{\beta\alpha}$); *on a*

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\rho} & \Delta_{\alpha\sigma} & \Delta_{\alpha\tau} \\ \Delta_{\beta\rho} & \Delta_{\beta\sigma} & \Delta_{\beta\tau} \\ \Delta_{\gamma\rho} & \Delta_{\gamma\sigma} & \Delta_{\gamma\tau} \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration par la résolution d'équations linéaires.

2. Démonstration directe du théorème de Kronecker démontré par la résolution d'équations dans un travail précédent de M. Hensel (même Journal, t. XIV).

3. Démonstration (par des résolutions d'équations) de la proposition suivante :

Soient :

$$|c_{ik}| = C, \qquad |c_{ik}| = D,$$
$$(i, k = 1, \ldots, n), \qquad (i, k = 1, \ldots, m;\ m < n),$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} & c_{1,\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} & c_{m,\beta} \\ c_{\alpha 1} & \ldots & c_{\alpha m} & c_{\alpha,\beta} \end{vmatrix} = E(\alpha, \beta);$$

on a

$$|E(\alpha, \beta)| = D^{n-m-1}C \qquad (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n).$$

Hocks (*J.*). — Quelques relations caractéristiques des nombres premiers. (205-208).

Si $[x]$ désigne le plus grand entier contenu dans x, et δ le plus grand commun diviseur de m, n, on a

$$\sum_{s=1}^{n-1} \left[\frac{sm}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{\delta - 1}{2}.$$

Donnons à m toutes les valeurs entières de 1 à $n-1$ et ajoutons : il vient, si m est un nombre premier p et dans ce cas seulement :

$$\sum_{y=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{p-1} \left[\frac{ys}{p}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 p - 2.$$

De même, en donnant à n toutes les valeurs entières de 1 à $m-1$ et ajoutant,

on a, si m est un nombre premier p et dans ce cas seulement :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{p}{2}\right]+\left[\frac{p}{3}\right]+\left[\frac{p}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{p}{p-1}\right], \\ &\quad+\left[\frac{2p}{3}\right]+\left[\frac{2p}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{2p}{p-1}\right], \\ &\qquad+\left[\frac{3p}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{3p}{p-1}\right], \\ &\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\qquad\qquad+\ldots+\left[\frac{(p-2)p}{p-1}\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2(p-2). \end{aligned}$$

Enfin, une troisième équation caractéristique des nombres premiers est

$$\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{ys}{p}\right]+\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{s=1}^{\left[\frac{y}{2}\right]}\left[\frac{ps}{y}\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)^3.$$

Kötter (*Fr.*). — Sur le cas, traité par Mme Kowalewski, de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. (209-263).

On sait que les équations du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe ont été intégrées par Mme Kowalewski (même Journal, t. XII) dans le cas où, deux des moments principaux d'inertie étant égaux entre eux et doubles du troisième, le centre de gravité est dans le plan de ces deux moments principaux. Les composantes de la rotation instantanée et les cosinus directeurs de la verticale par rapport aux axes d'inertie s'expriment alors en fonction hyperelliptique de deux arguments qui dépendent linéairement du temps. Mme Kowalewski ayant annoncé que les cosinus directeurs des axes fixes horizontaux s'expriment également à l'aide des fonctions Θ, M. Kötter effectue ce calcul. Il est conduit à introduire un système d'axes auxiliaire ayant un axe commun avec le système mobile.

1. Les six équations différentielles qui lient les trois composantes p, q, r de la rotation instantanée et les cosinus directeurs γ_1, γ_2, γ_3 de la verticale admettent, en général, trois intégrales algébriques, à savoir l'équation entre les cosinus, l'intégrale des aires et celle des forces vives. Dans le cas spécial indiqué par Mme Kowalewski et où les moments d'inertie principaux P, Q, R sont entre eux comme 1, 1, $\frac{1}{2}$ (le centre de gravité étant sur l'axe des x) on trouve une quatrième intégrale algébrique à savoir (moyennant un choix convenable d'unités)

$$[(p+iq)^2+\gamma_1+i\gamma_2][(p-iq)^2+\gamma_1-i\gamma_2]=k^2.$$

2. Ces quatre relations intégrales permettent d'exprimer les six fonctions inconnues à l'aide de deux paramètres s_1, s_2.

L'auteur reproduit à cet égard le calcul de Mme Kowalewski. On fait le chan-

gement de variables

$$x_1 = p + iq, \qquad x_2 = p - iq,$$
$$\xi_1 = (p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2, \qquad \xi_2 = (p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2,$$

et l'élimination de r et de γ_3 entre les intégrales donne les relations fondamentales

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 \xi_2 = k^2, \\ \xi_1 R(x_1) + \xi_2 R(x_2) + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0, \end{cases}$$

où $R(x_1, x_2)$, $R_1(x_1, x_2)$ sont deux formes doublement quadratiques symétriques dont les coefficients dépendent de la constante k^2 de la constante $2l$ des aires et de la constante $6l_1$ des forces vives; et $R(x) = R(x_1, x)$. On introduit alors les paramètres

$$s_1 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3l_1, \qquad s_2 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3l_1,$$

en fonction desquels les équations (1) permettent d'exprimer les x_1, x_2, ξ_1, ξ_2. Si alors l'on désigne par e_1, e_2, e_3 les racines du polynome

$$(2) \qquad \varphi(z) = z[(z - 3l_1)^2 + 1 - k^2] - 2l^2;$$

par e_4, e_5 les deux quantités $3l_1 \pm k$, et que l'on substitue les expressions des fonctions inconnues dans les équations différentielles du problème, on trouve, avec Mme de Kowalewski, que s_1, s_2 sont donnés en fonction du temps par

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{s_1\, ds_1}{S_1} + \dfrac{s_2\, ds_2}{S_2} = -i\sqrt{2}\, dt, \\[2mm] \dfrac{ds_1}{S_1} + \dfrac{ds_2}{S_2} = 0, \end{cases}$$

où

$$S_\beta = \sqrt{(s_\beta - e_4)(s_\beta - e_5)}\sqrt{\varphi(s_\beta)} = \sqrt{\prod_{\alpha=1}^{5}(s_\beta - e_\alpha)} \qquad (\beta = 1, 2).$$

Autrement dit, S_1 *et* S_2 *s'obtiennent par une inversion d'intégrales hyperelliptiques de première espèce.*

3. Introduction du système d'axes auxiliaire. Celui-ci se déduit du système lié au corps mobile par une rotation effectuée autour de l'axe des z et dont l'angle θ est tel que $e^{i\theta}$ soit égal à l'imaginaire $\sqrt{\dfrac{\xi_2}{k}}$ (dont le module est effectivement égal à 1). Les quantités p', q', r', γ'_1, γ'_2, γ'_3, qui correspondent à p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 relativement à ce nouveau système, sont exprimées en fonction de s_1, s_2. On constate d'ailleurs que la nouvelle vitesse angulaire r' est la moitié de la vitesse primitive r.

4. Conformément à la théorie générale, on posera

$$v_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1}\frac{s_1\, ds_1}{S_1} + \int_{a_2}\frac{s_2\, ds_2}{S_2}\right), \qquad v_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_{a_1}\frac{ds_1}{S_1} + \int_{a_2}\frac{ds_2}{S_2}\right),$$

et les variables cherchées s'exprimeront alors par des fonctions hyperelliptiques. Il en est de même des coefficients constants qui figurent dans les équations précédentes. Ceux-ci peuvent en effet être considérés comme des coefficients de développements des variables suivant les puissances de $\frac{s}{s_1}$, lorsqu'on donne à s_2 les valeurs spéciales e_1, e_2, $2l^2$. A ces valeurs (avec $s_1 = \infty$) correspondent des couples spéciaux (v'_1, v'_2), (v''_1, v''_2), (v'''_1, v'''_2) de valeurs de v_1, v_2 en fonction desquels les constantes s'expriment hyperelliptiquement.

5. Introduction des fonctions Θ. Une discussion préliminaire distingue les différents cas qui peuvent se présenter au point de vue de l'ordre des racines e_α du radical et, par suite, de la réalité ou de l'imaginarité des périodes: après quoi l'auteur, suivant la marche ordinaire, met, par une substitution linéaire effectuée sur v_1, v_2, les périodes sous la forme canonique, ce qui lui permet de définir les fonctions Θ et d'exprimer par leur moyen les inconnues.

6. Il s'agit enfin de déterminer les cosinus directeurs des axes horizontaux et les composantes de la rotation instantanée par rapport à ces axes. Or, on forme aisément les cosinus directeurs

$$a_\varkappa, \quad b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

de deux directions rectangulaires entre elles et à la verticale. Les cosinus cherchés se déduisent de ceux-là en multipliant l'expression $a_\varkappa + ib_\varkappa$ par une exponentielle imaginaire, l'argument de cette exponentielle étant déterminé par la considération de la rotation instantanée. On trouve ainsi que cet argument varie proportionnellement au temps.

7. Résumé des résultats obtenus. Par l'introduction du système d'axes auxiliaires, les formules sont devenues entièrement analogues à celles qui définissent le mouvement de Poinsot.

Netto (*E.*). — Sur la théorie des substitutions linéaires. (265-280).

L'auteur recherche comment la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique, dans le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples, peut dériver par continuité de la réduction relative au cas où il n'y a que des racines simples.

Étant donnée une substitution S pour laquelle l'équation caractéristique a des racines multiples, on la modifie en ajoutant aux coefficients des termes dépendant d'un paramètre infiniment petit t, de telle sorte que l'équation caractéristique modifiée ait ses racines distinctes pour t arbitraire. On applique à ces racines la méthode de Puiseux, et les systèmes circulaires entre lesquelles elles se distribuent correspondent aux chaînes de variables normales qui s'introduisent dans la réduction de S.

Krazer (*A.*). — Sur des relations linéaires entre produits de fonctions thêta. (281-296).

1. De la fonction θ à p variables

$$\theta(v_1 | \dots | v_p) = \sum_{m_1, \dots, m_p}^{-\infty, \dots, +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu v_\mu},$$

on déduit l'expression

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha_1, & \dots, & \alpha_p \\ \alpha'_1, & \dots, & \alpha'_p \end{bmatrix} (v_1 | \dots | v_p)$$
$$= \theta \left(v_1 + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\alpha'_1}{r} \pi i \,\Big|\, \dots \,\Big|\, v_p + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\alpha'_p}{r} \pi i \right)$$
$$\times e^{\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} \frac{\alpha_\mu \alpha_{\mu'}}{r^2} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\alpha_\mu}{r} \left(v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r} \pi i \right)},$$

ou pour abréger,

$$\theta \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{vmatrix} ((v)),$$

dans laquelle r, α_1, α_2, ..., α_p, α'_1, α'_2, ..., α'_p sont des entiers.

2. Le produit

$$\Theta \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{vmatrix} ((v)) = \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} ((v + c^{(1)})) \, \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} ((v + c^{(2)})) \dots \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} ((v + c^{(r)})),$$

les c étant des constantes satisfaisant aux p conditions

$$c_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2)} + \dots + c_\mu^{(r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p),$$

est un *produit thêta du* $r^{\text{ième}}$ *rang*. Le système d'entiers $\begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_p \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \dots, & \alpha'_p \end{bmatrix}$ (ou plus simplement $[\alpha]$) en est la *caractéristique*. Ces entiers n'interviennent d'ailleurs que par leurs résidus relatifs au module r.

3. Soient $[\alpha^{(1)}]$, $[\alpha^{(2)}]$, ..., $[\alpha^{(q)}]$ q caractéristiques ($q \leqq p$) linéairement indépendantes et satisfaisant aux conditions

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\alpha_\mu^{(\varkappa)} \alpha_\mu'^{(\lambda)} - \alpha_\mu'^{(\varkappa)} \alpha_\mu^{(\lambda)}) \equiv 0 \pmod r \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots, q),$$

g_1, g_2, ..., g_q étant des entiers capables de varier séparément de 0 à $r-1$, la caractéristique $[g_1 \alpha^{(1)} + g_2 \alpha^{(2)} + \dots + g_q \alpha^{(q)}]$ prend ainsi r^q valeurs.

Si les produits thêta correspondants ont entre eux des relations linéaires, on peut admettre que les coefficients de ces relations sont certaines quantités ω que l'auteur définit.

4. Même problème en introduisant, outre les caractéristiques $[\alpha]$, un autre système de q' caractéristiques $[\beta]$ ($q + q' \leqq p$).

Picard (*E.*). — Remarques sur les équations différentielles (extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler). (297-300).

Les équations différentielles (algébriques) d'ordre supérieur au premier se distinguent profondément des équations du premier ordre en ce que leurs singularités *essentielles* sont en général mobiles, ce qui n'arrive pas pour le premier ordre. Aussi, tandis qu'il est aisé de reconnaître si les points critiques d'une équation différentielle algébrique du premier ordre sont fixes, parce qu'il est aisé de s'assurer qu'un point arbitraire du plan ne peut être un point critique algébrique, la même méthode cesse-t-elle de s'appliquer à partir du second ordre. Les conditions, de nature algébrique, fournies par cette méthode ne sont plus du tout suffisantes; l'intégrale générale d'une équation qui les remplit est seulement « à apparence uniforme ».

Au contraire, les conditions pour que l'intégrale soit véritablement uniforme sont en général transcendantes. Par exemple, l'équation du second ordre dont l'intégrale générale est

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \log(x + C) + C'$$

[$R(y)$ étant un polynome du 4ᵉ degré en y] n'aura ses intégrales uniformes que si l'intégrale elliptique du premier membre a $2\pi i$ pour période.

Les conditions d'uniformité obtenues, par Mᵐᵉ Kowalewski pour les équations de la rotation des solides pesants, se présentent également, tout d'abord, comme exprimant que l'intégrale est à apparence uniforme. Ce n'est qu'après l'intégration effectuée que l'on peut affirmer que les conditions trouvées comme nécessaire pour l'uniformité sont également suffisantes.

Gram (*J.-P.*). — Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers. (301-314).

Les Tables des diviseurs des nombres, telles qu'elles ont été calculées pour les neuf premiers millions, par M. Burckhardt, Glaisher et Dase, quoique remarquablement correctes, offrent néanmoins un certain nombre d'erreurs. Quelques-unes avaient été signalées par M. Meissel et d'autres auteurs dès le deuxième million. Mais la comparaison avec la formule connue de Riemann en faisait soupçonner d'autres. M. Gram rend compte du travail entrepris par M. Bertelsen dans le but de retrouver le plus grand nombre possible de ces erreurs.

La méthode employée tout d'abord a été celle de M. Meissel, qui repose sur l'emploi de la formule

$$\Phi[m, \Theta(\sqrt[3]{m})] - \Phi[m, \Theta(\sqrt{m})] = \frac{\mu(\mu+3)}{2} - \mu\,\Theta(\sqrt{m}) + \sum_{\alpha} \Theta\left(\frac{m}{\alpha}\right),$$

où $\Theta(m)$ désigne le nombre des nombres premiers inférieurs à m, pendant que μ désigne la différence $\Theta(\sqrt{m}) - \Theta(\sqrt[3]{m})$ et

$$\Phi(m, n) = m - \sum E\left(\frac{m}{a}\right) + \sum E\left(\frac{m}{ab}\right) - \sum E\left(\frac{m}{abc}\right) + \ldots.$$

la totalité des nombres $\leqq m$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres a, b, c, ... qui sont les n premiers nombres premiers $\left(\text{la somme } \sum_{\alpha} \text{ est étendue}\right.$ à tous les nombres premiers de $\left.\sqrt[3]{m} \text{ à } \sqrt{m}\right)$. Cette formule permet de calculer, pour de grandes valeurs de m, les symboles Φ et Θ. Les valeurs de la fonction Θ ainsi obtenues par M. Bertelsen ne peuvent présenter que des chances d'erreur extrêmement minimes, car 1° plusieurs de ces valeurs ont été calculées par deux voies différentes; 2° M. Meissel a refait une partie des calculs et s'est trouvé en concordance absolue avec M. Bertelsen; 3° les erreurs prévues dans les Tables par ces calculs ont été toutes retrouvées. Peu nombreuses dans les 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ et 5ᵉ millions, ces erreurs sont au contraire assez abondantes dans le 8ᵉ et le 9ᵉ, alors qu'il n'en a été constaté aucune dans le 6ᵉ et le 7ᵉ.

Pour localiser ces erreurs, M. Bertelsen a imaginé de calculer la somme S des plus petits diviseurs des nombres composés non divisibles par 2, 3 ou 5, dans un intervalle donné (m, M). De ce fait qu'un nombre premier donné p se trouvera comme plus petit diviseur chaque fois qu'il sera multiplié par un nombre contenant seulement des facteurs premiers $\geqq p$, on déduit la formule

$$S = \sum_{s} p_s \left[\Phi\left(\frac{M}{p_s}, s-1\right) - \Phi\left(\frac{m}{p_s}, s-1\right)\right], \qquad 3 < s < \Theta(\sqrt{M})$$

(p_s étant le $s^{\text{ième}}$ nombre premier) dont la comparaison avec les résultats indique la nature des erreurs.

Le Mémoire se termine par deux Tableaux. Le premier est la liste des erreurs constatées (en distinguant celles qui l'avaient été auparavant). Le second donne la comparaison des valeurs de Θ calculées par M. Bertelsen avec celles qui résultent des Tables précédentes et celles que fournirait la formule de Riemann. De plus le nombre $\Theta(m)$ est calculé pour $m = 20$ millions, 90 millions, 100 millions et 1000 millions.

Ce second Tableau contient donc l'ensemble de toutes les déterminations correctes connues de $\Theta(m)$.

Wertheim (*G.*). — Tableau des plus petites racines primitives g de tous les nombres premiers impairs p au-dessous de 3000. (315-320).

Kobb (*G.*). — Sur les maxima et les minima des intégrales doubles. (321-344).

Après avoir étudié, dans un premier Mémoire (même Journal, t. XVI, p. 65), les maxima et minima absolus (c'est-à-dire recherchés en l'absence de toute condition supplémentaire autre que celle, pour la surface considérée, de passer par un contour donné), M. Kobb passe à la recherche des maxima et minima relatifs : en premier lieu, il recherche des maxima et les minima de l'intégrale

$$I^0 = \int\int_C F^0(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\, du\, dv$$

$\left(x' = \frac{\partial x}{\partial u}, x'' = \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots\right.$, comme dans le premier Mémoire$\left.\right)$ sous la condition que l'intégrale

$$I' = \int\int_C F'(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv$$

conserve une valeur donnée. Les fonctions F^0 et F' doivent être telles que les intégrales ne dépendent que de la forme de la surface et, par conséquent, vérifier certaines équations aux dérivées partielles précédemment écrites [premier Mémoire, équation (4)].

Les coordonnées variées seront $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; on posera

$$\xi = K_1\xi_1 + K_2\xi_2, \qquad \eta = K_1\eta_1 + K_2\eta_2, \qquad \zeta = K_1\zeta_1 + K_2\zeta_2,$$

puis

$$w_i = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\zeta_i + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\eta_i + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\zeta_i, \qquad (i = 1, 2),$$

$$M'_i = \int\int G' w_i\,du\,dv$$

où G' est une fonction des dérivées partielles de F' et de celles de x, y, z calculés comme il a été expliqué au premier Mémoire : il viendra

$$\Delta I' = K_1 M'_1 + K_2 M'_2 + (\quad)_2 + \ldots$$

et, moyennant des notations toutes semblables,

$$\Delta I^0 = K_1 M^0_1 + K_2 M^0_2 + (\quad)_2 + \ldots.$$

On voit alors que, ayant choisi ξ_i, η_i, ζ_i, on peut toujours prendre K_1, K_2 de manière que $\Delta I'$ soit nul. La condition que ΔI^0 s'annule en même temps donne

$$\frac{M^0_1}{M'_1} = \frac{M^0_2}{M'_2} = \lambda,$$

λ étant une constante; et par conséquent, pour les surfaces cherchées, l'équation aux dérivées partielles

$$G = G_0 - \lambda G' = 0.$$

S'il y a des lignes de discontinuité, on devra avoir, le long de ces lignes, des conditions analogues à celles qui ont été indiquées au premier Mémoire.

Une solution de l'équation précédente correspond-elle véritablement à un maximum ou à un minimum? Pour répondre à cette question, il faudra suivre une marche analogue à celle qui a été suivie pour les maxima et minima absolus et commencer par rechercher les surfaces infiniment voisines de la première et satisfaisant également à l'équation $G = 0$, en tenant compte toutefois de cette circonstance que λ, constant pour une solution déterminée, peut varier d'une solution à l'autre. On arrive ainsi, comme précédemment, à trouver que la solution considérée est unique s'il existe une solution de l'équation linéaire

$$F_4 U - \frac{\partial}{\partial u}\left(F_1\frac{\partial U}{\partial u} + F_3\frac{\partial U}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_2\frac{\partial U}{\partial v} + F_3\frac{\partial U}{\partial u}\right) = 0$$

(F_1, F_2, F_3, F_4 étant des fonctions définies comme au premier Mémoire, mais qui, ici, contiennent linéairement le paramètre λ) qui reste finie, continue et différente de zéro dans tout le contour d'intégration.

M. Kobb reprend ensuite la fonction $\mathcal{E}$ définie dans le premier Mémoire : plus exactement, il construit les fonctions $\mathcal{E}^0$ et $\mathcal{E}'$ correspondant à F^0 et F' et pose

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 - \lambda \mathcal{E}'.$$

Comme précédemment, il démontre que cette quantité doit avoir un signe invariable (le signe +, par exemple, s'il s'agit d'un minimum).

Supposons maintenant que ces différentes conditions soient remplies : alors l'intégrale I^0 sera bien minima, ce que l'on constate par des méthodes identiques à celles qui ont été appliquées pour les minima absolus.

Un autre cas de maximum relatif est celui dans lequel on impose à la surface cherchée la condition d'être à l'intérieur d'une certaine portion de l'espace. Il peut alors arriver que la surface maximum rencontre la surface limite, et cela peut arriver de deux manières différentes : ou bien 1° il y a coïncidence avec la surface limite dans une position finie; ou bien 2° la surface maximum se compose de deux parties qui se rencontrent suivant une courbe située sur la surface limite. Dans les deux cas, l'étude des variations aux limites, conduite toujours d'après les mêmes méthodes, fournira les conditions accessoires du maximum. On parvient ainsi aux deux théorèmes suivants, analogues à ceux que M. Weierstrass, généralisant un résultat de Steiner, a démontré dans le cas des intégrales simples :

1° S'il y a coïncidence dans une aire finie, la surface cherchée doit être tangente à la surface limite le long du contour qui limite la portion commune;

2° S'il y a rencontre de deux portions de la surface cherchée le long d'une courbe K située sur la surface limite A, il faudra que les sinus des angles que font les plans tangents aux deux portions avec le plan tangent de A soient inversement proportionnels aux fonctions $\mathcal{E}$ correspondantes.

Fricke (*R.*). — Développements sur la transformation du cinquième et du septième ordre de quelques fonctions automorphes. (345-395).

I. *Fonctions triangulaires* (au sens de Schwartz) *à points critiques d'ordre* (2, 4, 5) *et* (2, 5, 6).

1. Groupe fuchsien correspondant au triangle curviligne d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ [ou, pour abréger, au triangle (2, 4, 5)]. L'angle égal à $\frac{\pi}{4}$ est supposé avoir pour sommet, dans le plan de la variable imaginaire η, le point $\eta = i$, l'un des côtés étant dirigé suivant l'axe imaginaire; les trois côtés coupent orthogonalement l'axe réel. Dans ces conditions, aux angles égaux à $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ correspondent deux rotations V_1, V_2 de périodes respectives 4 et 2, qui sont toutes deux de la forme

$$(1)\qquad \eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\eta + A - B\sqrt{P}},$$

où $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et A, B, C, D sont des entiers par rapport à 1 et P. Dès lors toutes les substitutions du groupe qu'elles engendrent sont de la même forme (1).

2. Considérons les substitutions de la forme (1) qui ont pour module 1, 2 ou 4. Tout d'abord les substitutions de module 4 vérifient les congruences

$$(2) \qquad A \equiv C, \qquad B \equiv D \qquad (\text{mod } 2)$$

et l'on en déduit qu'elles forment un groupe. Car, dans le produit de deux telles substitutions, on peut diviser tous les coefficients par 2 et ramener le module à la valeur 4.

Mais la substitution V_1 vérifie aussi les congruences (2). Il en résulte que le groupe dérivé de V_1 et des substitutions de module 4 comprend, outre celles-ci, les substitutions de module 2 et celles-là seulement.

Ce groupe est proprement discontinu, comme on le voit en remarquant, à l'aide de la théorie des entiers complexes, qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de substitutions dont les coefficients s'abaissent au-dessous d'un nombre donné arbitrairement. Pour déterminer le polygone fondamental, on remplace, dans une substitution du groupe, la variable primitive par sa conjuguée et l'on cherche à considérer la transformation ainsi définie comme une réflexion (au sens de Klein, *Modulfunctionen*). On obtient ainsi une série de cercles, parmi lesquels se trouvent les côtés du triangle précédemment construit. Des considérrtions empruntées à la Géométrie non eulérienne introduite par M. Poincaré dans son Mémoire sur les groupes fuchsiens permettent d'établir que le double triangle en question est effectivement le polygone générateur.

3. Groupe fuchsien correspondant au triangle (2, 5, 6). Ce groupe s'établit par des considérations analogues aux précédentes. Ces substitutions sont des deux formes différentes

$$(3) \qquad \eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\,\eta + C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ}}{(-C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\,\eta + A - B\sqrt{P}}$$

ou

$$(4) \qquad \eta' = \frac{(C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\,\eta + A \times B\sqrt{P}}{(-A + B\sqrt{P})\,\eta + C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ}},$$

où $P = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $Q = 3$; A, B, C, D étant quatre entiers en 1 et P satisfaisant aux congruences

$$A + PB + D \equiv 0, \qquad B + C + PD \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2)$$

et tels que le module de la substitution soit égal à 4.

On constate en effet que ces substitutions forment un groupe et un groupe proprement discontinu; et, déterminant comme tout à l'heure le polygone fondamental, on le trouve bien composé d'un triangle d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{6}$ et de l'image de ce triangle par rapport à un de ses côtés.

4. Introduction de deux surfaces de Riemann à 120 feuillets. Soit Γ l'un des deux groupes précédents. Il existe une fonction $z(\eta)$ qui admet ce groupe : celle qui réalise la représentation du triangle correspondant sur le demi-plan des z. On obtiendra une transformation de cette fonction en effectuant, sur la variable indépendante, une substitution W assujettie aux mêmes conditions que les substitutions du groupe, à cette différence près que le déterminant peut être quelconque. (Soit n la norme de ce déterminant.) Les fonctions $z(\eta)$ et $z'(\eta) = z[W(\eta)]$ sont liées par une équation algébrique. Soit, en effet, Γ' le transformé de Γ par la substitution W : les deux groupes Γ et Γ' sont commensurables (au sens de Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique, Journal de Liouville,* t. III_4) : ils ont en commun un certain sous-groupe distingué dont on déduit, à la manière ordinaire, un groupe γ mériédriquement isomorphe à Γ; c'est celui que l'on obtiendrait en ne considérant pas comme distinctes, dans le groupe Γ, deux substitutions dont les coefficients sont respectivement congrus (mod n). Pour $n = 5$, on est ainsi conduit à un sous-groupe distingué d'indice 120, dont le polygone fondamental peut (voir *Modulfunctionen*) être déformé en une surface fermée divisée en 120 doubles triangles. La fonction $z(\eta)$ représente ce polygone sur une surface de Riemann à 120 feuillets, ramifiée aux points 0, 1, ∞ et de genre 4 ou 9 suivant qu'il s'agit du groupe (2, 4, 5) ou du groupe (2, 5, 6).

5. Le domaine algébrique de genre 4, auquel on parvient, admet pour courbe normale (au sens de Nöther) une courbe C_6 du sixième degré de l'espace ordinaire, intersection complète d'une quadrique et d'une surface du troisième degré, et qui se reproduit par 120 collinéations.

Si, sur la quadrique, nous prenons pour coordonnées les paramètres λ, μ des génératrices, ces 120 collinéations donneront, pour λ et μ, le système des 60 substitutions icosaédrales et des 60 qu'on en déduit en les combinant avec l'échange des coordonnées. La courbe la plus simple qui ne change pas par ces substitutions est représentée par une équation doublement cubique en λ, μ : c'est la courbe normale cherchée. Mais de plus, la courbe invariante C_8, la plus simple après celle-là, et qui est représentée par une équation doublement quartique, est justement la courbe normale du second domaine dont il a été parlé, celui qui est de genre 9.

6. Si, à la génératrice de paramètre λ, nous faisons correspondre, sur la sphère, le point d'affixe λ, comme les 60 premières collinéations correspondent aux rotations icosaédrales de la sphère, nous voyons qu'il existe entre la sphère, divisée en domaines icosaédraux, et la courbe C_6 une correspondance (1, 3); entre cette sphère et C_8 une correspondance (1, 4).

II. *Sur les fonctions triangulaires* $\eta(2, 3, 7; z)$, $\eta(2, 4, 7; z)$ *et quelques fonctions polygonales voisines.*

1. Les groupes (2, 3, 7) et (2, 4, 7) ont été étudiés par l'auteur (*Math. Annalen,* t. XLI). Leurs substitutions se forment avec le nombre j, racine de l'équation $j^3 + j^2 - 2j - 1 = 0$ et le nombre $\sqrt{j - 1}$. En considérant ces substitution suivant le module 7, on en déduit, comme plus haut, des sous-groupes distingués Γ d'indice 168 et des surfaces de Riemann à 168 feuillets, de genres 3 et 10 respectivement, qui se reproduisent par un groupe G de 168 substitutions.

2. Le premier sous-groupe distingué Γ a été étudié par Klein. Il a pour courbe normale la quartique plane

$$(5)\qquad f_4(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 z_3 + z_3^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0.$$

Dans le plan de cette courbe, les substitutions du groupe G (numéro précédent) correspondent à 168 collinéations qui laissent invariante la courbe (5). Trois autres courbes f_6, f_{14}, f_{21} (les indices marquant les degrés respectifs) sont également conservées par les mêmes collinéations. La courbe f_6 est identique au domaine algébrique de genre 10 que l'on déduit du groupe (2, 4, 7) (numéro précédent).

Les collinéations correspondant au groupe G ont pour périodes 7, 4, 3 ou 2. Les collinéations d'ordre 7 ont leurs 24 point fixes p_7 situés sur f_6. Cette courbe contient également 42 des points fixes relatifs aux homographies d'ordre 4, les points p_4, mais non les 21 autres points fixes p'_4 des mêmes substitutions (lesquels servent également de points fixes aux collinéations d'ordre 2), non plus que les 56 points fixes p_3 et les 28 points fixes p'_3 des homographies d'ordre 3.

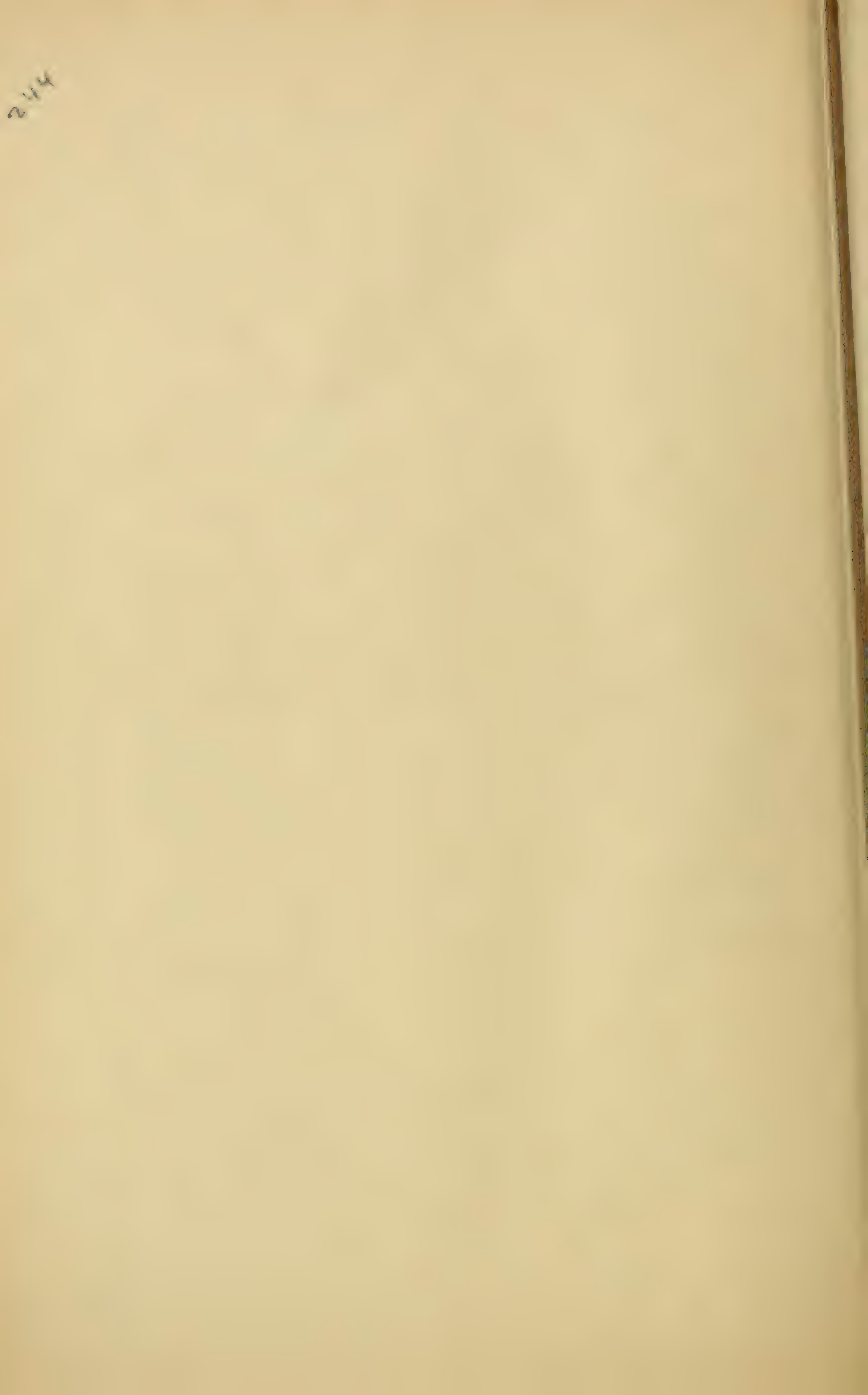
3. Courbes $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$. Ces courbes sont invariantes par les substitutions de G. Elles sont irréductibles si $\mu_1 \mu_2 \neq 0$ et possèdent en général le genre 31. Sur chacune de ces courbes, la fonction $y = \frac{1}{4}\sqrt[7]{\frac{-\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{f_{14}}{f_4^3}$ admet le groupe G. A la courbe correspond, dans le plan de la variable y, une surface de Riemann à 168 feuillets, dont l'auteur discute les points de ramification.

4. La théorie des fonctions fuchsiennes établit la possibilité de représenter les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre η, M. Fricke se propose de construire ces fonctions pour les courbes $\mu_1 f_6^2 + \mu_2 f_4^3 = 0$ du numéro précédent. Il utilise cette circonstance qu'une telle courbe admet un groupe de 168 transformations biuniformes en elle-mêmes, auxquelles correspondent, pour la variable η, des substitutions linéaires. Celles-ci, combinées avec celles du groupe fuchsien cherché, donnant un groupe Γ comprenant le premier comme sous-groupe distingué d'indice 168 : c'est ce groupe Γ que l'on peut arriver à former, au moins, moyennant certaines hypothèses.

Le Mémoire se termine par l'indication des recherches analogues sur d'autres courbes invariantes par rapport au même groupe G, par exemple les courbes de degrés 14, 18, ... Le quadrilatère, qui sert de polygone fondamental au groupe Γ précédent, est alors remplacé par des polygones plus compliqués, mais dont on connaît encore les angles.

J. Hadamard.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XX.


244

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XX; 1896. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica. T. XVI, 1892; t. XVII, 1893. — 5-21, 223-243.
Annales de la Faculté des Sciences de Marseille. T. I, 1891; t. II, 1892; t. IV, 1893; t. VI, 1895. — 103-107.
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 3e série, t. X, 1893; t. XI, 1894. — 21-38, 204-109.
Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno CCLXXXI, 1892. Rendiconti, série 5a, t. I. — 66-71.
Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXII, 1894. — 188-203.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXVIII, 1894; t. CXIX, 1894. — 121-149, 171-188.
Mathematische Annalen. T. XXXVII, 1890; t. XXXVIII, XXXIX, 1891. — 72-102.
Nouvelles Annales de Mathématiques. 3e série, t. XIII, 1894; t. XIV, 1895. — 47-59; 209-222.
Philosophical transactions of the Royal Society of London. Vol. 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185 (1888 à 1884). — 149-170.
Rendiconto dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Societa reale di Napoli). 2e série, t. IV, 1890; t. V, 1891; t. VI, 1892; t. VII, 1893. — 59-66.
Revue d'Artillerie. T. XXXIII, 1888-89; t. XXXIV, 1889; t. XXXV, 1889-90; t. XXXVI, 1890; t. XXXVII, 1890-91; t. XXXVIII, 1891; t. XXXIX, 1891-92; t. XL, 1892; t. XLI, 1892-93; t. XLII, 1893; t. XLIII, 1893-94; t. XLIV, 1894; t. XLV, 1894-95. — 38-47.
Sitzungberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Second semestre 1891. — 107-120.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abney (W. de W.). 157.
Abney et Thorpe (T.). 158.
Adam. 33, 196, 200.
Amaldi (J.). 62.
Amigues (E.). 49, 104, 220.
Andoyer. 49.
Andrade. 187, 190, 199.
André (D.). 138, 185.
Angas-Scott (Charlotte), 170.
Angelitti (F.). 59, 63.
Antomari. 191.
Appell (P.). 48, 51, 103, 104, 182, 189, 199.
Arone (d'). 131.
Ascione (E.). 63, 64.
Astor (A.). 51, 55.
Audibert. 48, 56, 57.
Auric. 48, 52.
Autonne. 146, 183.
Barbarin (P.). 49, 195.
Barisien (E.-N.). 56, 212, 220.
Balitrand. 195.
Ballue (E.). 211.
Barrieu (P.). 212.
Basset (A.). 151, 160.
Battaglini (G.). 62.
Beltrami (E.). 67.
Bendixon. 144.
Bennet (G.). 164.
Bertrand (J.). 121.
Berzolari (L.). 61, 62.
Beudon. 146.
Bianchi (L.). 69, 70, 87.
Bienaymé (A.). 50.
Blazcievski (R.). 48, 210.
Borel. 130.
Bosi (L.). 56.
Bossut (L.). 214.
Bougaieff. 187.
Bourlet (C.). 55, 209.
Boussinesq. 124, 126, 129, 178, 179, 180, 183.
Braunmuhl (A. von), 74.
Brill (A.), 95.
Brioschi (J.). 71.
Brocard (H.). 57, 58, 59.
Bryan (G.). 157.
Burbury (E.). 164.
Burbury (S.). 152.
Burkhardt (H). 85, 195.
Caffin (G.). 56.
Cahen. 202, 205.
Callandreau (O.). 58.
Cantoni (G.). 71.
Capelli (A.). 60, 61, 62, 64, 65, 66, 72, 211.
Caron (J.). 213.
Cartan. 179, 185, 202.
Carvallo (E.). 55, 203.
Caspary. 30.
Castelnuovo (G.). 66.
Cazamian (A.). 49, 52, 53, 210, 212, 215, 217, 218.
Césaro (E.). 50, 65, 66, 184.
Chambers (C.). 149.
Chapel. 39, 47, 186.
Coculesco. 122.
Contarino (F.). 60, 63.
Cosserat. 129.
Costa (G.). 65.
Culverwell (E.). 149.
Dariès (G.). 53.
Darwin (G.). 150, 151, 155, 161.
Darwin (L.), 158.
Davison (C.). 150.
Defforges. 126.
Delassus. 144, 171.
Del Pezzo (P.). 64, 65.
Del Re (A.). 70, 71.
Demoulin. 128, 129, 190.
Deprez (Marcel). 182.
Desaint. 174.
Destoux (J.). 57.
Doehlemann (K.). 102.
Droz-Farny (A.). 57.
Duhem. 28.

Dujardin. 183.
Dyck (W.). 77, 187.
Dyson (F.). 165.
E.-G. 50.
Elliot. 29, 158, 204.
Engel, 134.
Estienne (J.-E.). 41.
Fabry (C.). 103.
Fabry (L.). 105.
Farjon (F.). 212.
Fauquembergue (E.). 221.
Fehr. 195, 211.
Fergola (E.). 63.
Ferrari (F.). 210.
Filloux (L.). 45.
Fitte. 32.
Folie (F.). 20.
Forsyth. 152, 155.
Fouret (G.). 221.
Franel (J.). 59, 222.
Frattini (G.). 67, 69.
Fricke (R.). 83, 90, 94, 240.
Frolov (M.). 203.
Genay (L.). 42.
Gentil. 43, 52, 55, 190, 196, 201.
Gerhardt (C.-J.). 115.
Goursat. 137, 190, 215.
Gram (J.-P.). 237.
Greenhill. 207.
Grévy. 207.
Grylls-Adams. 163.
Guyou. 180.
Gwyther (R.). 167.
Gylden (Hugo). 223.
Hadamard. 143, 186.
Hammond (J.), 150.
Hartmann (G.-H.-C.). 42, 46.
Héaviside (O.). 164.
Heffter (L.). 91.
Hess (W.). 75.
Hilbert (D.). 84, 90, 229.
Hill (J.). 163.
Hill (M.). 170.
Hioux (V.). 52.
Hocks (J.). 232.
Holder (O.). 87.
Horn (J.). 101.
Hott (S.). 55.
Hurwitz (A.). 90, 92, 98.
Jaggi (E.). 50.
Jamet. 103, 219.
Janet (A.). 127.
Junker (F.). 83.
Kagan (B.). 215.
Kagan (H.). 210.
Kapteyn. 27.
Kiepert (L.). 78, 96
Killing (W.). 98.
Klein (F.). 80, 81, 85.
Kluyver. 205.
Kobb (G.). 7, 238.
Koch (H. von). 13.
Kœnigs (G.). 144, 184, 189.
Kœnigsberger (L.). 98.
Kotelnikoff. 123.
Kötter (E.). 86.
Kötter (Fr.). 233.
Krazer (A.). 235.
Krigar (O.), 107.
Kronecker (L.). 107, 109, 113.
Kürschak (J.). 77.
Lafay. 187.
Laffite (P.). 49.
Laisant. 190, 201.
Lamb (H.). 150.
Laurent (P.). 45, 46.
Léau. 184.
Lecornu. 123, 134, 184, 195.
Leinekugel (G.). 55, 213, 214, 219, 222.
Lelieuvre. 144.
Lemaire (J.). 211, 217.
Lemoine (E.). 51.
Lerch. 182.
Lévy (L.). 47, 217.
Lévy (Maurice). 180.
Lez (H.). 57.
Lilienthal (R. von). 10, 90.
Lindelöf. 135.
Liouville. 175.
Lippmann, 122.
Lodge (O.). 165.
Lohnstein (Th.). 10.
Lombard (E.). 41.
London (F.). 88.
Longridge (J.-A.). 44.
Love (A.). 155.
Lucas (F.). 127.
Macaulay (A.). 164.
Mac-Mahon (P.). 160, 166, 169.
Maillet. 146, 174, 214, 220.
Maltézos. 208.
Mangeot. 23, 26, 105.
Mannheim. 175, 201.
Marcolongo (R.). 61, 63, 68.
Marey. 180.
Maunder (W.), 158.
Maurer (L.). 101.
Mayer (A.). 78.
Menzel, 107.
Meyer (F.). 89, 217.
Michell (J.). 160.
Mittag-Leffler (G.). 21.
Moch (G.). 38.
Mollame (V.), 60, 64.

Montésano (D.). 69.
Monteux (B.). 39.
Morera (G.). 67.
Moret-Blanc. 57, 221, 222.
Moureaux, 139.
Moutard. 172.
Mozat. 141.
Musso (G.), 211.
Nekrassoff (P.-A.). 83, 91.
Netto (E.). 231, 235.
Niven (W.). 161.
Nobile (A.). 64, 66.
Nœther (M.). 79, 80.
D'Ocagne (M.). 51, 138, 200, 213, 216, 217, 218.
Padé. 142.
Padelletti (D.). 62.
Padova (E.). 68.
Painlevé. 141, 171, 178, 197, 198.
Pascal (E.), 71.
Pasch (M.), 82.
Péano (G.), 76.
Péarson (K.), 168.
Pellet (A.-E.). 50, 125.
Pépin (Le P.). 175.
Perchot. 35.
Perrin. 185, 187.
Perry (Rév.). 158.
Petot. 149, 177.
Pétrovitch. 146.
Picard (Em.). 96, 121, 131, 136, 140, 142, 177, 186, 187, 188, 191, 196, 200, 214, 237.
Picard (L.). 139.
Pichot (J.). 220.
Pick (G,). 85.
Picquet. 189.
Pincherle (S.). 18, 68.
Pinto (L.). 63.
Pirondini (G.). 60, 62.
Pizzetti (P.). 69.
Ply (G.). 38.
Pochhammer (L.). 80, 85, 86, 92.
Poincaré (H.). 15, 132, 135, 137, 143, 178.
Polignac (C. de). 222.
Pomey (E.). 220.
Postnicoff (M.). 54.
Potier. 123.
Poynting (J.). 163.
Pringsheim (A.). 73, 81, 85, 95.
Putz (G.). 39.
Raffy (L.). 188, 192, 197.
Rapp (A.), 107.
Ray (L.). 38, 39.
Reina (V.). 59.
Rethy (M.). 89.
Reveille (J.). 50.
Reynolds (O.). 170.
Rigollet (P.). 219.
Riquier. 25, 35, 172, 173.
Rivereau (L'abbé). 104.
Rougier (J.). 105.
Roulin (L.). 40.
R. S. 219.
Saint-Germain (A. de). 52, 179, 214, 219.
Salvert (de). 146, 149.
Sampson (R.). 162.
Sautreaux. 35.
Sauvage. 21, 103, 105, 219.
Scheffers (G.). 98.
Schilling (Fr.). 102.
Schubert (H.). 92.
Schumacher (R.). 74, 87.
Schur (F.). 86, 95.
Schuster (A.). 158.
Sée (R.). 216.
Seguier (de). 149.
Sella (A.). 69.
Serret (Paul). 175, 176.
Siacci (F.). 40, 187.
Sintsof (D.). 211.
Somigliana (C.). 70.
Sondat (P.). 50, 217.
Soreau (R.). 44.
Stahl (W.). 92.
Staude. 185.
Stickelberger. 77.
Stieltjes. 147, 148.
Stodolkievicz. 176.
Stolz (O.). 94.
Stouff. 23, 31, 148, 185.
Stæckel. 176, 181, 187.
Study (E.). 101.
Schvechnicoff (P.). 221.
Sylvester (J.). 150, 152.
Tannenberg (de). 145, 173, 176.
Tarry (G.). 52, 215, 216.
Taylor (H.). 167.
Terrier (P.). 221.
Thomson (J.). 151.
Tikhomandritzky. 27.
Tissot (A.). 49.
Tomlinson (H.). 151.
Tonelli (A). 67.
Torelli (G.). 59, 60.
Touche (P.). 41, 181.
Turner (H.). 158.
Uchard (A.). 43.
Vahlen. 218.
Valdès (E.). 52.
Vailier (E.). 40, 42, 43, 44, 45.
Varicak (V.). 209, 215.

Vaschy. 209.
Vaucheret (V.), 42.
Vernier (P.). 148, 175, 198.
Vessiot. 23, 200.
Vogt. 133.
Volterra (V.). 10, 70.
Von Koch. 142.
Voss (A.). 97.
Waelsch (E.). 75.
Walker (G.). 164.
Walker (J.). 152, 161.
Weber (H.). 78, 218.
Weierstrass (K.), 116.
Weill, 205.
Wertheim (G.). 238.
Wiltheiss (E.). 77, 81.
Wœlsch. 139.
Worontzoff. 51.
Zaboudski. 42, 47.
Zaremba. 195.
Zeuthen (H.-G.). 79.
Zorawski (K.). 5.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XX.

23040 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.